Springer

装备科技译著出版基金

高能量密度物理

——基础、惯性约束聚变和实验天体物理学

High-Energy-Density Physics

Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics

[美] R.Paul Drake 著

孙承纬 译 赵剑衡 校

国防工業出版社

National Defense Industry Press

责任编辑：肖志力　zlxiao@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：王晓军

高能量密度物理

——基础、惯性约束聚变和实验天体物理学

High–Energy–Density Physics

Fundamentals,Inertial Fusion,

and Experimental Astrophysics

Springer

▶ 上架建议：物 理 ◀

http://www.ndip.cn

ISBN 978-7-118-08430-6

定价：89.00 元

高能量密度物理

——基础、惯性约束聚变和实验天体物理学

High-Energy-Density Physics

Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics

[美] R. Paul Drake 著

孙承纬 译

赵剑衡 校

国防工业出版社

·北京·

著作权合同登记　图字:军 -2011 -061 号

图书在版编目(CIP)数据

高能量密度物理—基础、惯性约束聚变和实验天体物理学 / (美) 德雷克 (Drake, R. P.) 著;孙承纬译.
—北京:国防工业出版社, 2013. 1
书名原文: High - Energy - Density Physics:
Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics
ISBN 978-7-118-08430-6
Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①德… ②孙…　Ⅲ. ①物理学　Ⅳ. ①O4
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 315821 号

Translation from the English language edition:
High - Energy - Density Physics by R. Paul Drake.

高能量密度物理——基础、惯性约束聚变和实验天体物理学

出版发行　国防工业出版社
地址邮编　北京市海淀区紫竹院南路 23 号　100048
经　　售　新华书店
印　　刷　北京嘉恒彩色印刷有限公司印刷
开　　本　787 × 1092　1/16
印　　张　24¾
字　　数　560 千字
版 印 次　2013 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数　1—2000 册
定　　价　89.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777　　发行邮购: (010)88540776
发行传真: (010)88540755　　发行业务: (010)88540717

译 者 前 言

所谓“高能量密度系统”,是指处于高能量密度状态的连续介质或者粒子体系,也就是在高压、高温、高速碰撞或驱动、高强度辐照(激光、粒子束)、强电(磁)场诱导等极高功率加载条件下,物质单位体积内的能量或者粒子的平均动能通过沉积、聚积等途径得到急剧提高的系统。“高能量密度物理”(High Energy Density Physics)即是关于构建物质高能量密度状态的原理及技术,考察高能量密度系统响应特性、行为规律及相互作用的各个力学、物理学科的交叉研究领域。许多读者也许不熟悉这个新的学科名词,但应注意它与粒子物理学的“高能物理”极其不同。

高能量密度物理是核武器物理过程实验室模拟、强冲击动力学、超高压物态方程、实验天体物理学和激光强场物理等重要应用分支的共同学科基础,其基本框架是连续介质模型的流体动力学,包括冲击动力学、电磁流体力学、等离子体动力学和辐射流体力学等。按照学术界当前公认的定义,物质的高能量密度状态是指加载过程中其能量密度增量达到0.1 MJ/cm^3 以上时所呈现的状态,也就是物质内部的总压力不低于100万 atm(100GPa)量级的状况。这个压力量级相当于金属材料冲击压缩性明显呈现、液态气体(如液氢)达到冲击压缩极限的程度,对于上述各种重要应用具有标志性的意义。以传统的加载方式为例,速度高达10 km/s 的铝飞片撞击静止的铝靶所产生的冲击波压力只有180GPa左右,说明这个定义大致对应于新老加载技术压力范围的不同界限。

虽然作为新的学科领域而言,高能量密度物理只是在近10多年来才受到人们的重视,但其发源可以追溯到半个多世纪以前。在核武器物理深入研究的基础上,20世纪60年代苏联泽尔道维奇(Я. Б. Зельдович)和莱伊捷尔(Ю. П. Райзер)撰写了从流体力学和动理学方面阐述稠密高温等离子体中高速流动与强辐射相互作用的奠基性专著《激波和高温流体动力学现象物理学》(Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Наука, Москва 1966),这是本书引用最多的基本参考书。1969年7月,意大利物理学会在 Varenna 召开了主题为“高能量密度物理”(Physics of High Energy Density)的费米物理国际研讨会,实际上是核武器物理和激光聚变原理的专业研讨会。根据 E. Teller 的主题发言,这个新名字意味着各国相关科学家正在致力开拓的新学科领域。各位专家的报告围绕着炸药爆轰、冲击压缩、内爆动力学、高速发射等传统加载技术和新颖的爆炸磁通量压缩发生器、高功率激光与等离子体相互作用和相对论强电子束以及天体物理的相对论流体力学等问题,其中 R. E. Kidder 等关于稠密高温激光等离子体参数状态和不稳定性的分析,预言了激光烧蚀驱动(辐射)冲击波的压力可以达到10TPa甚至更高的量级,属于这方面最早的一些重要理论工作。1971年,Academic Press 正式出版了该研讨会的文集“Physics of High Energy Density”,这是译者所看到的“高能量密度物理”名词的最早来由。中国工程物理研究院流体物理研究所当时的所长方正知教授认为,这个名称恰当地表示了流体物理所

的学科性质，就用这个名字命名了该所创办的所刊。

1996年，美国利弗莫尔国家实验室 M. D. Rosen 指出，高能量密度研究的参数空间及加载手段可分为两个范围，分别对应于高压凝聚态物质处于核武器初级（原子弹）流体动力学试验（炸药爆轰驱动的内爆压缩阶段）至裂变材料点火的范围，以及高温稠密等离子体处于核武器次级（氢弹）、黑腔物理及惯性压缩聚变（ICF）研究至热核点火的范围（The science applications of the high - energy density plasmas created on the NOVA laser, Phys. Plasmas 3 (5), 1803 - 1812 (1996)）。这是全面禁核试之后对于核武器物理实验室模拟工作在学科上的高度概括，与洛斯阿拉莫斯实验室的两类地面实验计划（分别对应于核武器初级和次级的 AGEX - I 和 AGEX - II 计划）是完全一致的。

当高功率激光、强流粒子束或脉冲大电流分别通过光学透镜、磁聚焦透镜或汇流传输线集中快速地沉积于凝聚态物质和稠密等离子体靶样品中，在力学稀疏、热扩散和磁扩散等因素来不及发挥作用之前，靶物质中形成处于高能量密度状态的沉积能量区域，达到很高的温度或压力。与此同时，介质沉积能量中的动能部分通过动力学途径压缩能量沉积的区域，驱使能量进一步聚积于大大缩小了的体积之中，从而大大提高最终得到的能量密度或压力。动力压缩往往依靠速度为数十千米每秒至数百千米每秒的辐射冲击波，并且通过介质内聚运动的内爆方式。因此，能量高密度沉积的技术基础是研发极高功率的激光、粒子加速器和脉冲强电流装置；介质的高密度压缩则依靠相应驱动条件下内爆动力学的研究。这些工作和极高压力下物质力学性质的研究，构成了高能量密度物理领域中与前述核技术应用基础密切相关的“动力学”研究组成部分。

纳秒（或亚纳秒）激光脉冲对应的 $10^{15}\mathrm{W/cm^2}$ 的辐照度，意味着激光作用范围内能量沉积造成的热压力约 0.1TPa，然而再通过动力压缩途径，很小范围中物质压力可达到 10TPa 甚至 10^3TPa 的量级。但是在 $10^{15}\mathrm{W/cm^2}$ 以上范围，激光与等离子体非线性相互作用激起的各种不稳定性以及功率损失日益严重，限制了这种加载方式实际上可达到的压力水平。目前我们还不知道通过什么途径可以到达更高的实验可行的物质压力范围。尽管如此，在激光加载和动力压缩可达到的 10TPa 超高压、10^8/s 超高应变率范围内，物态方程和冲击动力学的研究还只是方兴未艾，而且还看不出其他技术手段将来能够达到更高的加载水平。

21 世纪初以美国圣地亚国家实验室 Z/ZR 机器为代表的脉冲功率加载技术得到迅速发展，在几个纳亨的短路负载样品上能够通过幅度几十兆安、前沿数百纳秒的大电流，斜波加载的磁压幅度达到数百吉帕，驱动的薄铝飞片终速度超过 40km/s。人们已经研制了一些新结构的小型化磁驱动加载装置，未来有望达到幅度太帕量级的加载能力，与激光技术比较其样品尺寸较大、应变率影响较低。

20 世纪年代以来，国际上大型激光聚变设施、超短激光技术和强电流脉冲功率技术突飞猛进，以 NOVA、Omega、NIF 激光器（以及数十兆安的 Z/ZR 强电流机器）和拍瓦（10^{15}W）激光器为标志，10 多年内固体靶表面的激光辐照度从 $10^{15\sim17}\mathrm{W/cm^2}$ 提高到了 $10^{18\sim21}\mathrm{W/cm^2}$，即将达到 $10^{22}\mathrm{W/cm^2}$ 以上的水平。由于光子动量改变所引起的靶表面光压将远超过激光烧蚀以及动力压缩所造成的物质压力，理论上可达到 10^2TPa ~ 10^5TPa 的

量级，虽然这两者间并不存在可比性，极短时间的光压也许难以实际应用于物质压缩实验。

意义更为深远的是，激光光波电场幅度的平方正比于激光辐照度，例如，在 1.38×10^{18} W/cm^2 下将达到原子内场强 $10^9V/m$ 的上千倍，这种强电场中电子的振荡动能为 511keV，恰等于其静止质量能，即成为相对论电子。相对论的高能量密度系统呈现了一个崭新的物理世界。现在证实在尾波场、表面电场势和库仑爆炸等机制作用下，靶等离子体中的电子能够得到极高梯度的加速，已得到束散度很小、电荷数相当大的 100MeV 量级准单能电子束，还能够产生几十兆电子伏量级的高能质子束和重离子束。超短超强激光与固态靶的其他类型相互作用还可能导致极强磁场（10^5T）的产生、正负电子对的形成、核反应的引发和元素的嬗变。这些难以想象的极端高能量密度场景，为 21 世纪物理学的发展带来了巨大的动力和罕见的机遇。这个全新学科的确切名称是"激光强场物理"，考虑到它与高功率激光（尤其是快点火技术）的自然联系，可视为高能量密度物理领域"物理"研究的重要组成部分。

遥远宇宙空间中许多天体物理系统的行为，其实是由等离子体动力学和辐射流体力学的规律所控制的，在主要物理参数适当缩比模拟的条件下可以通过实验室中高能量密度实验进行研究，尤其是天体中辐射冲击波、超高速喷流等力学行为以及引发光核反应等问题。在超新星（SN）爆发、超新星遗迹（SNR）演化、利用产生正负电子对解释 γ 射线暴（GRB）机制等方面已得出令人信服的结果。另外，天体物理系统的一些重要特性参数（如物态方程、发射光谱、不透明度等）也可以做模拟实验研究。21 世纪初建立的高功率激光设施和脉冲功率驱动的等离子体内爆实验，使实验天体物理从设想成为现实，发展前景令人鼓舞，显示了高能量密度物理方法应用于基础科学研究的巨大潜力。

基于高能量密度物理各个方面的发展，美国国家研究理事会的等离子体委员会于 2002 年发表了题为"高能量密度物理领域：当代科学的交叉发展策略"的报告（R. C. Davideson, Frontiers in High - Energy - Density Physics: the X - Games of Contemporary Science, National Academies Press, 2002），全面阐述了这个崭新领域的意义、组成和方向。我国学者于 2005 年 3 月举行了第 246 次香山科学会议，专门研讨高能量密度物理领域的发展；并从 2009 年起，开展了每年一次的全国高能量密度会议的系列学术活动。

本书是 Springer 出版社出版的国际"冲击波与高压现象"丛书之一，是目前仅有的较全面论述高能量密度物理基础和应用的专著，是美国密执安大学大气海洋和空间科学系教授 R. P. Drake 在其多年研究生教材的基础上撰写而成的。Drake 教授于 1979 年在 John Hopkins 大学取得博士学位，长期参加利弗莫尔国家实验室（LLNL）聚变研究计划，擅长激光与等离子体相互作用，1989 年—1996 年任该实验室等离子体研究所所长。其间，1989 年—1993 年任加州大学 Davis 分校教授，1996 年到密执安大学任教后专门从事实验室天体物理的研究。

本书第 1 章 ~ 第 7 章属于流体动力学和辐射流体力学基础，然而阐述角度独特，内容与一般教材不同，使从流体力学或者从等离子体物理进入高能量密度物理研究的读者都会受益匪浅。第 8 章介绍利用高功率激光设施和 Z 箍缩内爆装置得到高能量密度稠密等离子体

的原理和技术,叙述简明扼要。最后三章分别论述以高能量密度物理作为基础的三个主要研究领域或学科,即惯性约束聚变、实验室天体物理和激光强场物理(相对论高能量密度系统),想要更好掌握这些知识的读者还应进一步学习有关的专著。

上海激光等离子体研究所孙今人、方智恒、安红海、孟祥富、王铁文等为本书译稿的打印付出了辛勤劳动。中国工程物理研究院流体物理研究所陈军、姬广富大力支持,译稿全文并经该所赵剑衡、胡流森悉心校对。译者谨向他们致以衷心的谢意。本书概念新颖、内容艰深,译文疏漏和不当之处希望读者不吝赐教。

中国工程院院士
上海激光等离子体研究所　孙承纬
中国工程物理研究院流体物理研究所

2012 年 3 月

原 书 序

本书有两个目标:一是为高能量密度物理入门者提供一种手段,以便从一本教材中获取宽广的基础知识;二是为这个领域的研究者提供一本有用的工作参考书。

从学术角度来说,本书至少有四种可能的用途。首先,它可以作为高能量密度物理的学习教材,支持日益增多的进入该领域的大学和实验研究单位开展工作。其次,侧重于发展超快激光技术的学校可以通过本书初步了解、使用高功率激光器,并且了解在第 11 章关于相对论系统所涉及的范围内各种激光打靶实验中出现的现象。再者,本书可以作为大学物理系、应用物理系或工程系相关课程的教材,提供用途明显的流体力学和辐射输运的简要基础。最后,对于大学的天体物理系也可用于类似目的,同时还可以使学生们了解到实验室系统与天体物理系统之间的类似性和差异。

本书有意采用较少的记号,并尽可能使得一个符号只有一种意义。所使用主要符号的定义列于附录 A。在不同场合,添加角标以区分不同情况下的同一个物理量,例如,用 ρ_1 和 ρ_2 区别两个不同区域中的质量密度。为了减少所用符号的总数,并且使它们用途专一,本书特意避免各种通常的用法。例如,避免把 μ 用作黏性系数,改以乘积 $\rho\nu$ 来表示黏性,这里 ν 是运动黏性系数。

本书中许多练习题只能使用数学计算程序求解。虽然现在和以后还有一些可资利用的这类程序,但作者倾向于使用"Mathematica"数学计算软件,这是本书写作时采用的主要工具。作为有效工具的计算程序的出现,体现了与传统学习模式的分离,而且必将是未来科学家标准工具箱中的重要部分。数学计算程序使得问题"简单"解的意义发生巨大改变,例如,8 阶多项式方程不再是很难对付的问题。附录 B 包括书中讨论的两个问题的 Mathematica 计算编码,用以帮助读者在这方面的起步。

下面谈谈单位的使用,从广泛的意义来说,单位制是科学的公共语言。然而,普遍的情况尤其是各种高能量密度系统不便于在任何单一标准单位制的子系统内来分析。SI 制、cgs 制或者其他单位制,即使对于一定的问题用起来最为方便,也还要有一些其他的专门单位作补充,如电子伏特(eV),这些单位制的存在自有其原因。这些特殊的单位是从事实际工作科学家的重要工具,可以使他们轻松地在不同单位制之间转换。现在的学术文献,大部分确实是以科学家使用的常用单位作为表达,因为它们用起来比较方便。但是在检查人们的推导过程等情形中,经常需要进行单位变换,此时不同单位制之间的比较十分重要。

本书作者坚决反对单一地使用 SI 单位制,即反对不许使用任何非 SI 制的单位,并且坚决提倡在个人的所有工作中规定他自己使用的单位体系。只要情况许可,本书中的方程组都尽量以与物理量单位无关的方式表示。如果办不到(如洛伦兹力)则指出其单位,通常采用 cgs 制单位,它们对于大多数等离子体应用问题而言最为方便。当给出具体的方程组时,通常也指明其相应的单位。这就是本书作者的做法,谨请读者指出其不确之处。最后指出,

Jackson 的专著“Classical Electrodynamics”(经典电动力学)中关于单位的附录,是对于这个论题极好的参考材料。

本书大部分篇章附有不多的参考文献目录,大多是已出版的书籍,它们对一定问题的陈述要比本书能做到的更为详尽。所引用的期刊文献,只涉及尚无相关书籍包括的内容,因此并不反映该领域中期刊文献工作的全貌。采取这种做法是基于如下一些理由:

目的之一在于提供一本多年之内依然有用的专著,而存档文献的变化很快,当前正是高能量密度物理和天体物理学快速发展的年代,任何现时的文献很快就会过时。另外,目前书刊数据库的即时检索技术已经成熟,未来的读者将能够轻易地在当时的存档文献中找到最新的文献。

目的之二是以通常方式陈述专业基础知识,因为在作者看来这些内容作为教学使用最为有效。如果一本专业书籍的内容与已发表的文献联系过紧,可能会变得不连贯和缺少条理。

目的之三是展现本书内容在物理学家认识中的“简单性”。物理现象有意义的全部画面,是从一些简单的开始方程组起源并一直向前发展演变。按照物理学家费因曼(R. Feynman)的精神,人们不必经过清晰的思考就能够理解许多物理现象,虽然我们应当再加上一点,即理解一些非线性问题时,数学计算程序还是很有帮助的。本书第 3 章和第 8 章的写作与作者上述目的有较大偏离,为了避免拖得过长的讲述,只好不做很多解释而勉强读者去接受一些具体的内容。

全书用一些图形表示计算机模拟的结果,显示流体力学和辐射流体力学现象。除非另作说明以外,这些数值模拟都是用 Jon Larsen 设计的计算编码 HYADES 进行的,本书写作时该编码文本由 Cascade Sciences 公司提供。还有一些类似的工具,对于估算可能的实验结果以及鉴别人们感兴趣的具体物理系统中最重要的物理机制,很有用处。

许多人对本书的编写做出了贡献,如何表达对他们的感谢颇使作者为难。对于本书致谢中遗漏的人士,请向作者指出,至少应当请您吃顿饭。还要感谢我的家庭和现在的研究组,是他们允许我利用很多时间来写这本书。Dmirtri Ryutov 是我多年来极其重要的合作者,他一直启发、指导和鼓励本书的写作,并且审阅了其中的两章。Alexander Velikovich 也审阅了两章,而且抽出时间同我多次愉快交谈,显著地拓宽了我对于一些问题的理解。Harry Robey 提出了对于流体动力学不稳定性很有价值的看法,并发现了写作中一个重要的错误。Robert Kauffman 和 David Montgomery 提供了许多特别有用的图形。Enam Chowdhury 提供渠道,慷慨地允许我使用他的一些工作结果。Michael Des Jarlais, Warren Mori, Mordecai Rosen, Mark Hermann, James Knauer, Riccardo Betti 和 Bedros Afeyan 花费时间评阅了本书,或者对一些内容做了讨论。Farhat Beg 和 William Kruer 依据本书手稿进行了教学。Ralph Schneider 给予我持久的鼓励。

密执安大学 2003 年度和 2005 年度有关讲座的学生们以及 2004 年暑期讲习班的 28 个参加者都听了这门课程,学生人数众多无法一一列举。他们帮助我找出了书中一些错误,并且提出许多改进意见。我现在的研究生 Amy Reighard, Carolyn Kuranz, Eric Harding 和 Tony Visco 在给予我持续激励的同时,还承担了书稿繁重的具体事务。Korbie Dannenberg 除了承

担一些例题工作外，还在我暂停写作离开时继续保持这个团队的工作向前推进。Jan Beltran从行政上对暑期班和本书写作都给予了广泛的支持，对此我十分感谢。当然，本书存在的错误只是我一个人的责任。

除了上述团队之外，过去20多年中我还有幸与很多科学家、工程师和技术人员团体进行合作。其中，上面没有提及的关键人物有Dave Arnett，Jim Asay，Hector Baldis，Steve Batha，Bruno Bauer，Serge Bouquet，Jim Carroll，John DeGroot，Kent Estabrook，Adam Frank，Gail Glendinning，Martin Goldman，Tudor Johnston，Jave Kane，Paul Keiter，Alexei Khokhlov，Marcus Knudson，Barbara Lasinski，Sergey Lebedev，Dick McCray，Tom Mehlhorn，Aaron Miles，Steve Obenschain，Ted Perry，Diana Schroen，Wolf Seka，Bob Turner，David Villeneuve，Russell Wallace，Bob Watt，James Weaver 和 Ed Williams，还有许多未提及的人们。作者还要感谢来自Springer出版社的本书编辑Chris Caron博士的积极互动和鼓励。

我喜欢坐在咖啡店里工作。恰巧在本书写作早期，我喜爱的Espresso Royale在离我家很近的普里茅斯路上开设了一家分店。我常常坐在这家咖啡店的桌子旁写作、编校和推导公式，为此我要感谢Sarah小姐和该店所有工作人员的款待。

最后还要感谢两位先生，没有他们本书就不会推出。一位是E. Michael Campbell，正是在为使惯性约束聚变成功所需的科学研究得不到支持的困难时期，他劝说我进入这个领域；而当这种科研获得支持时他又帮助我继续前进；另一位是Bruce A. Remington，他指导我在天体物理研究中跨越地应用高能量密度的方法，当时这是一个全新的思想，从此以后他一直是我宝贵的合作者。谨向他们两位致谢。

R. Paul Drake

2005年12月于美国密执安州安阿伯市

目　录

第 1 章　高能量密度物理导论

本书关注具有高能量密度系统的物理学。“高能量密度系统”一词，是指压力在 10^6atm 以上的系统。这样的压力单位可以写为 1 Mbar，或者 10^{11}Pa、10^{11}J/m^3、10^{12}dyn/cm^2 和 10^{12} erg/cm^3。我们倾向于用 Mbar(即 100GPa)为单位表示压力，因为在相关文献中使用这种单位最为普遍。高能量密度系统的这种表征，是在美国国家科学院(NRC)的一份题为“高能量密度物理领域：当代科学的交叉发展策略”(Frontiers in High - Energy - Density Physics: the X - games of Contemporary Science)中提出来的。这个报告反映了若干实验观察事实，例如，我们在学校学习到固体和流体是“不可压缩”的，但严格说来这并不正确，如果把 100 GPa 的压力作用于通常的固态物体，该物体就会受到压缩。高能量密度这种表征的另一种说法是，一个氢分子的内能密度大约相当于 100GPa。

对这种表征再深入思考一下，就可以认识到把粒子集合在一起的能量(无论其形式是作用压力或者键能)，一旦达到分子和原子之间内能的量级，它们的性态将更像离子和电子，而不大像中性粒子。金属具有传导电子的事实，实际上可看作这类现象的起始。更高压力下(或者更低密度下，此时 100 GPa 的压力对应于更高的温度)，物质必将成为电离介质。电离介质也是一种等离子体，然而传统的等离子体理论只适用于电离气体。在本书第 2 章中将看到，这种高能量密度物理状态几乎不能用传统的等离子体理论来描述。因此，高能量密度系统的另一种表征是：非常稠密以至于传统等离子体理论无法描述的等离子体，第 3 章中将探讨这种表征的涵义。第 8 章中讨论如何产生这种高能量密度稠密等离子体的途径。读者可能想早些了解这些途径，然而为了介绍第 8 章中更深入的可以理解的内容，第 3 章至第 7 章中所研讨的概念确实至关重要。

第 8 章讨论如何创建高能量密度状态条件，例如，可以向通常物体中传入冲击波，使之成为高能量密度物体，这样的冲击波速度应在 10km/s 以上。同样压力下，物体密度降低、冲击波速度增高，以至于高能量密度物理研究中常见到 100km/s(36 万 km/h)以上速度的冲击波。作为其他的途径，可以发出很强的光子束、电子束或离子束，贯穿物体直接对其加热。

高能量密度物理的研究范围并不限于上面所述的稠密等离子体状态，还包括很低密度物体中由于很高温度造成的压力超过 100 GPa 的状态。例如，通常大气密度约为1mg/cm^3，在 10 keV 以上温度下，这样密度空气中的压力达到 100 GPa 左右。本书采用电子伏特的能量单位表示温度，波耳兹曼常数即是 1.6×10^{-12}erg/eV，或者 1.6×10^{-19}J/eV。10 keV 的温度大约为 10^8K，所以在高能量密度物理研究中数百万摄氏度甚至更高的温度是很平常的。当物体的密度进一步降低，其压力超过 100 GPa 的状态将是相对论性的，也已处在传统等离子体理论考虑范围之外。总之，高能量密度系统与传统等离子体以及凝聚态物质系统共同的地方，即集体效应是它们行为的主要方面。高能量密度物理与传统等离子体物理的差别，

在于其粒子之间更加关联,需要考虑相对论效应,或者两者都具备。其与传统凝聚态物理的差别,在于电离和库仑相互作用十分重要。

本书是作为高能量密度物理领域第一本教科书而写作的(本章后面叙述该领域中早先工作的情况),反映了在一定意义下高能量密度物理已成为一个新研究领域的事实。我们可以看到,上面所述各种高能量密度状态带来了超出当前物理学已知范围的挑战,然而人们还会疑惑:在什么意义下这是一个新领域?为什么这是一个新领域?如同凝聚态物理和其他学科那样,本书讨论的内容整个地建立在19世纪中叶至20世纪中叶发展起来的经典和近代物理学的基础之上。另外,本书的许多内容已在很多高深的专业书籍中作了更深入的讨论。高能量密度物理称作一个新领域的基本涵意是:采用了新的研究工具,新工具是新科学领域的根源。对于学院和实验室的科学家来说,当前实际要做的是进行实验,研究在重要参数范围内高能量密度系统的基本行为。这就提出了一个需求,把已有的许多材料处理整合为一本从高能量密度物理相关基础、展开到其主要应用问题的专著,其内容陈述方式普遍适合于研究生课程以及新科研人员参考使用,而且适合于扩展到当前(或者不久之后)可达到的高能量密度状态的学术探讨。高能量密度已作为一个特别的研究领域而出现,随之产生了这本书。

1.1 若干历史注记

我们考察催生高能量密度物理的新研究工具,观察一些先驱性的工作。20世纪30年代粒子加速器的发展,开辟了把大量粒子聚集于很小面积的实验工作。40年代核武器的出现产生了高能量密度的条件,但是这并不是一条可以进行系统性研究的途径。50年代命运不佳的Z箍缩技术开始发展,目标在于可用于电力生产的受控热核聚变。这项技术起初打算通过平行电流通道之间的收缩,使物体逐步压缩和加热。50年代后期和60年代期间人们发明并发展了激光技术,已经能够研制功率较高的脉冲激光器。上面这些工作奠定了相关技术后续发展的基础。我们在这里概述这些技术,并不是要做一个系统性的历史详述,只是企图指出关键技术发展的流程。

20世纪60年代中期之前,激光技术能否用来产生受控热核聚变的问题已明显提出来了。实现激光聚变的设想是,瞬间形成点火燃烧的聚变燃料颗粒,仅仅依靠惯性保持其在该瞬间不散开。Atzeni和Meyer-ter-Vehn的书中详述了激光聚变技术发展的奠基阶段,其中一些项目曾属于保密的研究计划,因而有很多做出关键贡献的人员未能提及。在巴索夫领导下,苏联也开展了激光聚变研究工作。1972年Nuckolls、Lowell和Wood发表了论证激光聚变途径是否可行的关键性文章,由此在美国、苏联、欧洲和日本都开始了现在称为**惯性约束聚变**(Inertial Confinement Fusion, ICF)的激光聚变探索计划。

John Emmett是这条ICF途径所需激光器技术发展中的关键人物,他领导劳伦斯利弗莫尔国家实验室(LLNL)的这项计划,首先研制成功能够在1 ns时间内发出1 kJ以上能量光束的激光器。20世纪70年代后期,好几个国家的激光器都能发射宽度1 ns量级、能量数千焦的激光脉冲,聚焦于1mm^3或更小的体积之中。100GPa的压力只相当于$100\text{J}/\text{mm}^3$的能

量密度，因此这些实验系统都能创建高能量密度的条件。同一时期，被称为脉冲功率发生器的装置已能放出 1MA 以上的强电流。发展这类设施的动机，也在于它们具有应用于惯性约束聚变的潜力，在美国这项工作由圣地亚国家实验室（SNL）承担，起初的打算是利用这些设施产生粒子束以实现惯性约束聚变，但是到头来他们做出了使 Z 箍缩研究发生重大转变的贡献（详见后述）。作为大能量源的一些其他激光器也得到了发展，包括洛斯阿拉莫斯国家实验室（LANL）的 CO_2 激光器和苏联的碘激光器，它们没有达到能够使用于聚变研究的目的，但是在一定意义上鼓励了 KrF 激光器的发展，并在美国海军研究实验室（NRL）继续得到推进。在本书写作期间，这种激光器也是用于通过聚变产生电力的候选者。

上述各种工具都能够创建高能量密度系统，但并不是都可用来进行系统性研究的途径。20 世纪 70 年代期间，有些研究项目和计划开始进行高能量密度方面系统性的基础科学研究，特别是欧洲和美国海军研究实验室的工作。人们能够找到一系列可供参考的期刊论文，并通过所有参与者的工作追踪高能量密度科学的发展过程，但这样的了解或许仍过于粗糙。这方面的工作受阻于以前实验技术和诊断技术硬件的不足，而且还受到当时一种倾向的妨碍，即只关注聚变的目标而忽视其基础性的研究。作为一个极端的例子，80 年代中期建造完工的 Nova 激光器项目的负责人有一次告诉本书作者：为了实现惯性约束聚变，Nova 激光器的诊断系统只需要一个中子探测器即可。这种认识距离真实情况相差太远。在 Nova 激光器能够实现把氘氚（DT）聚变燃料压缩到 1000 倍液体密度之前（无疑这将是一个显著的成就），除了对主要设施进行重要改进，很多地方还需要添加各种实验和诊断设备。

与此同时，在美国和世界范围内实验技术不断进步，多年以来低能量激光器已被用于提供诊断光束，这个方向将继续发展下去。现在各式各样的高能激光束开始应用于若干不同的目的，有些激光束打在靶上能够产生所冀求的物质状态（系统），另外一些激光束又可能应用于在这样的系统中驱动某些过程或者产生所需要的状况，还有一些激光束被用来作测量诊断，通常是产生 X 射线并测量其在靶区中的透射和散射。这就要求所有这些激光束都可以独立定时和控制，这件事说起来很容易，但是整个设施要增加很大的附加成本，而且变得十分复杂。到了 20 世纪 80 年代，人们实现和演示了所能提供的先进仪器设备，它们能够在亚纳秒尺度上记录数据，包括用图像和谱线记录的瞬态照片及变化历程。把这些成绩仅仅归功于那个年代也许不太公正，在此前后的年代中测量诊断技术都在发展，然而在我看来只是到了 80 年代期间，用激光进行高能量密度物理实验才成为实际可行。推动这类实验的部分原因是，对于惯性约束聚变物理原理研究的关注日益增强。世界上许多研究人员都对这个蓬勃发展的焦点问题做出了贡献，其中有一个人对于这个最大的研究计划给予了最强的影响，这就是劳伦斯利弗莫尔国家实验室中一位年轻的课题负责人 Michael Campbell。

20 世纪 80 年代人们还见到了本书第 8 章中描述的、由 Gerard Morou 发明的啁啾激光脉冲放大器，它使得激光束在靶上的辐照度达到 $10^{18}\,W/cm^2$ 以上，开始能够产生相对论效应。这样的系统产生很短的激光脉冲，宽度一般在 1 ps 以下，被称为超快激光器。它们提供了可用于探索高能量密度物理的低密度、相对论状态的工具。

到了 20 世纪 90 年代，由于金属丝阵 Z 箍缩技术的进展，高能量密度物理研究可用的实验工具继续得到扩充。自 70 年代后期以来，人们一直在探索一种被称为快速 Z 箍缩的可用

于聚变实验的改进技术。快速 Z 箍缩可以避免导致 50 年代 Z 箍缩研究失败的磁流体力学不稳定性，改为采用使丝阵物质向内短暂加速的箍缩内爆方法，当这些内爆物质在轴线上碰撞滞止时它们的动能就转化为内能。人们希望这种技术可以提供实现聚变的另一条途径。不论这种方法是否管用，它所产生的箍缩等离子体总归是一种高效的强辐射源。当几百根金属细丝中通过很强电流时，所形成的 Z 箍缩内爆等离子体能够在数立方厘米体积中产生数兆焦的辐射能量。将在第 8 章中深入讨论的这种技术的进展，为高能量密度物理研究提供了另一种环境。在新旧世纪交替的年代里，Z 箍缩技术确实带动了相关研究的蓬勃发展。

粒子加速器技术同时也在继续发展，这首先是由粒子物理学本身的需求所推动的。20 世纪 90 年代之前，这些加速器已能产生处于高能量密度状态的大量相对论粒子的集合体，离子束和电子束都能创建高能量密度条件。斯坦福大学的直线加速器（SLAC）就是一个例子，它可用来产生能量 50 GeV、数量为 10^{10} 量级、脉宽 5 ps 的电子团簇。该团簇若聚焦于 3μm 直径的靶斑，其辐照度可达到 10^{20} W/cm^2。每个脉冲给予靶面的能量为 150 J，脉冲串的频率超过 100 Hz。这样的电子团簇本身就是一种高能量密度的介质，能够引发与所选定物质的相互作用。

上述所有进展提供了一类研究高能量密度物理自身问题的环境。至今，世界各国研究人员才可能谈及物质的性质、动力学结构和不稳定性的发展、辐射的性质和输运、辐射对物质动力学行为的影响，以及这些状态中的相对论现象。这些问题的基础就是本书第 2 章～第 7 章和第 11 章中讨论的内容，研究人员可以应用这些知识发现惯性约束聚变的新途径（见第 9 章），学习研究天体物理学所需的事物（见第 10 章），以及研发从改进型光刻系统到新颖医学治疗方法这么大范围内的技术。在转向这些工作之前，本章下面还要进一步概述各种高能量密度物理状态，及其在聚变技术和天体物理学中的应用。

1.2 高能量密度物理的各种状态

上面提到的美国国家科学院报告中有一张图，概括了各种高能量密度状态的参数。把这张图改画成为图 1.1，其优点是讨论范围宽广，指明了本书中许多工作的途径。该图的水平轴表示密度（下轴是氢的质量密度，上轴是粒子数密度），垂直轴表示温度（左轴是 K，右轴是 eV）。这两个坐标轴都是对数刻度，密度轴跨越了 23 个量级，温度轴的跨度大于 9 个量级。图中画出一些边界线和曲线，作出这些线时都假定物质与辐射近似处于平衡状态。下面运用我们的方法研究该图，看看它能告诉我们什么。

从图 1.1 的左边开始，沿温度轴上行遇到的第一条曲线是电离与未电离物质的分界线。一旦温度达到约 1eV，将会发生一些电离。密度增大，电离所需的温度增高，反映能够与离子复合的电子的密度升高了。在密度趋近 1g/cm^3 处，上述分界线翻转朝下。因此在足够高的密度之下，物体可以在任何温度下发生电离，其原因将在第 3 章中讨论。这种现象称为压致电离。

沿着左面的纵轴继续上行，可看到两条分别标注“总压力 = 100GPa”和“总压力 = 100TPa”的水平线，它们的纵坐标是产生相应压力的平衡辐射场的温度。在这些线的上方，

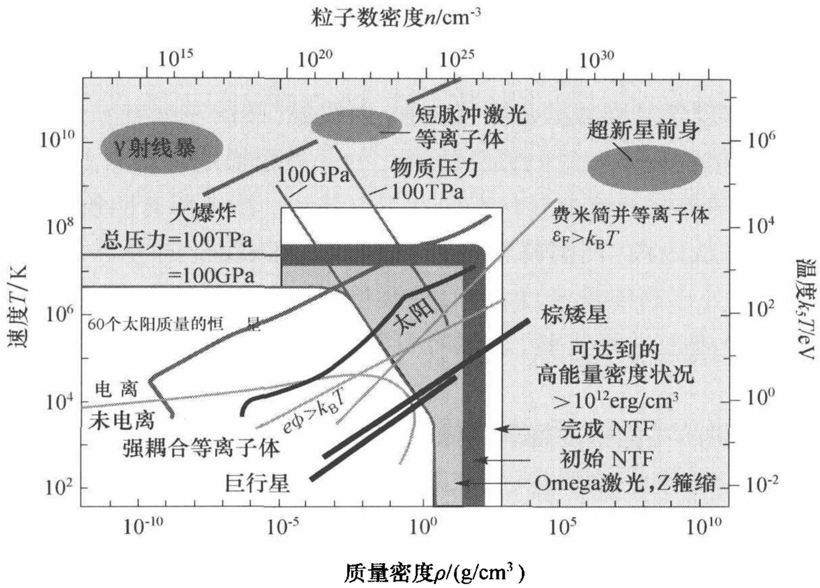


图 1.1　高能量密度物理的各种状态(根据美国国家科学院报告“高能量密度物理领域:当代科学交叉发展的策略”中的图改画)

如果系统处于平衡态,则等离子体是辐射主导的。密度相当低的等离子体大约在 1keV 温度处才成为辐射主导。将在第 3 章中介绍辐射主导的等离子体,并在第 6、7 章中进行更加深入的讨论。沿着这两条水平线右行,可看到它们逐渐朝下倾斜,这种情况意味着物体的热压力变得相当于辐射压力,然后超过辐射压力。例如,密度 1 g /cm^3、温度 1eV 处的热压力约为 100GPa;而在密度稍高于 1 g /cm^3 处,标注“物质压力 = 100GPa”的斜曲线急转垂直向下,转折处表示电子费米压力超过 100GPa 的物质密度。第 3 章中将讨论这种被称为费米子的电子的性质,它们对于第 9 章中讨论的惯性约束聚变很重要。沿着标注“物质压力 = 100TPa”的斜曲线右行,将在更高一些的密度处转折垂直向下。

该图中部有两条灰色曲线相交,一条标注强耦合等离子体“$e\phi > k_BT$”,另一条标注费米简并等离子体“$\varepsilon_F > k_BT$”。在第一条线的右方,库仑相互作用的能量超过热能,这样的等离子体通常称为强耦合等离子体。第 3 章中将研究其性质,并发展一种描述处于 21 世纪初才能研究的状况下的强耦合等离子体行为的方法。我们将看到,传统等离子体理论有效区域的边界位于这条线的左上方。第二条曲线右面的区域中费米能超过热能,这样的等离子体通常称为**费米简并**的。这种情形与前面讨论的等压力线的垂直段明显有关,费米简并等离子体的性质也将在第 3 章中考虑。

图 1.1 中表示了一些实验室中和天体物理学中使用的基准数据范围。在其中心部位可看到 21 世纪初美国几个主要实验设施能够达到的参数范围,包括罗彻斯特大学的 Omega 激光器,圣地亚国家实验室最大的 Z 箍缩机器,以及劳伦斯利弗莫尔国家实验室的国家点火设施(National Ignition Facility, NIF)。这个核心区域的状态参数范围是:离子密度 10^{19}/cm^3 ~ 10^{24}/cm^3, 温度 10^0eV ~ 10^3eV,特别值得我们注意。该区域上方表示的等离子体可以用 1.1 节中提及的超快激光产生,它们是非平衡的,但是在下述两个意义上能够达到兆电子

伏特的温度：一是它们产生的粒子束具有能量尺度为兆电子伏特的指数分布；二是它们产生的电子以兆电子伏特的动能振荡。

图 1.1 的天体物理学基准数据范围，包括 γ 射线暴（图的左上方）、超新星前身（图的右上方）和表示若干天体物理系统时间或空间演化的几条粗黑线。图右上部还有一条表示大爆炸演化的粗黑线，随着时间流逝其状态向左下方移动。图中部有四条曲线，表明不同的恒星和行星中物质状态从内核（高温高密度，向右上方）到表面（向左下方）的变化。还可看到，这些天体的内核处于高能量密度状态，棕矮星和巨行星含有强耦合的费米简并等离子体。在高能量密度设施上进行实验，显然有可能得到关于这些天体物理客体内部情况的知识。

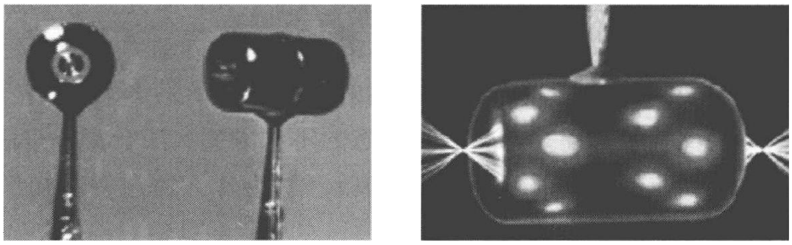
然而，图 1.1 提供的高能密度物理图像并不完全，这里只考虑了平衡状态，忽略了动力学过程，诸如冲击波、辐射波、物质烧蚀、辐射冷却和流体动力学不稳定性等现象没有包括在内。第 4、5、7 章的大部分内容与这些动力学过程有关。对于创建物质的高能量密度状况（第 8 章）、实现惯性约束聚变（第 9 章）以及对天体物理学现象进行实验室模拟（第 10 章），动力学过程都是至关重要的。我们无法作出简单的图形，把上述这些高能量密度状态全部都包括进去，但可以在作具体论述之前，先扼要介绍惯性约束聚变和实验室天体物理学的概况。

1.3 惯性约束聚变简述

1.1 节中已经指出，惯性约束聚变（ICF）是推动高能量密度物理科学技术取得很多进展的需求牵引。第 9 章将从基础开始讨论 ICF。轻元素聚合成为较重元素时释放能量，因此 ICF 能够产生净能量增益。发生聚变要求很高的温度，以克服轻核之间的库仑排斥力，聚变释放的能量还可用来维持高温条件。这很像普通的燃烧现象，在一定条件下可以称为聚变燃料的点火和燃烧。ICF 系统的能量增益提高，其应用就能扩展，这里能量增益是指 ICF 产生的中子（或 X 射线）的能量与实现 ICF 所消耗电能之比。即使在中等增益下（量级为 1），ICF 也将产生大量中子以及（或者）X 射线，可用于未来的研究工作。量级为 10 的高增益下，ICF 过程产生的中子可用来为核裂变电站增殖燃料；量级为 100 的相当高增益下，ICF 可以直接成为电站的能源。

与一般内燃机的循环相仿，ICF 电站的运行也是周期性循环的。虽然作者并不明确这种类比是谁提出的，让我们按照自己的思路，沿着 ICF 电站的循环去探讨其原理。这种循环从往电站反应器腔中注入 ICF 靶丸开始，类似于向发动机汽缸中注入燃料。靶丸是一种专门设计的结构，当用特殊的方法向其注入一定能量时即产生聚变能量。靶丸结构包括一个内有聚变燃料的小囊（大概是氘氚（DT）燃料，形状很像圆球形），外面包覆被称为烧蚀层的物质，还可能具有专门设计为聚变反应所需的其他结构。图 1.2（a）是一种靶丸的示例，其中的球形物是聚变小囊，其外围的圆柱壳结构称为黑腔（详见第 8 章和下面的论述）。该图中靶丸安装在一个玻璃架上，在电站里则需将靶丸投放到指定的位置，并可能依靠旋转保持其定向。

内燃机中注入燃料以后的阶段,通常是由活塞运动进行对燃料的压缩,与此同时向燃料提供能量。ICF 中也存在这样的阶段,但是过程更为复杂。这里首先是以设定的空间分布和均匀性向靶丸输送能量,在 ICF 的专业术语中把实现此功能的器件称为“驱动器”,它们可以是强激光束或粒子束,甚至是想象中的强光子源。驱动靶丸的方式可以是直接辐照(称为“**直接驱动**”)或者间接辐照(称为“**间接驱动**”),举例来说,间接驱动的实现可采用把驱动器的能量转换为其他形式能量(如软 X 射线光子)的方法。图 1.2(a)表示黑腔能把激光束转变为 X 射线,从而创建一个温度高达约 2×10^6℃(200eV)的 X 射线辐射环境。图1.2(b)是一个薄壁黑腔,可以看到各个激光束打到黑腔内壁上的许多斑点,这是间接辐照的例子。



(a)　　(b)

图 1.2　惯性约束聚变靶的结构(该图由劳伦斯利弗莫尔国家实验室(LLNL)提供)
(a) 内有聚变小囊的黑腔靶;(b) 薄壁黑腔受到激光照射的图像,
斑点是各激光束入射于内壁之处。

传递至烧蚀层的激光束使包覆物质烧蚀飞散(由此得到烧蚀层的名称),但是这并不是一个单纯消耗的消极过程,激光能量使得烧蚀产物温度达到上百万摄氏度,压力达到约 1 亿 atm 的量级。烧蚀层表面的高温、高压产物以高速度向外喷射,其反作用力驱使余下的烧蚀层和燃料向内加速。这种情况类似于火箭的推进,所以有时也把 ICF 小囊形容为“球形火箭”。显然,小囊外壳朝内运动将压缩燃料,从而完成了整个循环中的压缩阶段。聚变燃料的压缩强度远高于内燃机中碳氢燃料的情形,其最终密度可达到液态氘氚的 1000 倍至几千倍。

在内燃机和 ICF 中循环的下一阶段都是点火,其方式可以是自发点火(如柴油发动机),或者是火花塞点火(如汽油发动机),对于 ICF 这两条途径在原理上都是可能的。一方面,可以把靶设计成当外面燃料的内聚运动滞止时,处于内爆靶丸中心的燃料被强力压缩而点火,这条途径称为中心热点点火;另一方面,可以在燃料被压缩之后利用一个外能源使它点火,这条途径称为快点火。本书写作时还不清楚哪一条途径首先将被证实是最有成效的,或者长远看来可能是最现实的。聚变燃料的点火以及随后的燃烧,释放出大量能量,完成了循环的这一阶段。

循环的下一阶段是能量的提取。在内燃机中炽热的产物气体膨胀,推动活塞做功传出能量。然而在 ICF 电站中这个过程复杂得多,无论中子还是 X 射线或者高能粒子,都不能有效地推动固态物体,它们将贯穿物体而不是起推动作用,因此只能采用另外一些方法把聚变释放的能量提取出来。如果 ICF 使用氘氚燃料,释放的大部分能量将以中子动能的形式

出现，现在所知道的提取中子能量的唯一方法就是利用它们加热体积很大的物质，然后再用被加热的物质去加热水，驱动蒸汽的循环，即通过蒸汽驱动大型蒸汽轮机取出能量。这条途径也许并不是电力生产的经济方法。蒸汽循环实际的效率不高，因此希望最终能够采用只产生和输出带电粒子的聚变燃料，这样的途径更加符合人们的需求，具有直接高效率提取能量的潜在可能。在没有更新的物理知识的情况下，科幻小说中可驱动许多宇宙飞船的小型聚变电站，只有使用此类先进的聚变燃料才有可能。

我们的注意力转向高能量密度物理。ICF 过程的许多环节若要成功，必须依靠这门物理学。这些环节包括驱动靶丸的能量的产生，把该能量传递到烧蚀层，靶壳层的内爆过程，点火之前聚变燃料的终态性质，以及快点火的各种方法。ICF 研究需要了解高能量密度物质的性质（第 3 章），冲击波的产生及相关作用（第 4 章），流体动力学不稳定性造成的限制（第 5 章），靶丸内辐射的输运（第 6 章），以及辐射对物质运动的影响（第 7 章）。此外，ICF 不同的基本技术途径反映了构建高能量密度状态的不同方案（第 8 章）。因此也就明白，为什么高能量密度物理学科催生出了 ICF 技术及其设施，为什么这门物理知识对于企图深入了解 ICF 的人们十分重要。

1.4 实验天体物理学简述

前面已经指出：新的科学来自新的工具，又一个更加特别的例子就是高能量密度实验天体物理学的出现。可以说，人类的大脑是天文学起源的工具，Adam Frank 曾经觉察到光谱仪也许是天体物理学起源的工具。同样意义下，在实验室里进行高能量密度物理研究的能力造就了这门实验天体物理学分支。Remington、Drake 和 Ryutov 评述了这个领域中直到 2004 年的工作，提出了一些总结性的意见。贯穿全书我们给出有关的各种例子。第 10 章中将讨论设计这类实验时必然遇到的缩比问题，即从天体物理系统到实验室系统主要物理量的尺度比例问题。

从图 1.1 中可以看出，高能量密度物理明显具有为天体物理学作贡献的潜力。该图使我们关注于测量有关物质物态方程的可能性，即对天体物理学有意义物质中压力、密度和温度等参数互相关联的关系。现在还未弄清楚，什么情况下怎样稠密的氢将变为金属态，这个问题对于气态巨行星（如木星）尤为重要。图 1.3 以圆饼切块方式表示该行星圆形横截面的一角，氢的物态方程决定了木星是否必定有一个岩芯。氢的金属化转变的性质制约着木星中的“发电机”怎样产生其磁场。很久以前人们已经认识到这种联系，但是这样的物态方程实验很难进行，需要很高的精度。到了 20 世纪 80 年代，人们采用当时可用的实验工具开始这种测量。那时的实验设备主要是气体炮和轨道炮，它们能把材料圆片加速到很高速度，当它与另一个静止的材料圆片碰撞时就形成了高压力。直到现在，这些炮还不能在液氢样品中产生 100GPa 这样的高压力。由于能够向负载发送 10MA 量级强电流的脉冲功率装置以及能够形成更高压力的强激光器的出现，在 21 世纪之交，人们已能对液氢进行几百万大气压的实验。

物态方程是处于与天体物理学有牵涉的平衡态物质性质的一个例子。另一个例子是物

质对于X射线的不透明度。在恒星和其他炽热稠密天体内部,大部分能量的输运依靠辐射进行,因而对这种辐射的吸收就成为制约这些天体某些性质的因素,况且这种对辐射的吸收常常以各种离子中电子能级的跃迁为主要机制,特别是那些向上跃迁和包含铁离子的情形。20世纪90年代初,人们已开始测量天体物理学感兴趣物质的不透明度,并且把这些测量数据同能够较准确地计算不透明度的新近编码的计算结果进行了比较。

物态方程和不透明度的测量确定了有关物质重要的平衡态性质,带动了图1.1中自然提出的许多研究。日本Hideaki Takabe和美国Bruce Remington各自认识到,可以采用高能量密度物理实验工具探索与天体物理学相关的大尺度动力学,之后引发了实验天体物理学的研究潮流。在这以前,我们立足于地球所了解到的天体物理动力学的知识全都依赖于计算机模拟。这些计算结果可以互相校验,但不是依靠基准实验数据做检验。第10章中将进一步讨论所涉及的一些工作,下面做部分介绍。

在纯流体力学系统中进行适当缩比实验最为直截了当,这里黏性耗散、热传导和辐射都可忽略。这样的方法看起来过于简化而没有价值,其实并非如此。原来许多天体物理系统的行为主要或者全部类似于流体力学系统,这些天体包括超新星、某些超新星遗迹、爆炸波和某些天体物理喷流(射流)。其中有些系统还可能产生湍流,这属于流体力学的基本问题。另外,这些系统中复杂的三维不稳定性和它们之间的相互作用,世纪之交年代里的数值模拟还没有能力予以再现,从而需要进行实验研究。那时人们所做的早期实验,集中于模拟超新星爆发中出现的非稳定现象。图1.4表示这样一个例子,是实验模拟超新星中爆炸波传播行程的结果,第一个界面处的结构影响了第二个界面的演化。这个领域的其他早期实验工作,探索了超新星遗迹中有关过程的模拟、流体动力学天体物理喷流的动力学行为和星云被冲击波击碎的现象。

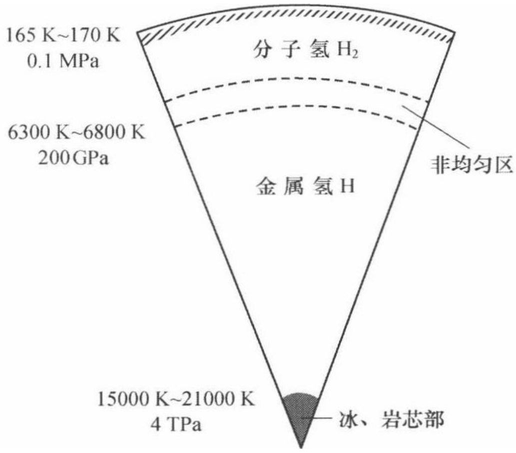


图1.3　木星内部示意图

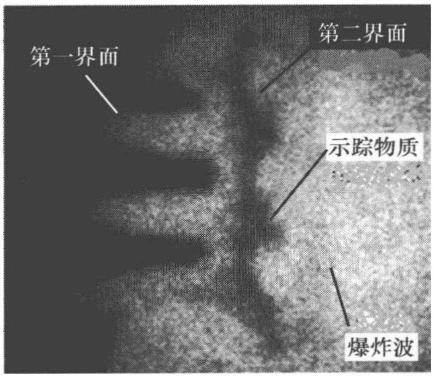


图1.4　爆炸波穿过两个界面时出现的流场结构

第二个界面仅在其后方诊断跟踪器放置处才能看到,由于爆炸波前后反差很小,使其很难被观察到。

一旦能量通过辐射的输运成为物体演化的重要因素,就需要考虑其辐射流体力学的状

况(参见第7章)。与辐射流体力学有关的重要天体物理现象,包括辐射波、辐射冲击波和辐射喷流,更不用说星体内部的现象。虽然人们几乎永远不会具有进行准确缩比实验的能力,作为替代的方法有望按照主要无量纲参数相同的原则进行缩比实验,使得对天体物理学有意义的动力学现象能够在实验室中出现。例如辐射喷流,它有三个关键参数:①内马赫数(喷流速度与喷流中物质声速之比值);② 喷流密度与其周围环境物质密度之比值;③沿喷流长度发生显著冷却的距离与喷流半径之比值。在原理上这种实验可以按照这三个无量纲参数进行缩比,其实验现象应显示出与相应天体物理喷流定性相仿的性态,即使有些细致的过程(如辐射冷却的性质)并不相同。辐射冲击波类似地也有三个关键参数,前两个参数分别是冲击波形成的密度间断面前方和后方区域中辐射的透过率,第三个参数是紧接冲击波后方受压缩物质中产生的辐射能量通量与迎着冲击波阵面而来的物质流能量通量之比值(在冲击波静止的参考系中观察)。原则上,也可依据关键无量纲参数相等的方法确定实验的参数,把这类天体物理现象缩小到实验室中来模拟。

在可以用高能量密度物理实验模拟的天体物理诸过程中,还有一个光致电离等离子体的领域。地球上的大多数等离子体是由电子碰撞电离而产生的,包括在荧光管里、磁化的实验室等离子体中和激光辐照物质时发生的电离现象。这个机制在许多天体物理环境中也是正确的,例如太阳的冕区。然而,在一些天体物理环境中等离子体的主要来源是光致电离,这种机制对于地球上方的部分电离层也是正确的。事实上,自从最初依靠光谱仪研究天体物理客体以来,从非常高能环境中(如中子星和黑洞附近空间)获得的信息就来自光致电离等离子体。如果缺少关于这类等离子体性质的十分基础的知识,就不能指望解释这些数据,例如,回答爱因斯坦的引力理论能否准确描述黑洞的问题。20世纪90年代中期以来,在适当缩比的实验环境中已能够产生光致电离等离子体,并开始测量它们的性质。

最后,天体物理环境往往产生许多相对论效应,这类例子包括强辐射环境中电子-正电子对的产生,高强磁场中原子结构的改变,相对论喷流通过磁场的传播,以及γ射线暴的演化等,这些现象都好像涉及相对论辐射流体力学。本书写作时利用超快激光探索这些现象的实验尚未进行,但看来不久就会开始。

1.5 与以前有关著作的联系

如上所述,在某种意义下高能量密度物理是从历史上一些先驱性工作发展而来的新研究领域。如果聚变研究在某种程度上不那么保密,这个领域也许会更早些出现。然而也许不是这样,因为系统地进行这方面实验研究的能力只是到近年来才具备的。即使如此,历史上在相关领域中(特别是在天体物理学中)已有不少专业书籍,对本书的某些内容进行了深入论述。本节将按照各章的顺序综述这些著作中的主要部分。有两个领域现在仍缺少详尽的专著,这就是实验天体物理学(第10章)和相对论高能量密度物理(第11章),在本书写作时它们还是很新的研究领域。已有一些关于这两个领域的综述文章,但无疑地将很快被其他文章所超越,只能等待到相关材料积累至可以成书的时候。

高能量密度状态下物质的性质(第3章),可以通过对它们的统计力学细致研究论述得

更加全面。虽然不同的文献接近了这个问题的各个方面,但还没有全面完整的著作。很多统计力学书籍讲述了所需的各种基础,朗道(Landau)和栗弗席兹(Lifshitz)的专著《理论物理学教程》第五卷就是很好的例子,但是仍有一些专门性问题没有论及,如电离介质和高能量密度物质研究中提出的问题。Eliezer、Ghatak 和 Hora 合写的物态方程专著考虑了一部分这样的问题,Salzman 关于等离子体光谱学的书也是如此。Zeldovich 和 Raizer、Mihalas 和 Mihalas 的有名专著中,处理这些问题都是基于相当特定的情况。Griem 在其关于等离子体光谱学的书中讲述了若干这样的问题,但不易读懂。

很多教科书包括谢多夫(Sedov)和惠瑟姆(Whitham)等人的有名专著,不同程度上都论述了冲击波和稀疏波的性态(第 4 章),其中与高能量密度物理关系最密切的主要是泽尔道维奇(Zeldovich)和莱依捷尔(Raizer)的书,该书多年来受到人们的推崇。如果有一本书可以说是高能量密度物理领域先驱的话,则非此书莫属。长久以来,它一直是关于高能量密度物理最好的全面性的导论,尽管它在许多方面论述过细,有些方面却又不足(作者希望本书能够予以补足)。还应指出,泽尔道维奇和莱依捷尔的书仍然是仔细学习一维流体动力学以及基于相似解的关键物理问题研究途径的补充选择。

在流体动力学不稳定性(第 5 章)研究领域中,明显处于有关分析前列的是钱德拉塞卡(Chandrasekhar)的书,此书写得全面而又基本,研究了高能量密度系统特别关注的一些问题。遗憾的是,出版于 20 世纪 50 年代的此书未能讨论具有重要意义的可压缩流体动力学不稳定性方面的问题。目前的书籍中几乎也没有这方面的内容,为此必须查阅过去的文献资料。在不可压缩流体动力学湍流的专门领域,Tennekes 和 Lumley 写了一本出色的导论性著作,而 Hinze 的书则是一本论述全面的权威性的大部头著作。

与高能量密度物理有关的辐射输运问题(第 6 章)和辐射流体力学问题(第 7 章),从来不在分开的书中叙述,这里也把它们放在一起讨论。辐射输运领域有很多应用,此类过程对于行星大气层性态、恒星内部情况、高能天体物理事件以及高能量密度实验室系统都有重要意义。钱德拉塞卡还写了一本辐射输运方面的书,泽尔道维奇和莱依捷尔书中这方面的内容,也与本书有关并颇具洞察力。然而毫无疑问与高能量密度物理中辐射输运及辐射流体力学最相关的书是 Mihalas 和 Mihalas 写的书,遗憾的是大家知道这本书很难读,部分原因在于其内容与写作时已发表的文献资料联系得过于紧密。作者冀图本书以教学为重心,能使讲授得以简化,所以只提供一些便于更好理解整个论述的基础知识。本书强调物理实质,其指向是免除大部分人花费大部分时间去考虑辐射输运和辐射流体力学问题,而是去发现和补充可以得出辐射输运实际问题近似解的计算机编码算法。这些做法或许与辐射流体力学有关,或许无关。Mihalas 的书中也有关于这些问题的论述。另外,在 2004 年,Castor 发表了这个领域的权威性著作。

下面转向实验和应用。高能量密度系统的构建涉及若干研究领域,其中有些已有十分详尽的专业书籍,但还有些问题尚无专书论述。虽然已有许多关于激光技术的书,但几乎没有现成的书谈到当激光打到靶上将会发生什么现象,缺少专门讨论这个问题的专著。主要的参考书是 Kruer 写的激光与物质相互作用的教科书。Lieberman 等人关于 Z 箍缩的书有些内容与高能量密度有关,但更多内容与此无关。

惯性约束聚变领域具有更多可利用的资料，这是不足为奇的，因为该领域是推动高能量密度物理发展的主要应用需求。此领域中有两本书值得特别关注。Atzeni 和 Meyer - ter - Vehn 在 2004 年出版的书内容广泛，重点在于 ICF，书中涉及本书讲述的大多数论题，还有许多本书未提及的论题，都是与 ICF 应用及目标有关的内容。该书引用公式甚多，包括很多复杂的参数拟合关系式，但是相关的讨论和解释比较欠缺。所以，此书适合作为专家们的十分有用的工具书。另一本由 Lindl 写的更早一些的书，是在使用黑腔的 ICF 技术解密之后不久出版的，带有较多的工程取向，主要论述用 ICF 技术产生聚变所涉及的具体问题，包括很多有用的细节。该书还引用了许多基于计算机数值模拟研究得到的有用公式。在本书第 8、9 章的一些举例中，比较了基本分析和 Lindl 报告中简化分析的结果。

1.6 变量和符号

本书写作中遇到的困难之一，是如何解决不同学科分支在变量符号用法上的冲突。有些符号往往很通常地被用在不同的意义上，例如，流体力学中总是使用 γ 作为比热比，同时在不稳定性理论中又把它广泛用作增长率的符号，在相对论中这又是洛伦兹因子的符号。本书希望全书中使用前后一致的符号系统，同时又要尽可能地接近它们原来的标准意义，因而只能广泛地引用角标。附录 A 是本书中变量符号以及一些公用物理常数符号的清单，作者试图把出现在不止一节中的所有公用变量和许多有量纲变量都包括进去，但是没有包括那些在书中仅仅单独用于个别推导或个别小节的变量，尤其是那些无量纲变量。本书序言中曾经详细谈过，书中列出的方程式中要么使用显然而且一致的形式，从而适用于任何单位制；要么明确给出其使用的单位。差不多所有情形，所给出的包含温度的方程中总以能量单位表述温度，温度对能量的贡献为 $k_B T$，这里 k_B 为玻耳兹曼常数，T 为温度。

变量和方程的书写方式中以斜体字表示标量，黑体字表示矢量，加下画线的黑体符号表示二阶张量（如 $\underline{\boldsymbol{P}}$），并矢记号写为 $\boldsymbol{uw}$（该张量的 i 行、j 列元素用并矢记号可写为 $uw_{ij} = u_i w_j$）。微分方程中导数都写为分数形式，不采用缩写记号。

第2章　流体与等离子体的描述

不久之前人们可以说，已知的宇宙中99%是等离子体，然而近年来关于暗物质和暗能量的发现意味着这种说法不再正确，但仍可以说容易观察到的宇宙中99%是等离子体。星际介质、恒星和异常紧致的天体都由电离物质组成，或者被其包围。缺少对等离子体的了解，就不能理解宇宙。

同样正确的是，等离子体的知识对于高能量密度物理至关重要。要使数倍固体密度的物质中压力达到100GPa的量级，需要提高其温度达到足以发生电离的程度。因此，在大多数高能量密度系统中，物体都处于等离子体状态。在不同的情况和状态下，这些等离子体的行为可以相像于简单流体、传统等离子体，或者传统等离子体理论范围以外的等离子体。另外，对于利用激光产生高能量密度系统来说，等离子体的性态十分重要（见第8章）。当高能量密度系统的性态明显偏离简单的流体动力学流体时，其主要原因不是等离子体的作用就是辐射的作用。再者，用于描述等离子体的各种模型，其实就是用于描述较简单流体模型的超集合。本章将讨论描述等离子体和流体的各种途径，辐射和辐射效应的描述将在第6章和第11章中进行。

如果读者学习过等离子体物理，则本章的部分内容将是一种复习；如果读者学习过电动力学或者流体力学，但未学过等离子体物理，则本章的另一些内容可以看作复习。另外，本章关注的不是用几页篇幅概括流体动力学和等离子体物理的主要内容，而在于引入本书后面各章需要的一些模型。这里还要假定所有的运动都不是相对论的，相对论运动将在第6章和第11章中考虑。

2.1　多方气体的欧拉方程组

在关于等离子体物理的书籍中，通常从个体粒子的集合开始，讨论如何使用玻耳兹曼方程统计描述它们的行为，并且以构造较简单的等离子体动力学模型的方法对它们的行为进行统计平均。本章采取相反的途径，以在许多高能量密度情况中很有用的十分简单的取平均后的方程组作为起点，进一步发展更复杂的描述，复杂描述的适用范围更广，但往往并不一定必要。根据这种想法，从多方气体的欧拉方程组开始，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\right) = -\nabla p \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.3}$$

式中 $\boldsymbol{u}$、ρ 和 p 分别为气体的粒子速度矢量、密度和压力。式(2.1)是连续性方程,描述质量守恒;式(2.2)是运动方程,描述动量密度的变化;式(2.3)则是能量方程,这里已假定流体是多方气体,即 $p\propto\rho^{\gamma}$,γ 为气体的绝热指数(比热比)。朗道和栗弗希兹指出"多方过程"的术语是历史上提出的,即压力正比于体积的某个负幂次的过程。这也就是满足 $p\propto\rho^{\gamma}$ 的流体或气体称为多方气体,以及 γ 往往被称为**多方指数**的原因。对于完全电离的非相对论气体(处于足够高的温度和相当低的密度之下),$\gamma=5/3$;对于辐射压力为主导的气体,$\gamma=4/3$;对于双原子分子气体,$\gamma=7/5$。2.3 节中将讨论欧拉方程组更普遍的形式,在本书更后面一些章节中(尤其是冲击波部分),把能量方程写成下面讨论的守恒形式很有用处。在这种形式下,能量方程成为(ε 为比内能)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon+\frac{\rho u^{2}}{2}\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{u}\left(\varepsilon+\frac{u^{2}}{2}\right)+p\boldsymbol{u}\right] \tag{2.4}$$

本节后面还要给出能量方程其他一些有用的形式。

虽然初看起来并不明显,其实欧拉方程组的三个方程式都植根于连续性方程,即某个物理量总数随时间的改变只取决于源项("汇"可看作负源),从而对各个物理量可写出同样的"守恒形式",其中物理量 Q 的密度 ρ_Q 的变化由其通量 $\boldsymbol{\Gamma}_Q$ 和净体积源 S_Q 所决定(译注:S_Q 即单位时间内、单位体积中 Q 的净变化量)。通量 $\boldsymbol{\Gamma}_Q$ 的单位是单位时间内从单位面积通过的物理量 Q。这个守恒式即是

$$\frac{\partial\rho_{Q}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{Q}=S_{Q} \tag{2.5}$$

把上式在封闭曲面 σ 所包围的体积内积分,应用高斯定理可得

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\oint_{\sigma}\boldsymbol{\Gamma}_{Q}\cdot\mathrm{d}A=\text{整个体积中的净源量} \tag{2.6}$$

上式第二项面积分是流出或流入该体积的净 Q 量,$\oint_{\sigma}$ 表示对 σ 的面积分。

习题 2.1

推导欧拉方程组的一种方法是写出质量、动量和能量各自对应的密度、通量及源项,然后应用式(2.5)。对于多方气体进行上述推导,然后作简化得到式(2.1)~式(2.3)的方程组。

式(2.1)通常称为连续性方程,它对动力学过程的约束是物质的量固定不变。可以看出,该式左边第二项是一个通量的散度。如果把此式在有限体积上积分,就可得出该体积内质量的变化等于进出该体积的物质净流量。如果还存在质量的源或汇,则式(2.1)右边将出现相应的源项。这个方程虽然简单,却是理解流体动力学系统复杂行为的关键所在,因为许多情况下密度 ρ 和速度 v 两者的变化很重要。这种变化使得式(2.1)成为实质性的非线性偏微分方程式,使用任何解析方法都难以求解。

式(2.2)是动量方程,更确切地说是计算动量密度的时间变化率而导出的方程。这个具体形式适用于电场、磁场、黏性动量传递和辐射压力等都被忽略的情形,唯一保留的动量源是可以引起等离子体压缩或膨胀的压力梯度,其作用由该式右边的项表示。该式左边第

二项描述了动量的对流。

式(2.1)和式(2.2)的一个简单而又重要的应用是对小幅度声波的描述,可以直接得出解析解,这里把它看作“线性化”方法的一个例子。本书后面许多场合中,线性化方法十分重要。当物理问题中各个变量的变化可以表述为对其平均值常量(可以为零)的很小偏离时,就可以进行线性化近似。线性化的实质在于对物理量做小量展开时,其线性部分远大于其非线性部分。用下标“0”表示物理量的平均值,下标“1”表示小偏离量,并假定压力 p 是密度 ρ 的函数。当 $\boldsymbol{u}_0=0$ 时,式(2.1)成为

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0 \nabla\cdot \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\rho_1+\rho_1\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0 \tag{2.7}$$

式(2.2)则变为

$$\rho_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t}+\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\boldsymbol{u}_1\right)+\rho_1\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t}+\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\boldsymbol{u}_1\right)=-\frac{\partial p}{\partial \rho}\nabla\rho_1 \tag{2.8}$$

非线性项是包含 ρ_1 和(或)$\boldsymbol{u}_1$ 的乘积,可以看作小量。为了在形式上证明此点,读者应把上面两个方程式进行处理,即把每个小量都表示为确实很小的无量纲比式,然后展开。把这个步骤留作一道习题让读者完成,即从上面两个方程式推导出如下声波方程的过程:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\nabla^2\rho=0 \tag{2.9}$$

注意,声速 c_s 的平方 $c_s^2=(\partial p/\partial\rho)$,对于多方气体即是 $\gamma p/\rho$。声速的平方通常表示为等熵状态下压力对于密度的偏导数,这个偏导数具体该如何取与所研究系统的性质有关。如果系统的涨落是绝热的,这个偏导数可以在等熵条件下取;如果热输运足够快以至于温度来不及发生变化,则该偏导数应在等温条件下取;如此类推。

习题 2.2

把欧拉方程组进行线性化,推导出式(2.7)和式(2.8)。选取适当的量纲因子,使该方程组无量纲化,并讨论相对于其他项的量来说哪些项是小量,然后推导式(2.9)。

讨论式(2.9)的解,是对后面分析问题的有益准备。该式的形式解是包括指数项 $\exp[i(\pm\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\pm\omega t)]$的若干项的和式,其中 ω 为振荡角频率;$\boldsymbol{k}$ 为振荡波矢(其幅度 k 与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$);$\boldsymbol{x}$ 和 t 分别表示位置和时间变量,黑体符号则表示矢量物理量。作为形式解还应考虑实数的物理量如何与复数表达式关联起来(关于这方面的讨论可参看杰克逊(Jackson)《经典电动力学》中第 6 章的例子)。如果假设 ρ 的变化正比于任何一种指数式(如 $\exp[i(\pm\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\pm\omega t)]$),或者对式(2.9)进行傅里叶变换,都能得出声波的色散关系,即

$$\omega^2-c_s^2k^2=0 \tag{2.10}$$

从上式看出,c_s 既是声波的相速度(ω/k),又是其群速度($\partial\omega/\partial k$)。注意到密度涨落的幅度 ρ_1 没有出现在色散关系中,因此这个涨落量在还未大到足以使线性化无效之前,不受式(2.1)和式(2.2)的约束。

习题 2.3

对式(2.9)实际进行傅里叶变换,得出式(2.10)。

习题 2.4

把式(2.9)中密度替换为其傅里叶变换式——谱密度 $\bar{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)$,证明其结果与式(2.10)有关。

事实上,大幅度声波性态的一个特色值得在此指出,这就是在理论上比在实际中更容易遇到的声波陡化问题。大幅度声波在波峰处的密度较高,波谷处的密度较低,波峰处的声波速度相应地也较高一些,其后果是任何声波的波峰趋向于超越其前方的波谷,这种赶超从而导致声波前沿变陡。在由欧拉方程组决定的系统中,通常的声波发生陡化,直至其等离子体压力和密度剖面变为一连串陡升的脉冲,它们相互之间由平滑下降的方式连接(类似锯齿波)。任何真实的等离子体总存在黏性,这将限制波阵面的陡化程度。

式(2.3)以显式描述了等离子体压力的变化,但这仅是一个从计算等离子体中能量密度变化率得出的简化方程式。任何多方介质的总能量密度正比于压力,等于 $p/(\gamma-1)$。式(2.3)左边描述了等离子体压力随时间和对流的变化。不可压缩流体情形中,$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$,式(2.3)即表示能量守恒不变;相反地,在可压缩流体场合 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}\neq0$,通过压缩和膨胀做的功是能流的组成部分。还要注意的是,式(2.2)和式(2.3)中压力以标量表示,而一般状况下压力应以张量 $\underline{P}$ 表示,此时 ∇p 应写成为更一般的矢量 $\nabla\cdot\underline{P}$。高能量密度物理的大多数场合下,各向同性的标量压力概念十分适用。2.3 节中涉及黏性作用时,将采用张量来描述压力。压力不能用标量表示的另外一些场合,如涉及能够承受剪切应力和其他非对称内力的固体的情况,以及完全磁化等离子体的情况,此时沿磁力线方向压力分量的行为基本不同于垂直于磁力线方向的压力分量。

式(2.3)还与等离子体的熵有重要关系。作为具体例子考虑多方气体,然而其结论是普遍性的。根据谢多夫(Sedov)的专著第 261 页,多方气体的比熵(单位质量介质具有的熵)可以表示为

$$s = c_V\ln\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) - c_V\ln\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right) + s_0 \tag{2.11}$$

式中 s_0 为参考状态 $p=p_0,\rho=\rho_0$ 之下的 s 值;c_V 为比定容热容。把 s 进行全导数展开,$\mathrm{D}s/\mathrm{D}t=\partial s/\partial t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla s$,得

$$\frac{1}{c_V}\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{p}\boldsymbol{u}\cdot\nabla p + \gamma\,\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

根据式(2.3),上式意味着 $\mathrm{D}s/\mathrm{D}t=0$,即可得出结论:当粒子通过式(2.3)连续地成立的任何时空区域时,其比熵不变化。我们指出:流体参数经历间断变化时(如通过冲击波),熵并不守恒。此外,热传输或其他耗散过程也会导致熵的变化。在对含有耗散过程的流体动力学系统进行模拟时,可以通过验算流体微元中熵的变化来估计这些过程的重要性。如何把上面这些方程应用于冲击波,将在第 4 章中讨论(注意,在流体力学教科书中花费较长篇幅

讨论的全导数概念,其实是给定流体微元内物理量的变化率,它包括该量单纯随时间的变化率,以及存在空间导数时流体微元在空间移动所导致的该量的变化率)。

能量方程还可用其他有效的方法来表述,这种方法与后面一些章节有关。如果展开式(2.4),把所有包含密度导数的项集合在一起,根据连续性方程即可看出它们的和为零。把式(2.2)两边做与 $\boldsymbol{u}$ 的点积,得到一个关于等离子体中机械能的方程式,再把此式与能量方程相减,在其中代入由连续性方程给出的$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 的表达式,就可以得出有时被称为气体能量方程的如下式子:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\varepsilon-\frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho=0 \tag{2.13}$$

存在能量源项或者热输运项时,上式右边将不为零。对于理想气体 $\varepsilon=p/[\rho(\gamma-1)]$,此时式(2.13)化约为如下特别有用的形式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)p-c_s^2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\rho=0 \tag{2.14}$$

习题 2.5

根据式(2.1)、式(2.2)和式(2.4),导出式(2.14)。

2.2　麦克斯韦方程组

许多简化的流体力学方程组带有某些电动力学的分量,为了理解这些方程组,需要学习电动力学的麦克斯韦方程组。下面写出这个方程组作为参考,还要讨论与 cgs 制和其他单位制有关的问题。写出这个方程组时假定介质既不是天生磁化的,也不是电极化的,因此可以明显写出所有的电荷和电流,并可取极化场和磁化场为零。这是等离子体物理中通常的情形,但在某些领域中极化电场和物质磁化是常见的概念。

麦克斯韦方程组中的高斯定律为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi k_1\rho_c \tag{2.15}$$

不存在磁单极子的事实可表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2.16}$$

法拉第定律为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-k_3\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.17}$$

最后是麦克斯韦方程组中对安培定律的推广,即

$$\nabla\times\boldsymbol{B}==\frac{k_2}{k_1k_3}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+4\pi\frac{k_2}{k_3}\boldsymbol{J} \tag{2.18}$$

式中 ρ_c 为体电荷密度;$\boldsymbol{J}$ 为面电流密度。这里已按照杰克逊的书把该方程组表示为与单位制无关的形式。本书大部分应用中,该方程组以高斯(cgs)制写出,这样做对于等离子体现象可得出较方便的表达式。在这样表示的方程组中 B 的单位是高斯(Gs),其他量为 cgs 制

单位，各常数分别为 $k_1=1$，$k_2=1/c^2$，$k_3=1/c$。这种情况下，人们往往对电学量不感兴趣，确实还有些学者使用静电伏特/厘米作为电场的单位。cgs 制的能量单位为尔格(erg)，可以使用这个单位，也可以把它转换为电子伏(eV)或千电子伏(keV)，$1\text{eV}=1.6\times10^{-12}\text{erg}=1.6\times10^{-19}\text{J}$。

需要计算磁场时，往往使用以 SI 单位制表示的安培定律：

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \tag{2.19}$$

式中 μ_0 为真空磁导率，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{H/m}$；$\varepsilon_0$ 为真空电导率，$\varepsilon_0=10^7/4\pi c^2(\text{F/m})$；光速 c 的单位是 m/s；B 的单位为 T；E 和 J 的单位分别是 V/m 和 A/m^2。一般而言，在 SI 制下各常数分别为

$$k_1=1/4\pi\varepsilon_0(\text{m/F})=10^{-7}c^2,k_2=\mu_0/4\pi=10^{-7}\text{H/m},k_3=1$$

有时要用到作用于速度为 $\boldsymbol{v}$ 的电荷 q 上的洛伦兹力，即

$$\boldsymbol{F}_\text{L}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}\right)_{(\text{cgs})}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{(\text{SI})} \tag{2.20}$$

右部两式采用的单位制已由下角括号指明。

有时使用磁场的矢量势 $\boldsymbol{A}$ 较为方便，即有

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.21}$$

以及

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.22}$$

式中 Φ 为电场的标量势。因采用库仑规范，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。

有时还需要使用电磁场的能量密度和能量通量，在 cgs 制中电场能量密度 W_E 和磁场能量密度 W_B 可分别表示为

$$W_E=E^2/8\pi \tag{2.23}$$

和

$$W_B=B^2/8\pi \tag{2.24}$$

把涨落的电磁场量取多次循环的平均，这样得到的量被 2 除以后才可给出平均的能量密度，坡印廷电磁通量也是如此，即

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{v}_\text{g}}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{2.25}$$

式中 $\boldsymbol{v}_\text{g}$ 为电磁波的群速度。

2.3 更加普遍和完全的单流体运动方程组

图 2.1 表示“天鹅圈”(Cygnus loop)星云的图像，从地球上看这个天体的尺寸约为月亮的 6 倍大小，是大约 15000 年以前出现的超新星所造成的，其特征是很薄物质层的层层堆砌。不同元素发光的光谱成像显示出这些元素是在何处产生的。分析这些发光，已经发现冲击波所产生的各种特征，并揭示出它们的一些性质。“天鹅圈”之所以出名，是因为它无

法仅仅依靠欧拉方程组来描述。这种情形中,已见不到的但又十分相关的现象是辐射热输运。

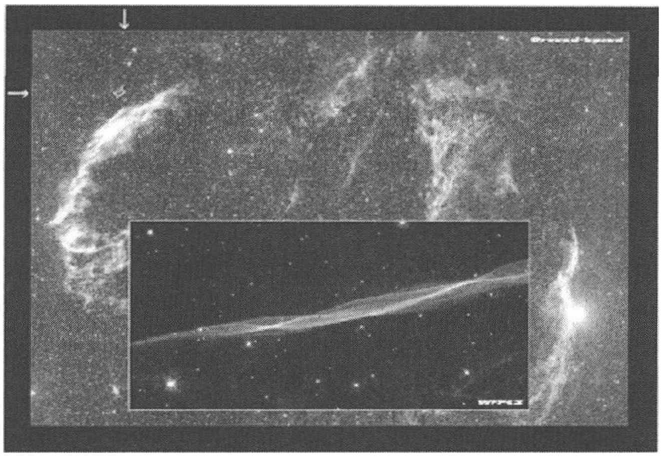


图 2. 1　“天鹅圈”超新星遗迹

许多情形中除了压力与动量的互动之外,或多或少还有些现象对所研究系统的行为十分重要。尽管如此,人们常常可以不顾及真实等离子体包括离子与电子的某种组合的事实。等离子体的很多行为,尤其是高能量密度等离子体的行为,可以把它当作单流体描述。这种单流体可以带电荷、传导电流,并且与辐射相互作用。本节将讨论这种单流体的运动方程组,以及几个有意义的特别的极限。

图 2. 1 的背景图像是一个地基望远镜拍摄的光学像,插图是由哈勃空间望远镜上 WFPC2 装置得到的,显示了在沿箭头方向排列的小格子中向上运动的冲击波所产生的薄发光层(氢的发光,波长 656. 3nm)。测量背景中“天鹅圈”的图像为 3° ×2°,这是由加州理工学院在斯密特望远镜 Oschin 上测定的,并作为数字化天空普查(Digitized Sky Survey)的一部分而扫描。哈勃望远镜的图像取自欧洲空间署,其网址为 http://origins. jpl. nasa. gov/library/story/101100 - $a_0$ld. html。

2. 3. 1　一般的单流体运动方程组

以式(2. 4)为参考,考察在这里依然可用的输运方程的普遍结构,并且考虑更复杂一些的项,即任何给定物理量的源和通量。本书所关心的问题不包括内部质量源,因而连续性方程仍然不变,即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.26}$$

非相对论极限下,关于动量和能量的普遍形式的输运方程为

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\right) = -\nabla(p + p_{\mathrm{R}}) + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{\nu} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{EM}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{other}} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} + E_{\mathrm{R}}\right) + \nabla \cdot \left[\rho \boldsymbol{u}\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + p\boldsymbol{u}\right] = -\nabla \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{other}} \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.28}$$

这里已利用式(2. 26)使式(2. 27)的左部得到简化,更复杂的关系式包括时间关系和动量密

度的散度，往往对计算机模拟计算更加有用。辐射压力 p_R 和黏性应力张量$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_v$ 将在后面进一步讨论。辐射场的能量密度 E_R 通常可以忽略，这里还要简短地再讨论一下。读者也许已注意到式(2.27)不够对称，因为式中包括辐射压力但没有包括辐射动量密度。除了相对论系统中必须包括辐射动量密度以外，这个量并不重要。动量方程可以通过计算粒子分布函数的矩而导出，也可以根据流体微元的力学分析而直接建立。至于这个方程的不同类型(包括或不包括各种具体的源项)，可以参阅任何等离子体物理或流体力学教科书。

由电荷与电磁场相互作用产生的力密度为

$$\boldsymbol{F}_{EM} = \rho_c \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} + \nabla p_R \tag{2.29}$$

式中 ρ_c 为电荷密度；$\boldsymbol{E}$ 为电场强度；$\boldsymbol{B}$ 为磁场(感应)强度；$\boldsymbol{J}$ 为电流密度；c 为光速。

式(2.29)右部第二项是带有光速 c 的洛伦兹力的表达式，采用了 cgs 制。这样的表示对实际工作较为方便，虽然有时并非如此。注意，把等离子体看作单流体时电流在等离子体内流动，但是电流流动并不要求单流体等离子体也发生运动。这自然是因为电子携带了几乎全部的电流，但是几乎没有任何动量。相仿地，较高电荷密度的存在，也不一定需要物质质量发生显著累积。研究强激光束或其他窄带辐射与等离子体相互作用时，通常需要考虑力密度 $\boldsymbol{F}_{EM}$，该量在讨论激光产生的等离子体时有着重要作用。相反地，在热辐射与稠密等离子体相互作用中，$\boldsymbol{F}_{EM}\approx 0$，因为这种情况下经过一定的分析和求平均，可看出洛伦兹力 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ 等于 $-\nabla p_R$。把能量方程写成为式(2.27)的形状是一种折衷的做法，可以避免在本书后面再引入毫无创意的新方程形式。对于辐射流体力学系统，实际上取 $\boldsymbol{F}_{EM}=0$，并在考虑激光与等离子体相互作用时略去带有 p_R 的项。

式(2.28)中出现的能量通量 $\boldsymbol{H}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = \nabla\cdot[\boldsymbol{F}_R + (p_R + E_R)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_v\cdot\boldsymbol{u}] \tag{2.30}$$

式中 $\boldsymbol{F}_R$ 为辐射能量通量；$\boldsymbol{Q}$ 为热性热传导的能量通量。

式(2.28)的倒数第二项 $-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ 描述了电磁波驱动电流导致的体加热，除了强激光贯穿辐照等离子体的情况，此项通常可以忽略。同时还要指出，可以把式(2.28)左部各项重新安排成前面讨论过的形式，尤其是整理为式(2.14)的形式，其差别仅在于增添了式(2.27)或式(2.28)右部的源项。另一种途径包括所有涉及辐射能量和辐射压力的项，可以导出一个形如式(2.13)的式子，其中 ε 应代之以$(\varepsilon+E_R/\rho)$，p 应代之以$(p+p_R)$，并在式子的右部增添源项。

对这些方程进行量纲分析，有助于增进对它们的深入理解和直觉认识。为此，需要确定该系统的特征尺度——特征速度 U 和特征长度 L，它们合起来给出时间尺度为 L/U。在进行标度参数分析时，应把 u 换为 U，∇换为 $1/L$，$\partial/\partial t$ 换为 U/L，这样做自有其道理。对于任何形为指数函数或线性函数的剖面，对其求导数相当于被该剖面的某个长度尺度相除。对于任何非线性的幂次律剖面，在相差一个数字因子的意义下长度尺度即是其距离变量，如 x 或 r 等。这些长度尺度不是局部涨落的波长或频率，而是规定系统总体演化性质的全局性尺度。鉴别出这些特征尺度之后，就可看出动量和能量的对流变化率的全局性特征尺度分别为 $\rho U^2/L$ 和 $\rho U^3/L$。如果把任一给定的方程式用相关的上述特征尺度相除，则可得到相

应的无量纲方程式，进而得知式中各个项的相对贡献。

使用标量压力 p，通常认为是一种合适的简化，但涉及固态物质的系统不能这样做，此时 ∇p 应当代之以应力张量的散度。固态物质承受内力的情况是：单位面积上沿一个方向的力，在另一个正交的方向上存在该力的梯度。能量方程中含有压力的项表示压缩或膨胀所做的功，通常称为 $p\mathrm{d}V$ 功。这个功出现于能量方程，意味着比焓 $h=\varepsilon+p/\rho$ 在描述流体力学系统行为方面通常是有用的变量。如果令能量通量 $\boldsymbol{H}=0$，并假定介质是多方气体，则式(2.28)可化归为式(2.3)。把压力梯度项变为无量纲量，可取 $\nabla p\approx p/L$，再被尺度因子 $\rho U^2/L$ 相除得出其归一化幅度为 $(p/\rho)/U^2$，该量正比于内马赫数 U/c_s 平方的倒数。因而当内马赫数增大时，压力梯度的重要性下降。

式(2.30)中的热流由热通量 Q 的散度描述。在激光加热等离子体的情形以及从压力相当低（低于大气压）的气体中产生的等离子体中所观察到一些现象中，这个热通量十分重要。然而对于接近固体密度的等离子体的行为或者大多数天体物理等离子体的行为，热通量并不重要（其理由将在第 10 章中讨论）。许多情形中热通量与流体温度 T 的梯度有关，利用物态方程可以把 T 与 p 或 ε 关联起来，即

$$Q=-\kappa_{\mathrm{th}}\nabla T \tag{2.31}$$

式中 κ_{th} 为热传导系数。

定常运动的流体中只有温度变化是重要的，并且 $\varepsilon\propto T$，这就得到扩散方程 $\partial T/\partial t\propto-\nabla^2 T$，因而这样描述的热输运实质上就是热扩散。为了进行标度参数分析，需要找出并计算热扩散率的运动扩散系数 χ，其量纲与扩散系数相同（自由程平方/碰撞时间）。朗道和栗弗席兹的书中指出，χ 和 κ_{th} 之间的关系为

$$\kappa_{\mathrm{th}}=\chi\rho c_p=\chi n k_{\mathrm{B}}\gamma/(\gamma-1) \tag{2.32}$$

式中 c_p 为比定压热容；n 为流体中粒子的数密度，这些粒子服从具有共同温度 T 的某种分布。对于压力服从波意耳定律的多方气体，式(2.32)的第二个等式给出了我们需要的结果。k_{B} 是玻耳兹曼常数，它与温度的乘积 $k_{\mathrm{B}}T$ 具有能量量纲。在实际的单位制中可写出

$$\chi=2\times10^{21}\frac{T^{5/2}}{\ln\Lambda Z(Z+1)n_{\mathrm{i}}}=3.3\times10^{-3}\frac{AT^{5/2}}{\ln\Lambda Z(Z+1)\rho}(\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}) \tag{2.33}$$

式中 A、Z 分别为等离子体中离子的平均原子量和平均电离电荷数；$\ln\Lambda$ 为 2.4 节中将讨论的库仑对数；n_{i}、ρ 分别为离子的粒子数密度（cm^{-3}）和质量密度（$\mathrm{g/cm^3}$）；T 为温度（eV）。

这些具体的公式是 Braginskii(1965) 书有关章节中基于对库仑碰撞为主导过程的分析而得出的。对于相当稠密的等离子体，其系数的准确值可能有所不同。

估算热输运项的无量纲比式，可以给出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{Q}\sim\chi\rho(k_{\mathrm{B}}T)/(Am_{\mathrm{p}}L^2)$$

以 $\rho U^3/L$ 相除并注意到

$$k_{\mathrm{B}}T/(Am_{\mathrm{p}})\sim U^2$$

得到热输运项的归一化幅度是贝克来数(Peclet Number) Pe 的倒数，$Pe=UL/\chi$。Pe 很大时，热输运项可以忽略。

这些方程包含一些描述辐射作用的项，在 Mihalas 的书中论述了这些项的推导过程及其

更普遍的形式。下面定义这些项并考虑在什么情况下它们较为重要。一般说来,辐射能量通量 $\boldsymbol{F}_R$ 和 $\boldsymbol{F}_s$ 实际上相等于坡印廷通量 $\boldsymbol{S}$,当对所有出现的辐射估算 $\boldsymbol{S}$ 时,即有 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})c/(4\pi)$,这里明确考虑了所有电荷产生的场,$c$ 为光的群速度。但在具体应用中,仅当问题中出现几个波时人们才采用 $\boldsymbol{S}$ 的传统形式,例如,激光与等离子体相互作用的情形。当稠密等离子体具有宽带或线状的发射、吸收谱时,$\boldsymbol{F}_R$ 的表达式必须改为坡印廷通量在适当时空范围内取平均的积分形式。例如,温度为 T 的黑体发出的辐射通量为 σT^4。流体因发出辐射而冷却,当它们相当不透明时发出的是黑体辐射,否则流体冷却的主导因素将是原子的线谱辐射,在第 6 章中将进一步讨论这个问题。高能量密度实验中辐射能量通量往往很重要,注意到 $-\nabla\cdot\boldsymbol{F}_R$ 是单位体积流体对辐射能量的吸收率。第 8 章中将考虑流体对激光或对 X 射线的吸收十分重要的情形。

容易证明,很不经常的情形中包含 $\boldsymbol{E}_R$ 和 p_R 的项才是重要的。当辐射与流体处于温度为 T 的平衡状态时,有

$$p_R = E_R/3 = 4\sigma T^4/3c \tag{2.34}$$

辐射压力与等离子体流体压力的比式为

$$\frac{4m_p\sigma T^4}{3c\rho k_B T} = \frac{0.05T^3}{\rho} \tag{2.35}$$

式中 m_p 为质子质量;T 以 keV 为单位;ρ 以 g/cm^3 为单位。塑料的密度通常约为1g/cm^3,水也是如此。从式(2.35)可知,流体动力学中辐射的压力与能量具有重要作用时(即分别达到流体的压力或能量),该等离子体的温度大约应达到 1keV 以上。超新星的受冲击物质中辐射压力超过流体压力,成为主导因素(在某些更低的密度下)。读者利用 21 世纪初建造的实验设施,可以较容易地产生和研究辐射为主导的等离子体。

从形式上对辐射项的无量纲标度参数作进一步探讨。辐射与流体处于平衡时,归一化的辐射压力项为 $p_R/\rho U^2$,近似地等于式(2.35)的比式(因为 $k_BT/m_p \sim U^2$)。式(2.30)中的能量通量项大于焓项($p_R+\varepsilon$)约(U/c)倍,其归一化幅度为 $\sigma T^4/(\rho U^3) \sim m_p\sigma T^4/(\rho k_B TU) \sim (1/Bo)$,这里 Bo 称为玻耳兹曼数(Boltzmann Number,参见 Mihalas 的书),当辐射引起的能量通量对动力学行为有很大影响时,Bo 较小。注意,$1/Bo$ 高出式(2.35)约(c/U)倍,反映了当温度远低于辐射压力起显著作用所需的温度时,辐射能量通量也可能变得很重要的事实。在第 6 章和第 7 章中将给出这样的特殊例子。

某些系统中,辐射是否重要也许需用另外的度量来估计。我们认识到,(动理学的)辐射热导率 $\chi_r \sim \bar{l}c$,这里平均自由程 $\bar{l}$ 可以是轫致辐射相互作用、康普顿散射过程或者原子发射与吸收过程的表征,此时可计算出辐射的贝克来数。另一种方法是把辐射冷却时间与流体动力学特征时间(L/U)作比较,前者的定义是能含量与黑体能量通量之比值。Ryutov 等人(1999)的论文中对这个问题有深入的讨论。

流体一般也具有内摩擦,流体中粒子的相互碰撞阻碍了流体的运动,这类过程称为黏性。等离子体运动的黏性效应通常很小,但在第 5 章关于湍流的讨论中可知,黏性对于湍流结构的发展具有重要的影响。由于流体速度在横向存在梯度,碰撞黏性一般在给定方向上

产生作用力，想象一下简单的剪切层就很容易看出黏性作用的物理图像：若流体粒子速度整体上朝着记为 z 的方向，但沿垂直的 x 方向各粒子速度之间存在梯度。相互碰撞使得粒子沿 x 方向运动，引起这个方向动量的净输运，从而产生了力。这种应力张量的各分量为

$$\sigma_{\nu ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{2.36}$$

式中 δ_{ij} 为克罗内克（Kronecker）符号；ν 为运动黏性系数；ζ 为第二黏性系数（经常可以忽略）。

常见情形中，粒子碰撞引起的黏性是主要的，运动黏性系数近似为平均自由程平方与碰撞时间的比值，$\rho\nu$ 称为动力黏性系数。应用张量记号，应力张量可写为

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}_\nu} = \rho\nu\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\underline{\boldsymbol{I}}\right) + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\underline{\boldsymbol{I}} \tag{2.37}$$

式中 $\underline{\boldsymbol{I}}$ 为单位张量；上标“T”表示转置运算。

大多数湍流理论只考虑不可压缩流体，即有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$。其他如考虑声波阻尼等情形中，可压缩项至关重要。流体承受的黏性应力的梯度即是力密度。

黏性应力的出现对于流体的能量含量也有贡献，当经受应力的流体运动时能量被输运，黏性对于总能量 $(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\sigma}_\nu})\cdot\boldsymbol{u}$ 的增加有贡献，包括对于如下的内能增加率的贡献，即

$$\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.38}$$

以及对于动能（总能量中剩余部分）增加率的贡献。读者若对推导的细节感兴趣，Hinze 的书提供了这方面的内容，朗道和栗弗席兹的书只考虑了动能部分。

当 Z 大约低于 6 时，主要与离子有关的运动黏性系数在实际的单位制中可写为

$$\nu_i(\mathrm{cm^2\cdot s^{-1}}) = 2\times10^{19}\frac{[T(\mathrm{eV})]^{5/2}}{\ln\Lambda\sqrt{A}Z^4 n_i(\mathrm{cm^{-3}})} = 3.3\times10^{-5}\frac{\sqrt{A}[T(\mathrm{eV})]^{5/2}}{\ln\Lambda Z^4\rho(\mathrm{g\cdot cm^{-3}})} \tag{2.39}$$

式中各符号的意义与式（2.33）相同。温度相当高的等离子体中，除了运动黏性外，光子黏性可能变得很重要，根据 Jeans 的以及 Thomas 的书，光子的运动黏性系数可写为

$$\nu_{\mathrm{rad}}(\mathrm{cm^2\cdot s^{-1}}) \approx \frac{\bar{l}c\sigma T^4}{\rho c^3} = 3\times10^{-9}\frac{A[T(\mathrm{eV})]^4}{Z[\rho(\mathrm{g\cdot cm^{-3}})]^2} \tag{2.40}$$

式中 $\bar{l}$ 为光子的平均自由程，其他符号分别表示其标准定义的物理量。

为了估算动量方程中这种黏性作用项的无量纲标度参数，可取 $\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\sigma}_\nu}\sim\rho\nu U/L^2$，再用 $\rho U^2/L$ 去除，求出归一化的黏性作用项的幅度大小为 $1/Re$，这里**雷诺数**（Reynolds Number）$Re=UL/\nu$。能量方程中黏性作用项具有同样的标度参数，因为该方程中黏性项增加的因子 U 在归一化过程中正好被除去。雷诺数也许是最广为人知的无量纲标度参数，因为在定性表征湍流行为方面已经证实该参数十分有用。Re 很大时，式（2.27）～式（2.30）中的黏性作用项可以忽略。然而，湍流现象可能内在地与某种尺度下的黏性耗散有关，这是第 5 章中将进一步讨论的问题。

动量方程和能量方程还包含电磁力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{EM}}$ 及其导致的等离子体加热项。前面论述的辐射

通量散度 $-\nabla\cdot \boldsymbol{F}_R$ 就是与电磁力 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ 有关的加热项。静电力 $\rho_q E$ 产生的体加热项可以表示为 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$。电流为电阻性的简单情形中,电流由 $\eta\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}$ 给出,η 是电阻率。此时耗散功率也是电阻性的,其大小为 ηJ^2。但是,一般情况下加热不一定是电阻性的。对于具有电磁分量的问题,除流场量外还要从单流体方程组所增加的麦克斯韦方程组中求解 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$(见 2.3 节)。大部分场合中,与这些力的尺度有关的无量纲标度参数即是 2.3.2 节中讨论的磁雷诺数。

最后,式(2.27)和式(2.28)中出现的外力项 $\boldsymbol{F}_{\text{other}}$ 可用来引入其他的力,如重力。

2.3.2 磁流体力学

许多等离子体应用问题中,磁场在动力学中发挥重要作用,而频率远高于声频的现象并不重要,所有需要考虑的距离都是离子轨道半径的许多倍(见 2.5 节)。这样的情形中,流体力学方程组和麦克斯韦方程组可化约为一个很简单的方程组,称为磁流体力学方程组或 MHD(Magneto – Hydro – Dynamics)方程组。天体物理学中有许多情形,对它们进行磁流体力学数值模拟很有价值,其中包括对恒星大气、行星磁层、行星际和恒星际空间等问题的研究。进一步把 MHD 方程组作相对论推广,还可以有效地描述脉冲星磁层、银河喷流和其他有关现象。在某些这样的系统中,磁场的动力学作用很重要,并强烈影响着物体的行为。即使磁场的动力学作用不甚重要,很大体积范围中的磁场也会具有大量的能量。

对于所讨论的某些高能量密度系统,需要考虑所谓的“低频”磁场。这些磁场对于 Z 箍缩以及驱动它们的加速器在高能量密度物理中的应用甚关紧要,对于相对论高能量密度系统动力学的研究也很重要。

在 cgs 制中表述的 MHD 方程组包括:

连续性方程
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}=0 \tag{2.41}$$

动量方程
$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)=-\nabla p+\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{c} \tag{2.42}$$

欧姆定律
$$\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}=\eta\boldsymbol{J} \tag{2.43}$$

法拉第定律
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.44}$$

安培定律
$$c\nabla\times\boldsymbol{B}=4\pi\boldsymbol{J} \tag{2.45}$$

磁流体力学理论假设中的小项,都已在从更一般形式的方程组(特别是式(2.16)和式(2.18))出发的化约过程中去除。上面新增加的欧姆定律的方程式,也是在这些假设之下推导出的。在大多数等离子体物理学教科书中,都会讨论形式更一般的欧姆定律及其条件,以及磁流体力学理论的其他形式。

本书作者偏向于采用取 Krall 和 Trivelpiece 书中的处理方法,把 cgs 制中等离子体介质的电阻率(以秒为单位)写为

$$\eta=\frac{\nu_{\text{el}}m_e}{n_e e^2}=\frac{4\pi\nu_{\text{ei}}}{\omega_{\text{pe}}^2}(\text{s}) \tag{2.46}$$

在 SI 制中则有 $1\mathrm{s}=9\times10^9\Omega\cdot\mathrm{m}$。式(2.46)中的等离子体频率 ω_{pe} 和电子－离子碰撞频率 ν_{ei} 都将在 2.4 节中定义。MHD 方程组并不是一个封闭的方程组，如同欧拉方程组那样，还必须补充物态方程或者关于压力与密度之间关系的某种假设，才能求解整个方程组。

MHD 方程组中关于磁场运动的启示，对于 Z 箍缩和许多天体物理系统的行为很重要。如果把欧姆定律中的 $\boldsymbol{E}$ 代入法拉第定律，并且把其中的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 用安培定律代入，就可得出

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\eta c^2}{4\pi}\nabla^2\boldsymbol{B}+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.47}$$

流体静止时 $\boldsymbol{u}=0$，上述磁场方程成为一个纯扩散方程。对于一些读者来说，磁场能够扩散的观念不易明白，指出下面两点或许有所帮助。首先，磁场的存在意味着电流的存在，通常是载流粒子构成的电流；其次，这些载流粒子受到相互碰撞的影响，导致任何载流区域都有向外扩展的趋势。磁场扩散情形中，若系统的空间尺度为 L，则磁场扩散的特征时间为

$$\tau_{\mathrm{B}}=\frac{4\pi L^2}{\eta c^2}=\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2L^2}{\nu_{\mathrm{ei}}c^2}=1.2\times10^{-8}\,\frac{[L(\mathrm{mm})]^2[T(\mathrm{eV})]^{3/2}}{Z\ln\Lambda}(\mathrm{s}) \tag{2.48}$$

上式中已指明 L 和 T 分别以 mm 和 eV 为单位，库仑对数 $\ln\Lambda$ 将在 2.5 节中定义。式(2.48)所蕴含的磁扩散时间的数据十分有意义，特别地在图 2.2 中说明。从图 2.2 中可以看出，长度尺度为亚毫米的等离子体势必具有 1ns ~ 10ns 范围的磁扩散时间，而长度尺度为几毫米、温度约 100eV 的等离子体则具有微秒量级的磁扩散时间。在这两个时空状态范围中，都可见到磁化的高能量密度系统。

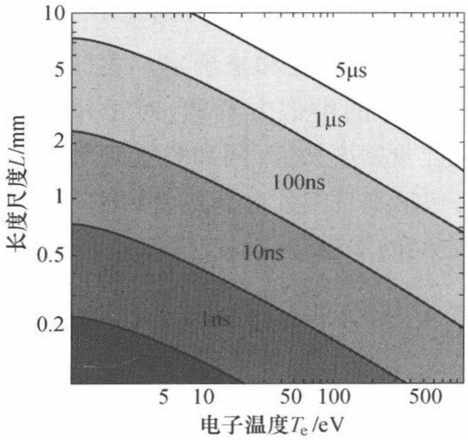


图 2.2　磁扩散时间的等值线

等离子体参数是 $n_e=10^{20}\mathrm{cm}^{-3}$，$Z=0.63\sqrt{T(\mathrm{eV})}$（参见第 3 章）

如果使用上节中的归一化关系式估算式(2.48)的无量纲标度参数，可以看到磁扩散项相对幅度的标度为 $1/Rm$，Rm 是磁雷诺数(Magnetic Reynolds Number)，其定义为 $Rm=4\pi UL/(\eta c^2)$，即是磁扩散特征时间与流体动力学特征时间(L/U)之比值。

2.3.3　三温单流体模型

原理上我们能够识别电子、离子和辐射各自的"温度"，这里"温度"一词加了引号，因为相对于热力学或统计力学中关于温度的严格定义来说，在实际中该词往往被滥用了。在日常实际工作中，温度的意义是"一个平衡热力学系统的温度值，该系统具有与所考察的真实系统相同的平均能量"。真实系统可以是电子或光子的一种能量分布，通常并不处于平衡态，其能谱与平衡能谱偏离很大。识别等离子体中的三种温度，是一件特别似是而非的工作，因为仅当这三种温度彼此相等时才能严格采用温度的热力学定义。尽管如此，单流体等离子体的"三温"描述相当有用，尤其对于计算机数

值模拟。

在辐射可以忽略或者成为主导的两种情况下，应用单温单流体的欧拉方程组是准确的。如果辐射可以忽略，则电子温度和离子温度之间的碰撞耦合一定十分强烈，高能量密度系统的大多数场合下，电子通过碰撞十分强烈地耦合于离子，两者具有相同的温度，并且局域电子密度与离子密度之间满足关系式 $n_e = Zn_i$，这里 n_e 和 n_i 分别是电子和离子的密度，Z 是平均电荷数。对于任一给定的密度，系统温度上升时电子与离子的耦合减弱。首先看到这种情况发生在冲击波阵面处，因为冲击波直接加热离子，通过碰撞离子的部分能量转移至电子，这些电子接着成为最初的辐射源。图 2.3 表示冲击波阵面处离子温度与电子温度偏离的程度，经过冲击波阵面后一定距离，碰撞使得这两种温度趋于均衡。

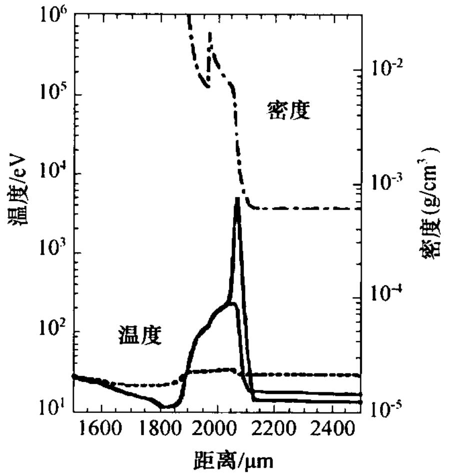


图 2.3 冲击波阵面处电子、离子和辐射的温度可能相差很大

该图表示密度 0.006g/cm³ 的氙气中冲击波以 260km/s 速度定常传播的情形，离子温度以灰线表示，电子温度和辐射温度分别以黑实线和虚线表示。

三温单流体描述中，式(2.1)和式(2.2)不变，然而其中的压力应由三种组分——电子、离子和辐射各自贡献之和来确定。式(2.3)则要更改为各个组分的类似方程式，对于每个组分，其温度(或能量密度)的时间和对流变化率相等于多项之和，包括来自组分内部热量的空间流动、与别的组分之间的能量交换以及任何外部源项。

2.3.4 计算机数值模拟方法

本书强调概念的叙述，较少引入有关计算机数值模拟的内容。目前已有计算机模拟得出的很多算例，许多读者可以广泛参考这些例子进行工作。本节的目的在于提供关于什么是计算机数值模拟的初步观念，并介绍计算机模拟采用的几种方法。读者将看到这些方法仅仅反映了限定的情形，还存在很多其他的可能情况。

本书感兴趣的计算机数值模拟方法，在于以较少的计算单元数去表示一个物理系统。对这样一个包括物质粒子和光子的系统(根据所处情况，也可具有电磁性质)，进行对于高能量密度物理有意义的数值模拟，通常可以反映元素个数在阿伏伽德罗常数几个量级范围内的系统的行为。相比之下，本书写作时计算机的能力可访问每个网络节点 1GB 的存取空间，网络节点个数的量级为 100。这意味着，这种物理系统的描述必定是对粒子聚集行为的某种近似处理。

人们基本上都希望所进行的模拟能够反映物理系统的时空演化，系统的基本描述总是基于类似前面已论述的一组微分方程式。但是数值模拟在运算上不得不从微分方程组后退一步，即利用它们的离散化方程组进行工作，总是需要把系统分为许多单元。许多情形中这些单元是物理胞元，它们之间的距离确定了用于计算导数的空间步长。例如，在某个方向上这样的距离是 δx，则介于通过胞元 i 和 j 之间边界处的压力的空间导数 $\partial p/\partial x = (p(i) -$

$p(j))/\delta x$。下面将讨论一些有关事项。至于其他的方面,如怎样估算胞元中心或者胞元边界处的物理量(以及为何需要这样做),只能留待更深入的讨论。

同样,必须确定用于决定变量值如何随时间变化的时间增量,通常称为时间步长。该步长应当足够小,能够相当精确地反映系统的动力学行为,但又必须足够大,以便模拟能在合理的时间内完成。时间步长的选择应满足的一个限制条件是所谓的柯朗(R. Courant)条件:所考察介质中最快的波在一个时间步长内通过的距离不能大于一个胞元;否则,模拟中将需要人为地迟缓该波的传播。本书考虑的情形中,这种波通常是声波。若声速为 c_s,关于时间步长的柯朗条件则可表示为 $\delta t < \min(\delta x/c_s)$。

显式格式计算中,变量值随时间的推进基于相应的差分方程式经过一个时间步长的增量。然而非常快的波(如构成辐射的光波)常常用隐式格式处理,此时辐射的响应非常快,很快进入定态,以至于其动态行为对流体动力学不发生影响。因而可以用显式方法计算出流体动力学变量的新值,再去求解辐射的新的定常状态。这仅仅是使用隐式格式的一个例子,还有许多更复杂的其他例子,但在高能量密度物理中并不普遍。

数值模拟工作者还会面临如何划分所考察系统,决定用什么方程组描述系统演化的问题。最自然的选择也许是把所考察的空间划分为许多小的区域。这种途径称为欧拉方法。例如,若系统包含在一个立方毫米的体积之中,可以把这个体积划分为 10^9 个立方胞格,其边长为 $1\,\mu$m。给定每个胞格处各个变量的初值,就可以表述这个系统的初始条件。

另一方面,也可以把物体划分为许多胞格,每个胞格持续地跟随着其内部一定量物质的时空演化。这种途径称为拉格朗日方法,意味着胞格随着物体一起运动。这种情况下,需要解算的方程组并不是前面所介绍的那些式子,应当使用拉格朗日质量变元重新改写那些方程组。拉格朗日质量变元 m 的定义式是 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x$。

简单的欧拉计算编码就具有处理物体任意运动的能力,但这类编码的主要弱点在于其内在的扩散性。一旦物质微元进入某个胞格,即被处理为均匀展开通过该胞格的样子,因而在下一个时间步长内该物质微元靠近该胞格边界的部分质量将为邻近胞格所移动。这种强制的质量扩散导致物质在胞格之间相互渗透的速度,远大于物理上可能的扩散速度。动量扩散的后果则是数值黏性变得很大,通常相当于雷诺数达到 10^3 的程度。降低这种影响的一种方法,是把许多胞格定位于物质相互挤压的区域,或者物理变量梯度较陡的区域,这可以采用移动网格的方法实现(网格是标志胞格边界的线段的集合)。另一种更先进的方法是采用自适应网格,在数值模拟过程中能够自动地调整网格的分布。本书中自适应网格的例子包括芝加哥大学开发的流体力学编码 FLASH,以及密执安大学开发的磁流体力学(MHD)编码 BATS－R－US。还有一种不一样的先进方法是显式跟踪问题中把所有物质界面加以专门处理,使得物质区域之间不相互渗透。SUNY Story Brook 公司开发的 FRONTIER 编码就具有这种功能。

简单的拉格朗日型编码就具有跟随实际物质真实运动的能力,可以对高能量密度实验中常见的、包含多个不同性质组分的复杂系统进行准确描述。拉格朗日型的计算编码不会发生物质弥散,这种特点有时确实有用,但有时成为弱点。拉格朗日型编码是对实验进行一维模拟的优良工具,但用于二维和三维计算则有较大弱点,即不能反映旋涡运动。当物质趋于形成旋涡时,就会出现物质从一个区通过另一个区的传递,造成区与区之间物质的重叠,

但通常只是某个网格的一角与另一角发生重叠,致使变形后的网格不再是矩形,变成扭曲矩形的样子(因其形状称其为"领结")。作为拉格朗日型编码的例子,是本书中计算许多曲线图使用的现成商用编码 HYADES。

几十年来数值模拟一直在寻求改进的方法,上面的叙述必定很欠缺,例如,有的编码把拉格朗日网格同欧拉网格结合起来,如洛斯阿拉莫斯国家实验室开发的 RAGE 编码以及劳伦斯利弗莫尔国家实验室开发的 CALE 编码。

除了这些有关编码的核心问题之外,各种具体物理机制的处理可能是对于数值模拟的主要挑战。例如,准确处理激光吸收问题,需要按照第 8 章叙述的线索补充附加的物理模型。另一个例子是热辐射或线谱辐射的处理,在所有的编码中这都是主要问题,第 6 章中将讨论描述辐射遇到的一些问题。Castor 撰写的书中详细讲述了计算处理辐射和流体力学所遇到的困难问题。

另一类很不一样的计算方法是"粒子在胞格中"(Particle In Cell,PIC)方法,它对于流体动力学系统的用处不大,但可用于少量粒子的相对论行为的计算。PIC 编码采用某种方法使微分方程组离散化,求解电场和磁场,并使用样本粒子近似代表德拜长度为半径(见 2.4 节)的球体内所有粒子的行为。在电磁场环境中所有这些样本粒子的时空运动可以显式跟随并表示出来。PIC 编码的一种类型(通常用一种混合编码描述),是把电子以及某些离子处理成流体,其余的离子则当作 PIC 粒子。

2.4 等离子体理论

高能量密度系统差不多总是等离子体,其意义表明它们是电离的,而且一定距离上的电磁相互作用在等离子体动力学中发挥重要作用,至少原理上是如此。遗憾的是,一些传统的教科书(如 Krall 和 Trivelpiece 的书)所讲述的等离子体理论,只是在一定范围内有效,因此只包括了高能量密度物理的部分状况。即便如此,当这种等离子体理论成立时其概念仍然十分有用。因此,在讨论两个传统等离子体理论分支——双流体方程组和动理学理论之前,首先讨论上述问题。

2.4.1 传统等离子体理论的有效性状况

传统等离子体理论面临着一个挑战,即如何描述由运动的带电粒子组成并具有强烈电动力学作用的系统。这些粒子很快扩散并包围在任何暴露的电荷外面,这样的运动可以形成产生能够储存巨大能量的磁场的电流。太阳表面的喷发就是这种可能后果的例子。对暴露电荷的屏蔽作用,是等离子体性质的一个基本方面。即使电荷试图相互扎堆成团,它们的热运动也会限制这种成团倾向。热运动和成团倾向之间的竞争,给出了一个被称为德拜长度的特征屏蔽距离。在 cgs 制中,德拜长度的定义为

$$\lambda_D^{-2} = 4\pi e^2\left(\frac{n_e}{k_B T_e} + \sum_\alpha \frac{n_\alpha Z_\alpha^2}{k_B T_\alpha}\right) \tag{2.49}$$

式中求和号是对所有离子组分进行的;下标"e"表示电子,下标"α"表示各种离子;n 为粒子

的数密度；T 为温度；Z 为电荷数；k_B 为玻耳兹曼常数；e 为电子电荷（这里为 4.8×10^{-10} 静电库仑）。一方面考虑到时间尺度足够快，在此时间之内离子不会移动，与电子有关的德拜长度 λ_{De} 成为（在同样的单位制下）

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2}} \tag{2.50}$$

海军研究实验室（NRL）编著的“等离子体公式”小册子（NRL Plasma Formulary）以及许多其他文献中，只定义了电子的德拜长度。此外，传统的等离子体物理教科书往往假定所有的等离子体都是纯氢，因此把式（2.50）中的系数“4”改为“8”。

另一方面存在稠密等离子体的情形，此时离子－离子的屏蔽决定了等离子体的行为，例如，由于电子是费米简并的（见 3.1.3 节），它们很难成堆，此时下述的离子德拜长度 λ_{Di} 发挥作用。在同样的单位制下，离子的德拜长度为

$$\lambda_{Di}^{-2} = 4\pi e^2 \sum_{\alpha} \frac{n_\alpha Z_\alpha^2}{k_B T_\alpha} \tag{2.51}$$

如同大多数等离子体那样，高能量密度等离子体也是准中性的，因此有

$$n_e = \sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha \tag{2.52}$$

在这样的等离子体中碰撞频率很高（见 2.4.2 节），从而各粒子组分的温度通常彼此相等，可以统一写为 T。在这样场合下可以使用如下关于等效电荷数 Z_{eff} 的标准定义：

$$Z_{eff} = \frac{\sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha^2}{\sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha} = \frac{\sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha^2}{n_e} \tag{2.53}$$

这样在 cgs 制下，可把德拜长度改写为

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e (1 + Z_{eff}) e^2}} \tag{2.54}$$

以后讨论中将使用上面的形式。在涉及二元碰撞的计算中，Z_{eff} 可看作适当的平均电荷数；而在涉及粒子计数的计算中，$Z = n_e/n_i$ 则是适当的平均电荷数。

随着等离子体理论充分发展成熟，提出上述形式的德拜长度十分自然。从简单计算中就可看到，可利用该参数很好地说明传统等离子体理论的局限性。考虑一个离子电荷为 Z 的双组分等离子体，假定粒子按经典统计力学分布，并具有共同的温度 T。这意味着在相对于某个参考点的势为 ϕ 的位置处，具有电荷 q 的粒子的密度正比于 $\exp(-q\phi/k_B T)$，因而位于 $x=0$ 处一个离子周围的电荷密度为

$$\rho_c = Ze\delta(0) - n_e e \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) + n_i e Z \exp\left(\frac{-eZ\phi}{k_B T}\right) \tag{2.55}$$

若假设 $|q\phi| \ll k_B T$，并且等离子体为准中性，则式（2.55）变为

$$\rho_c = Ze\delta(0) - \frac{e^2\phi}{k_B T}(n_e + n_i Z^2) = Ze\delta(0) - \frac{\phi}{4\pi\lambda_D^2} \tag{2.56}$$

这里假定电荷分布是球对称的，可以写出球坐标中的泊松方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi Ze\delta(0) + \frac{\phi}{\lambda_D^2} \tag{2.57}$$

在 cgs 单位制中上式的解是

$$\phi = \frac{Ze}{r}\mathrm{e}^{-r/\lambda_D} \tag{2.58}$$

习题 2.6

把上面的推导推广到具有任意多个离子组分的等离子体,每个组分可以具有不同的温度。

式(2.58)说明了这样的标准结果:任何给定电荷的势在等离子体中的下降指数快于其在真空中的情形。但是使我们感兴趣的是上述推导过程的两个方面:首先,仅当以德拜长度为半径的球体内存在大量粒子时,式(2.55)才有意义;其次,推导中关键的假设是 $|q\phi| \ll k_B T$,如果粒子相当冷,这个假设必定不能成立。这两个方面其实相互有关,下面将加以探讨。

在准中性等离子体中的一个德拜球体内,粒子的个数为 $n_e(1+1/Z)(4\pi/3)\lambda_D^3$,其倒数是传统等离子体理论的一个基本的扩展参数(有时其定义式中没有上述数值系数(4π/3),见 Krall 和 Trivelpiece 的书)。如果德拜球体内粒子的个数可近似看作趋于无限多的,则这样的等离子体称为理想等离子体。这种情况下涉及所有粒子的集体效应仍然存在,但与粒子关联有关的效应消失了。图 2.4 表示处于高能量密度状态的德拜球体内的粒子数从右至左分别表示 0.01 个、0.03 个、0.1 个、0.3 个、1 个、3 个和 10 个粒子,并不是很多。状态图左上角的粒子数只有几十个,变化至该图右下角小于 0.01 个粒子的状况,该处的粒子是费米简并的(见 3.1.3 节),使得它们对离子的屏蔽能力更为降低。此图还显示了典型固体中离子的密度。从此图中明显看出,高能量密度等离子体差不多都是非理想的等离子体。

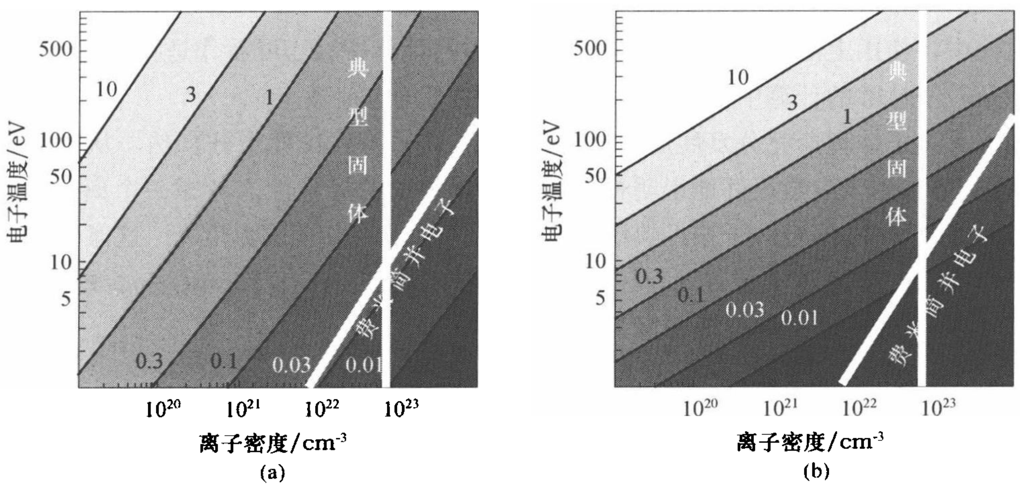


图 2.4 德拜球体中粒子数的等值线

(a)高 Z 等离子体,$Z=0.63\sqrt{T(\mathrm{eV})}$(见第 3 章);(b)低 Z 等离子体,$Z=4$。

现在考察$|q\phi| \ll k_B T$的假设。取一个典型的ϕ值,作为处于平均间距的两个粒子之间的静电相互作用势。给每个粒子一个半径为r_{av}的球体范围,计算得到上述平均间距为$2r_{av}$。确定r_{av}的式子即

$$4\pi r_{av}^3/3 = 1/[n_e(1+1/Z)]$$

因而有

$$\phi = \frac{k_1 Ze}{2r_{av}} = \frac{k_1 Ze}{2}\left(\frac{3}{4\pi n_e(1+1/Z)}\right)^{1/3} \tag{2.59}$$

因此,前面的假设成为

$$\frac{|q\phi|}{k_B T} = \frac{k_1 Ze^2}{2r_{av}k_B T} = \frac{k_1 4\pi n_e(1+1/Z)e^2}{2k_B T}\,\frac{Z/4\pi}{r_{av}n_e(1+Z)} = \frac{\lambda_D}{6r_{av}}g = \frac{g^{2/3}}{6} \ll 1 \tag{2.60}$$

式中g为德拜球中粒子数的倒数,$1/g = n_e(1+1/Z)(4\pi/3)\lambda_D^3$。

因此,关于德拜屏蔽的两个要求最终是相互有关的。图 2.4 所示的参数空间大约有一半以上范围不满足式(2.60)的假设,这并不使人惊奇。比值$|q\phi|/k_B T$通常称为强耦合参数Γ。Salzman 书中以更多的篇幅讨论了这个参数,称为等离子体耦合常数。如同德拜长度那样,Γ可以不同的定义出现,这完全取决于需要估算的是离子－离子耦合、离子－电子耦合,还是电子－电子耦合。更准确地说,必须针对具体的被选定的粒子集合,估算Z和r_{av}参数。文献中见到的最普通的Γ类型是离子－离子耦合。在图 2.4 所示参数空间的大部分范围内,离子都是强耦合的,但离子与电子的耦合并不是如此。在每个离子对应多个电子的等离子体中,离子之间将被很好地相互屏蔽。它们名义上仍处于强耦合,但实际上并不重要。即便如此,许多强耦合状态下等离子体的压力和能量将会偏离其理想气体值,3.3.2 节中将作进一步讨论。

2.4.2　双流体运动方程组

图 2.5 显示超新星遗迹 SNR1006 的图像,在其边沿可以看到,该遗迹中发生的扰动向外传播进入星际介质时产生了冲击波。

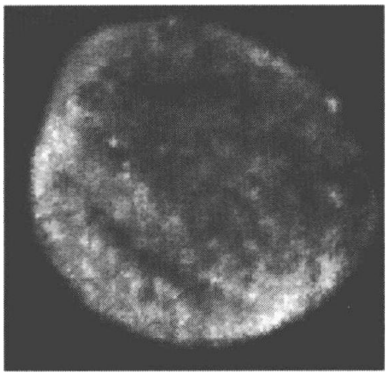


图 2.5　从 ROSAT 卫星拍摄的超新星遗迹 SNR1006 的 X 射线像

这是自公元 1006 年以来被广泛观察到的超新星的遗迹。该图像是几个能带中辐射的叠积,最强的辐射处于图的左上部和右下部,可归结为宇宙射线加速产生的辐射。该图片由 Leicester 大学 X 射线天文学研究组提供:http://wave.Xray.mpe.mpg.de/rosat/calendar/1997/jul。

作为最浅层次的描述,可以用欧拉方程组以流体力学结构来处理这类冲击波,第 4 章和第 5 章中将进行这样的讨论。太阳系中存在的较弱的冲击波及其他现象,可以用 MHD 方程组相当精确地模拟。然而,这些现象事实上都是无碰撞冲击波,磁场和电场的结构对于它们

的存在至关重要，电子和离子同这些场的相互作用很不一样。此外，还有一种经常被分开处理的组分——第三类粒子，即被这些冲击波加速的高能量离子，其中一些最终变成为宇宙射线。这个天体物理系统的例子说明，多流体处理方法对于系统的精确描述十分重要。实验室中也需要使用多流体处理方法，描述第8章中将讨论的强激光与等离子体的相互作用。本节讨论双流体模型、碰撞耦合的标度关系以及大多数等离子体中出现的电子等离子体振荡。

当密度下降或者温度上升，电子与离子的碰撞耦合越来越弱。电子和离子逐渐地开始相互独立运动，出现一些因它们很大的密度差而导致的现象。大部分这样的现象都能用多流体的连续性方程和动量方程成功描述，也就是对等离子体中每个组分应用如下的方程组：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{u})=0 \tag{2.61}$$

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+mn\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=nq\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}{c}\right)-\nabla p-\sum_{l}mn(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_l)\nu_{jl} \tag{2.62}$$

此两式中的变量 n、u、m、p 和 q 等本来都应加上表示各组分的下标（如“e”表示电子、“i”表示离子），现已省略（即认为此两式表示 j 组分）。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是电场和磁场。下面对求和号作些解释。式(2.61)是显然的，但与式(2.42)相比式(2.62)右部具有新的特点，其中电磁作用以完全的洛伦兹力密度的形式 $nq(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}/c)$ 出现（cgs 单位制）。因此，不同于磁流体力学理论，双流体理论能够描述存在动电场或静电场的现象，这样的例子如下面讨论的等离子体振荡，以及浸没于等离子体中物体所形成的德拜鞘等。式(2.62)右部最后一项描述该组分(j)与其他组分之间的动量交换，求和号遍及等离子体中其他的组分（以下标 l 表示），该项中 ν_{jl} 是 j 组分与 l 组分相互作用所导致的动量损失率，这里下标 j 表示式(2.62)自身的组分（可代之以“e”、“i”或者其他合适的记号）。下面进一步讨论这种动量损失项或者阻力项。

使用这些方程组成功地进行分析，还有赖于电子和离子之间差别的定性意义（一次资格考试中我曾见过一位学生，他不知道电子与离子质量的近似比值，遗憾的是我从未见到任何其他学生对这种巨大比数的意义毫无认识，结果他未能通过考试）。两个十分关键之处在于，电子几乎始终处于比离子快很多的运动之中，但是一个离子的动量要比一个电子的动量大得多。与此相关的是，磁场中离子运动的轨道半径也比电子轨道半径大得多。

式(2.61)和式(2.62)的一个简单推论是，在碰撞作用相当微弱的等离子体中存在着电子等离子体波。假设式(2.62)右部最后一项可以忽略，考察的涨落现象非常快，以至于可假设过程中离子密度固定不变，还要假设周围没有电磁场 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{B}$。把上述两个方程式线性化，对式(2.61)两边求对时间的偏导数，对式(2.62)两边求空间散度，经过简化后得到关于涨落量（下标1）的方程如下：

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2}=\frac{n_{e0}e}{m_e}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{m_e}\nabla^2 p_{e1} \tag{2.63}$$

习题 2.7

推导式(2.63)。

这个特殊的方程式可以帮助我们理解所找到的波的物理性质，这是一个类似于声波的

单纯纵波，这里起伏涨落的电场和电子压力导致的压缩，两者共同引起电子密度发生变化。该式右部第一项可以用泊松方程进行估计（见 2.2 节），本情况下可得出

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}_1 = 4\pi(Zen_{i0} - en_{e0} - en_{e1}) \tag{2.64}$$

上式右部括号中前两项彼此相消，因为等离子体是准中性的。再假设电子的行为如同指数为 γ_e 的多方气体，从而得出如下的波动方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - \frac{\gamma_e p_{e0}}{n_{e0} m_e}\nabla^2\right)n_{e1} = 0 \tag{2.65}$$

式中引入的电子等离子体频率为

$$\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_{e0}/m_e} = 5.64\times 10^4\sqrt{n_{e0}}\quad (\mathrm{rad/s}) \tag{2.66}$$

这里使用 cgs 单位制，n_{e0}的单位为 cm^{-3}。式(2.65)描述了被称为电子等离子体波的波，与 2.1 节中关于声波的推导相比较，可以看出式(2.65)通过压力项把包含波数的项引入到色散关系之中。涉及电子绝热压缩的高频率波只有一个自由度，并且 $\gamma_e = 3$。利用动理学理论也可以证实此点（见 2.4.3 节）。由于 $p_{e0} = n_{e0}k_B T_e$（T_e 为电子温度），从式(2.65)可得出如下色散关系：

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - 3\frac{k_B T_e}{m_e}k^2 = 0 \tag{2.67}$$

上式即是广为周知的 Bohm - Gross 色散关系。在 T_e 或者 k 很小的极限状况下，就可得到所谓的 $\omega = \omega_{pe}$的冷等离子体振荡，表明弱碰撞等离子体趋向于维持频率 $\omega \approx \omega_{pe}$的振荡。这里的讨论只是入门性的，关于电子等离子体波及其与其他波的相互作用还有许多可讲述内容。想要研究这些波的读者，应当认真地学习有关波衰减的等离子体物理书籍和关于这些波之间相互作用的激光 - 等离子体相互作用专业书籍。

现在转向式(2.62)右部最后一项，讨论各组分之间的碰撞动量交换。我们指出，该项给出了相对于指定组分动量计算的动量交换率，因而当下标 j 和 l 互换时系数 ν_{jl}不是对称的。这一点很容易从下面的例子直观地想象到：如果把一个保龄球掷进一个充满着“嘣嘣”乱跳乒乓球的房间，乒乓球对于保龄球的作用太微小，所引起的保龄球动量改变相对于其初始动量来说可以忽略不计。反之，保龄球则可引起与其相互作用的乒乓球动量的巨大变化。用下标“b”和“p”分别表示保龄球和乒乓球，则有 $\nu_{bp} \ll \nu_{pb}$。相仿地，电子和离子的式(2.62)情形中则有 $\nu_{ie} \ll \nu_{ei}$。事实上，离子的方程式(2.62)最后一项差不多总可以忽略，但在电子的方程式中往往十分重要。下面进一步考察电子方程式中出现的系数 ν_{ei}。

首先回想与碰撞相互作用有关的一些基本关系式。如果 a 类粒子的密度为 n_a，与密度为 n_b 的 b 类粒子相互作用，它们之间具有单一的固定的相对速度 $v_{ab} = |\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b|$，在此速度下这种相互作用具有截面 σ_{ab}，相应的平均自由程为

$$\lambda_{mfp} = 1/(n_b\sigma_{ab}) \tag{2.68}$$

相互作用的时间为 $1/(n_b\sigma_{ab}v_{ab})$，相互作用的频率则为

$$\nu_{ab} = n_b\sigma_{ab}v_{ab} \tag{2.69}$$

许多情形中（包括本节所考察的情形在内），相互作用截面与 v_{ab}有关，而 v_{ab}并非固定不变

的。此时，两个组分速度分布的描述应当分别采用分布函数$f_a(v_a)$和$f_b(v_b)$，它们都已进行归一化，如$\int f_a(v_a)\mathrm{d}v_a = 1$，这里的积分限为全部速度区间。一般说来，上述相互作用频率为

$$\nu_{ab} = n_b\iint f_b(v_b)f_a(v_a) \times \sigma_{ab}(|\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b|) \times |\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b|\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a\mathrm{d}\boldsymbol{v}_b \tag{2.70}$$

下面考虑等离子体中库仑碰撞的一些特殊性质，包括在反平方律作用力下粒子的相互作用，即卢瑟福散射，其结果在经典力学或等离子体物理教科书中都有推导。两个孤立粒子之间的作用力可以延伸至无限远，但是其他粒子的存在会产生屏蔽效应，以至于只有当粒子之间相距不超过大约屏蔽距离大小时，它们的碰撞才是有作用的。在这样的考虑下，动量交换截面推导的结果为

$$\sigma_{ab} = 4\pi\ln\Lambda\left(\frac{q_a q_b}{m^* v_{ab}}\right)^2 \tag{2.71}$$

式中m^*为折合质量，$m^* = m_a m_b/(m_a + m_b)$；$\ln\Lambda$为考虑了屏蔽效应的库仑对数。建议读者参考任何一种等离子体物理的教科书，了解关于$\ln\Lambda$的讨论，Shkarofsky 等人写的书中有全面的论述。由于必须考虑很多因素，这样的论述篇幅很长。另外，高能量密度物理系统中屏蔽距离通常较短，致使$\ln\Lambda$趋于其量级为 1 的低极限值。高能量密度物理研究一般可采用如下近似式，即

$$\ln\Lambda = \max\{1, [24 - \ln(\sqrt{n_e}/T_e)]\} \tag{2.72}$$

式中n_e和T_e的单位分别是cm^{-3}和 eV。

关于式(2.71)最重要的一点是，相互作用截面正比于$1/v_{ab}^4$，因此每个速度对于动量总交换率的贡献正比于$1/v_{ab}^3$。所以相对速度较低的粒子对主导了库仑碰撞效应，而高速相对运动的粒子几乎没有贡献。由此得到一个结论：等离子体温度上升时，所有的库仑过程（从动量交换到电离以至激发）都变得越来越弱。

式(2.70)给定了在与离子相互作用过程中电子动量的变化，对于满足麦克斯韦分布的粒子速度，计算该式中的积分得到的最终结果为

$$\nu_{ei} = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}}\frac{Z\omega_{pe}^4}{n_e v_e^3}\ln\Lambda = 3 \times 10^{-6}\ln\Lambda\frac{n_e Z}{T_e^{3/2}} \quad (1/\mathrm{s}) \tag{2.73}$$

式中$v_e = \sqrt{T_e/m_e}$，右部中n_e和T_e的单位分别为cm^{-3}和 eV。

图 2.6 表示$n_e - T_e$平面上ν_{ei}/ω_{pe}的等值线。计算中使用了两个不同的Z估计值，其中图 2.6(a)是$Z = 3.5$的结果，代表低Z物质（如塑料）的情况，图 2.6(b)是$Z = 0.63\sqrt{T_e}$的结果，代表第 3 章中讨论的高Z物质情况。只要Z值超过 0.1，任何电子等离子体波都将在 10 个循环内（也就是在飞秒时间尺度内）衰减。式(2.62)最后面的阻力项，在波动方程中引入了一个正比于$\partial n/\partial t$的项，从而在色散关系中引入了一个虚部项，使得该关系蕴涵的频率不再是纯粹的实数，频率的虚部将导致衰减。可以看出，大部分高能量密度情况下这种衰减非常强烈。

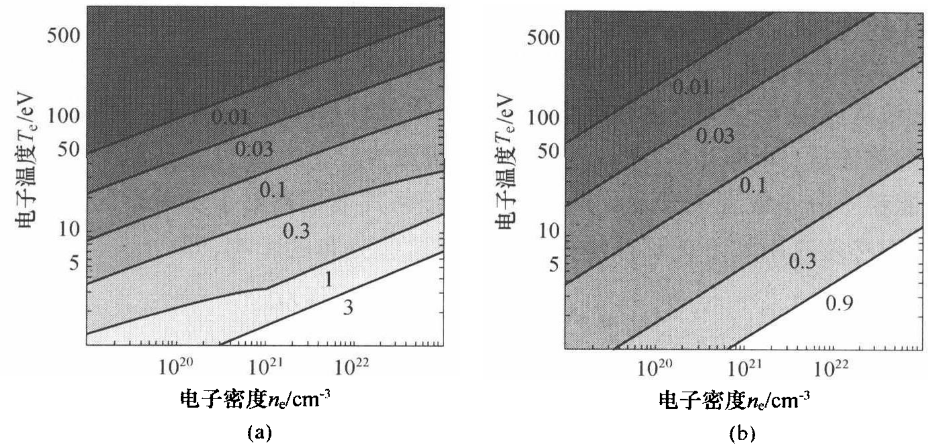


图 2.6　碰撞特性参数 ν_{ei}/ω_{pe} 的等值线

(a) 低 Z 等离子体；(b) 高 Z 等离子体。

习题 2.8

导出式(2.65)的另一种形式，并具有式(2.62)最后面阻力项的合适变型。

有时人们对碰撞平均自由程感兴趣，例如，需要估算热输运是否重要，或者想把计算网格尺度与这种自由程进行比较。碰撞自由程的估计式为

$$\lambda_{mfp} = v_e/\nu_{ei} = (1/\nu_{ei})\sqrt{T_e/m_e} \tag{2.74}$$

2.4.3　动理学的描述

仅当所有粒子的速度分布都是麦克斯韦分布时，上面所有的方程才是严格正确的。这意味着，在速度 v 周围小区间 dv 之内，组分 S 的粒子数由下式给定

$$f_S(v) = \left(\frac{m_S}{2\pi k_B T_S}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-m_S v^2}{2k_B T_S}\right) \tag{2.75}$$

式中 T_S 和 m_S 分别为组分 S 的温度和质量。

任何速度分布都必须适当地归一化，上述情形则要求作如下的归一化，即

$$\int f_S(v)\,dv = 1 \tag{2.76}$$

读者应注意到如式(2.76)所示，把$f_S(v)$归一化或者把粒子密度 n_S 归一化，都是很普通的步骤。文献中给出的一些特别的归一化往往不加定义，有些论文甚至在工作进程中变更归一化的定义。如果粒子速度分布不是麦克斯韦形状的，但是所考察的相互作用由粒子具有的平均能量所决定，因而上述流体运动和其他方程式都是准确的，虽然某些系数值有所变化，还需要“温度”进行非热力学定义(参见 2.3.3 节中的讨论)。

另外一些场合中分布函数有较强的“尾巴”，会产生人们感兴趣的现象。能量较低时，这种分布通常具有麦克斯韦分布形状，只要存在影响到粒子的波或者不稳定性，人们就经常看到多出一些能量高于热能的粒子，这就是速度分布出现的“尾巴”。第 8 章中讨论的激

光-等离子体不稳定性往往产生这样的指数型“尾巴”(虽然对其原因还未充分理解)。在空间体系和天体物理学中,人们经常遇到幂次律型的“尾巴”,一个重要的例子是宇宙射线的分布,其通量以 $1/v^3$ 方式下降,意味着分布函数的标度关系为 $1/v^4$。其他有意义的情形如向靶内的热输运(见8.1.5节),“尾巴”的结构更为复杂。

当高能粒子分布或者关于麦克斯韦分布的任何其他偏离对于所考察的动力学行为十分重要时,人们必须改用如下玻耳兹曼方程来研究这些分布的影响,即

$$\frac{\partial f_{\mathrm{S}}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\mathrm{S}}+\frac{1}{m_{\mathrm{S}}}\boldsymbol{F}\cdot\nabla_v f_{\mathrm{S}}=\left(\frac{\delta f_{\mathrm{S}}}{\delta t}\right)_{\mathrm{C}} \tag{2.77}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 为作用于每个粒子的所有力之和;∇_v 为速度空间的梯度算子,有时也写为 $\nabla_v=\partial/\partial\boldsymbol{v}$,下标“C”表示碰撞。$\boldsymbol{F}$ 往往是洛伦兹力 $q(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{B})$,但是还可包括任何存在的其他力。式(2.77)基本上是一个连续性方程,把 f_{S} 的当地时间变化率与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 六维相空间中 f_{S} 的流量以及式子右部 f_{S} 的源项关联起来。碰撞导致粒子在速度空间微元中的突然出现,式(2.77)右部就是碰撞引起的 f_{S} 变化率。在 Shkarofsky 等人的书中对此项作了详细讨论。当其右部为零时,式(2.77)即成为所谓的符拉索夫(Vlasov)方程,它能够有效地描述无碰撞等离子体中的许多现象。

2.5 单个粒子的运动

在大多数非相对论高能量密度系统中,磁场的作用较小。即使如此,在这些系统的边界上磁场仍是很重要的。另外,在一些人们希望通过高能量密度实验得到理解的天体物理系统中,磁场也是重要的。再者,通过在高能量密度方法的使用和质量密度较低系统的研究,人们企图检验高能磁化等离子体中的一些问题。最后,相对论高能量密度系统往往在本质上就与磁场有关。基于上述各项理由可知,了解粒子在磁场中运动的一些简单知识对于高能量密度系统研究人员十分重要。学习过等离子体物理的一些读者已经具有了这方面的知识,但对于没有等离子体物理背景的读者本节将作有关介绍。第11章中将讨论相对论系统运动的某些问题。

单个粒子的运动一般由牛顿第二定律描述,该定律的非相对论形式为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{F} \tag{2.78}$$

式中 $\boldsymbol{v}$、m 和 q 分别为粒子的速度、质量和电荷;$\boldsymbol{F}$ 为非电磁作用力。

由于洛伦兹力中有叉乘运算,最好把 $\boldsymbol{v}$ 写为与垂直和平行于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分量之和,即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\perp}+\boldsymbol{v}_{/\!/} \tag{2.79}$$

沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{/\!/}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}_{/\!/}+\boldsymbol{F}_{/\!/} \tag{2.80}$$

式中下标“//”表示与 $\boldsymbol{B}$ 平行的矢量分量。类似地,下标“⊥”表示与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的矢量分量。

垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的运动更加复杂一些,但恰巧可以再分为不同的环节来考虑。首先假定

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}=0$,垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的运动方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{c}\boldsymbol{v}_{\perp}\times\boldsymbol{B} \tag{2.81}$$

可以看出,$\boldsymbol{v}_{\perp}$ 的时间导数实际上垂直于 $\boldsymbol{v}_{\perp}$,而且幅度不变化,也就是说其矢端作圆周运动。人们容易识别出该圆周的中心是磁场的一条磁力线,或者说该粒子绕着这条磁力线旋转运动,其轨道半径称之为拉摩半径(Larmor Radius)。从式(2.81)中知道确定此圆周运动的力,确定拉摩半径 r_{L}的式子为

$$\frac{mv_{\perp}^{2}}{r_{\mathrm{L}}}=q\frac{v_{\perp}B}{c} \tag{2.82}$$

即有

$$r_{\mathrm{L}}=\frac{mv_{\perp}}{qB/c}(\mathrm{cgs})=\frac{mv_{\perp}}{qB}(\mathrm{SI}) \tag{2.83}$$

粒子沿轨道旋转的频率称为回旋频率,以 rad/s 为单位,在 cgs 单位制中可写为 qB/mc,在 SI 单位制中则为 qB/m。

为了找出粒子运动的下一个环节,假设电场 $\boldsymbol{E}$ 不为零,把粒子速度写成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{v}_{/\!/} \tag{2.84}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}$ 为粒子的回旋运动速度;$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ 为新引入的“漂移”运动速度,这是由电场作用引起的,仍垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$。漂移运动的方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{2.85}$$

为了确定电场 $\boldsymbol{E}$ 在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的作用,把式(2.85)两边对 $\boldsymbol{B}$ 进行叉乘,借助于矢量运算公式,得到

$$\frac{m}{q}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}+\frac{B^{2}}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} \tag{2.86}$$

对于不变的场,$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ 也不随时间变化,上式给出其解为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}=\frac{c}{B^{2}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\quad(\mathrm{cgs}) \tag{2.87}$$

因此,粒子沿着与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都垂直的方向做漂移运动。这种行为的一个有意义的方面是,无论正粒子或者负粒子都朝同样的方向漂移。类似的推导表明,任意力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的漂移运动速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}=\frac{c}{q}\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{B^{2}}\quad(\mathrm{cgs}) \tag{2.88}$$

如果此力与电荷无关,则它所引起的漂移运动将产生电流。

习题 2.9

试求粒子轨道的尺度及方向,并根据基本的电磁学定律解释为什么多个粒子运动的方向与一个粒子相同。用图形表示,为什么 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 驱使粒子沿同样的方向做漂移运动。

通常情况下磁场具有空间梯度,这也会导致漂移运动,称为磁场梯度漂移。沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的磁场梯度很小,因而有

$$\nabla B \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.89}$$

把轨道中心处的磁场记为 $\boldsymbol{B}_0$,粒子所在处的磁场则可写为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \cdot \nabla B \tag{2.90}$$

因此,当 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} = 0$ 时,垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的粒子运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{mc}\boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B}_0\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \cdot \nabla B}{B_0}\right) \tag{2.91}$$

如果把 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ 写为

$$\boldsymbol{v}_{\perp} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} + \frac{q}{m}\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \times \boldsymbol{B}_0 \tag{2.92}$$

式中已把轨道回旋速度以含 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}$ 的项表示。经过代入和向量运算,式(2.91)变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \cdot \nabla B}{B_0}\right)\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} + \frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} \times \boldsymbol{B}_0 \tag{2.93}$$

这是一个即时方程式,实际上我们感兴趣的是许多粒子轨道的平均行为,把上式沿一个轨道取平均,并注意到

$$\langle \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \cdot \nabla B) \rangle = \frac{1}{2}r_{\mathrm{L}}^2 \nabla B \tag{2.94}$$

再把平均方程对 $\boldsymbol{B}$ 进行叉乘,如前面那样得出磁场梯度漂移的运动速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{mv_{\perp}^2}{2q}\frac{\boldsymbol{B} \times \nabla B}{B^3} \tag{2.95}$$

关于磁场中带电粒子漂移运动的简短介绍到此结束。

粒子运动的另一方面也值得提及。由于 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$,磁场 $\boldsymbol{B}$ 的幅度沿着初始磁力线方向的任何变化一定伴随着 $\boldsymbol{B}$ 的某个其他分量的变化。最简单的例子是初始时笔直的磁力线会互相挤在一起,如用一个励磁线圈产生 $\boldsymbol{B}$ 的向内的径向分量。这个另加的磁场分量的洛伦兹力,使得粒子在其轨道运动中以及沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的运动中,或加速或减速。由于磁力不做功,这种变化并不改变粒子的总能量,但使得 $\boldsymbol{B}$ 方向运动和轨道运动的能量之间发生重新分配。

有多种方法可用来分析粒子的行为,一方面可以考虑明显作用于粒子的力,以确定粒子的运动;另一方面应注意到粒子的运动显示了一个沿圆环的电流流动,因此粒子具有磁矩,而且还可以确定因磁场变化在这环圈周围引起的电场作用(这种计算很容易做)。无论哪种途径,都可看到粒子的磁矩是不变的,此结果可用下式表示,即

$$\frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}^2}{B} = \text{const.} \tag{2.96}$$

式(2.96)的结果表明,B 增强时 $v_{\perp}$ 也增大,这样继续下去直至粒子的所有能量都转移到轨道运动中去,此时粒子将改变方向并开始沿着使 B 下降的方向运动。磁场增加到最大时,可使得入射于该磁场的许多粒子被反射出来。这样的磁场结构称为磁镜。

第3章　高能量密度等离子体的性质

2.1节中关于能量的讨论全都建立在多方气体概念的基础上。由考察密度与速度的涨落而得到的声波速度，依赖于压力对密度的变化关系。这些观察只是揭示了冰山的一角，巨大的冰山还在于所谓的封闭性问题。流体力学方程组可以用对微观粒子速度分布取矩的统计力学方法导出，就像等离子体物理研究生课程中介绍的那样。这里我们记（微观）粒子的速度为 v，流体微团的速度为 u。连续性方程即是取 v^0 的矩，动量方程是取 $\boldsymbol{v}^1$ 的矩，能量方程是取 $\boldsymbol{v}^2$ 的矩，热输运方程则是取 $\boldsymbol{v}^3$ 的矩，还可以这样一直做下去。由于每一个矩方程都含有涉及更高一阶矩的项，这就产生了方程组的封闭问题。例如，式(2.1)涉及到动量(ρu)，式(2.2)涉及到能量密度（如 p），式(2.3)则涉及到热通量（如果未曾假设其为零）。若已假定热通量为零，则式(2.1)至式(2.3)可以构成一组封闭的方程组。一般说来，需要假设粒子速度分布的某个矩或者为零，或者是低阶矩的已知函数，才能得到封闭的流体力学方程组。作为第二种情形的例子，如有时把能量方程表示为一个关于温度和热通量（可写成 $-\kappa_{th}\nabla T$ 的形式）的方程，也可以得到三个方程式的流体力学封闭方程组。

多方气体和上面一个例子的重要性在于说明，为了成功求解连续性、动量和能量方程组（即使是数值解），一般必须给定内能、压力、密度和温度之间的关系。指定这类关系的关系式称为物态方程（Equation Of State，EOS）。本章讨论物态方程，从常用于极限状况和一般估算的简单物态方程开始。该节最后对电子的作用作了更广泛的讨论，因为深入理解电子的行为对于掌握高能量密度系统中物质的性质至关重要。3.2节研究两个问题，首先讨论电离度，因为高能量密度等离子体总有些电离，但很少是完全电离的。接着论述第2章中提出的两个问题，即当德拜长度小于原子尺度时离子会如何表现，以及强库仑相互作用如何在热力学行为中显现出来。在此基础上，3.3节中就能考察电离等离子体的热力学性态，在此节最后我们才会懂得高能量密度等离子体物态方程的基本原理，至此完成了对第2章提出问题的全面论述，也就是为什么传统等离子体物理的假定不适用于高能量密度等离子体。我们还将进一步简短讨论一些更复杂的、对于计算机数值模拟很重要的物态方程（3.4节），论述EOS的实验室测量与天体物理学问题的关系（3.5节），并介绍测量EOS的具体方法（3.6节）。

在具体介绍之前，首先考虑一个与天体物理学有关的EOS例子。图3.1是氢的理论相图，还显示了三个有意义天体的相态位置，即木星（Jupiter）、典型的棕矮星（Brown Dwarf）和典型的矮星（Dwarf）。此相图依据一个模型画出，各条曲线的位置取决于该模型，也许存在错误，但压力的大致范围是正确的。氢的理论相图中包括了分子氢、原子氢以及金属氢的区域。金属氢中电子自由运动，并可导电。金属氢传输电流，维持着木星中的巨大磁场。上述各区域都有边界，这些边界也许是逐渐变化的过渡带，也许是绝然跃变的相变边界。在这个

特殊的模型中，原子氢到金属氢的转变是一种相变。总之，透彻理解 EOS 对于天体物理学客体的详尽了解是极其重要的。

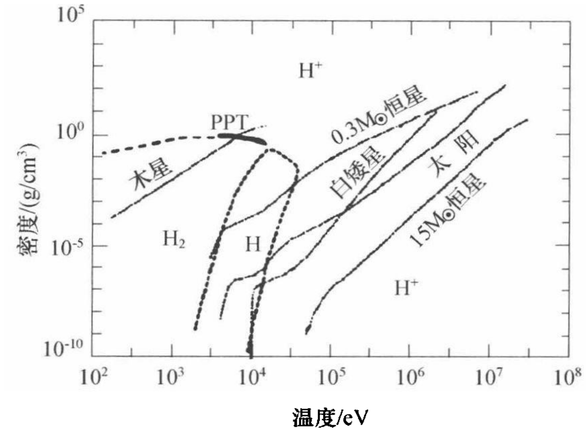


图 3.1　氢的理论相图

黑线段表示理论上的等离子体相变，点线表示各种天体物理学客体的理论状态途径。

（本图原型取自 Saumon 等的论文，Astrophys. J. Suppl. 99, 713, 1995）

3.1　简单物态方程

图 3.2 表示一个 Ia 型超新星的爆发图像，这次爆发的亮度超过了其周围的银河系，这并不是罕见的现象。目前的理解是，一个白矮星从其周围吸聚质量，当其总质量刚超过 1.4 个太阳质量时就出现 Ia 型超新星爆发。因为此时引力已足以克服简并电子的压力（见 3.2 节），从而引发该星的引力坍缩。但是此星体不会完全坍缩，因为坍缩开始时释放出来的能量使构成白矮星的碳和氧加热，进而引起剧烈的聚变燃烧使星球爆裂散开。自爆发开始，该星体的性质就与本章内容密切相关，其外层可以用理想气体的多方物态方程准确描述（3.1.1 节），其内核的描述必须使用费米的简并物态方程（3.1.3 节），聚变燃烧所加热的区域则需要采用辐射主导的等离子体物态方程（3.1.2 节）。这些简单的模型采用了相关的状态及概念，白矮星和 Ia 型超新星的细致处理则需要更先进的模型。

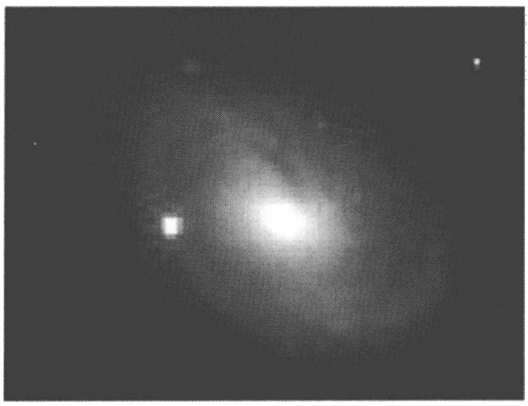


图 3.2　银河系边缘附近一个由 Ia 型超新星产生的明亮的发光光斑

（本图取自哈佛大学天体物理中心 Jha 等人的工作）

3.1.1 多方气体

许多情况下，多方气体物态方程是很有用的近似。在相当高的温度下，任何物质的行为都将类似于理想气体。实际上一旦温度远高于任何物质完全电离所需要的程度，它们的行为就可用多方物态方程很好描述。即使是辐射主导的等离子体，也可以用这种方法描述。再者，即使这种方法不十分准确，概念分析和解析计算中也经常采用多方气体的描述。下面是相应于多方理想气体的物态方程：

$$p = \frac{\rho(1+Z)k_B T}{A m_p} \tag{3.1}$$

$$c_s^2 = (\partial p/\partial \rho)_s = \gamma p/\rho \tag{3.2}$$

以及

$$\rho\varepsilon = p/(\gamma - 1) \tag{3.3}$$

式中 ε 为比内能；k_B 为玻耳兹曼常数；T 为温度；Z 为平均电离度；A 为流体中离子的平均原子量；m_p 为质子的质量。

下面讨论中已假定 Z 和 γ 都是常数，但对于高能量密度物理来说，这往往是一个较差的假定，下一节中将说明其原因。

式(3.1)实质上可看作玻义耳定律，在关于式(2.6)～式(2.9)的讨论中已经看出式(3.2)的重要性，这里再次指出此式的偏导数是在等熵条件下取的，用下标 s 表示。如果气体是 n 个自由度的理想气体，则 $\gamma = 1 + 2/n$，这些式子意味着每个粒子具有的能量为 $(n/2)k_B T$，这是类似于统计力学的结果。已经证实，引入多方气体的比定容热容 c_V 的定义很有用处，即有

$$c_V = (\partial\varepsilon/\partial T)_\rho \tag{3.4}$$

根据式(3.1)有

$$(c_V)_{Z,\gamma} = \frac{(1+Z)k_B}{(\gamma-1)A m_p} \tag{3.5}$$

注意，上式仅当 Z 和 γ 都是常数时才可使用。

进一步探讨式(3.3)，因为它经常用来定义 γ。如果用此式定义 γ，并且认为 p 和 ρ 是独立的热力学变量，即有 $\varepsilon = \varepsilon(p,\rho)$，可得到

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = (\gamma-1)\varepsilon + (\gamma-1)\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \tag{3.6}$$

此外，等熵条件必须要求热流为零。热力学第一定律给出

$$d\varepsilon = dq - p\,d(1/\rho) \tag{3.7}$$

式中 dq 为热流的差分；右部第二项为机械功或“$p\,dV$”功。

由于 $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s = p/\rho^2$，即可导出 $(\partial p/\partial\rho)_s = \gamma p/\rho$。这就证明了式(3.3)定义的 γ 与声速的通常定义以及多方气体绝热过程中 $p \propto \rho^\gamma$ 的定义是一致的。然而，若 γ 不是常数，则式(3.4)是不完全的，需要采取某些更加普遍的研究方法，这将在 3.3 节中探讨。

3.1.2 辐射主导的等离子体

黑体辐射以及辐射作用很重要或占主导地位的系统的性质，将在第 6 章和第 7 章中讨论。辐射压力 p_R 为辐射能量密度的 1/3，可以表示为

$$p_R = \frac{4\sigma}{3c}T^4 \tag{3.8}$$

式中 T、c 和 σ 分别为温度、光速和类似于黑体辐射情形的斯忒藩 - 玻耳兹曼常数。

由于辐射压力正比于温度 T 的四次方，同时物质的压力与 T 的一次方有关，所以在很高温度下辐射压力将完全占据主导地位。这种情况发生在例如超新星爆发中受冲击的物质内部以及中子星或黑洞的附近。根据辐射压力相等于物质压力的式子，就可确定这个转变温度，即

$$T = \frac{1}{1.6\times10^{-9}}\left(\frac{3k_B^4 c\rho(1+Z)}{4\sigma m_p A}\right)^{1/3} = 2.6\left(\frac{\rho(1+Z)}{A}\right)^{1/3}(\text{keV}) \tag{3.9}$$

式中 ρ 的单位是 g/cm^3，由于 $k_B = 1.6\times10^{-9}$ erg/keV，可看出上式右部括号外面也就是温度采用了能量单位 keV。括号内的以 k_B 为单位的能量和温度，必须与 σ 和所出现的其他量的单位相一致。实验室系统中或恒星内部，ρ 约为 1g/cm^3 的若干量级，达到千电子伏特量级的温度是辐射成为主导所需要的。通常，天体物理密度之下需要的温度则低得多，除了那些趋于"光学薄"的系统之外（见第 6 章），意味着辐射压力远低于式(3.8)给定的值。

为了利用简单的方程描述辐射为主导的等离子体，冀求确定这种情形中的 $\partial p/\partial\rho$，也就是确定辐射压力如何随等离子体的密度而变化。这个要求通常是可实现的，因为欲使辐射温度保持在足以使系统处于辐射主导状态的高值，辐射的平均自由程应当小于所考察的物理系统的长度尺度，即表示物质与辐射是强耦合的，它们具有共同的温度。又因为这种强耦合，物质密度的变化必然涉及包含一定辐射量的物质体积的变化。这些讨论为下面考察辐射主导的等离子体的多方指数做了准备。

使用统计力学中标准的推导方法，可得光子气体压力为

$$p = -\sum_j \bar{\sigma}_j \frac{\partial\varepsilon_j}{\partial V} \tag{3.10}$$

式中的求和号遍及所有可能的状态 j，每一状态的平均占据率为

$$\bar{\sigma}_j = 1/[\exp(\varepsilon_j/k_B T) - 1]$$

状态 j 具有的能量为 ε_j。式(3.10)的意义是，压力即是体积增大时内能变化率的负值。某状态下光波长由于压缩或膨胀而减小或增大时，该状态的辐射能量也随体积而变化。可以看出，若考虑边长为 L 的立方格子的简单例子，给定的状态沿格子每一边都是整波长数。因此每个状态的波数 k_j 均正比于 $1/L$，可以写出 $\varepsilon_j = \hbar c k_j \propto L^{-1} \propto V^{-1/3}$，这里 $\hbar$ 是普朗克常数，也就是有

$$-\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial V} \propto V^{-4/3} \propto \rho^{4/3} \tag{3.11}$$

从而有 $p \propto \rho^{4/3}$，这表明辐射主导的等离子体为 $\gamma=4/3$，采用 $\gamma=4/3$ 的流体力学欧拉方程组就可描述这样的系统。关于这种做法合理性的进一步讨论，可参看本书后面有关辐射流体力学的章节。

3.1.3　费米简并的物态方程

通常的等离子体中，粒子通过库仑碰撞形成热压力，抵抗对等离子体的压缩，这是一种经典作用。但当等离子体或其他物体变得相当稠密时，与电子有关的量子力学效应将产生压力并抵抗压缩。电子服从泡利（Pauli）的不相容原理，每一个量子态最多只能被一个电子占据。我们将看到，这意味着大多数高能电子是冷的，高密度物质可以是十分高能的。大多数电子处于低能状态的物质可用费米简并物质来表述。对于大行星、白矮星和惯性约束聚变内爆过程或者压缩固体的其他高能量密度实验来说，费米简并物质的物态方程极其重要。在 3.3 节中将会看到，电子是费米子的事实在很宽广的状态范围中发生影响。在任何有关统计物理的书中（包括朗道和栗弗席兹所著的理论物理学多卷教程），都可找到有关电子行为的基本推导。

图 3.3 表示几种温度下稠密物质中自由电子的能量分布，很冷状况下稠密物质的能量分布是台阶状函数，即所有电子处于最低的可进入状态。当温度上升，有些这样的状态被废弃，能谱出现高能部分的“尾巴”。占据率为 50% 的状态的能量称为费米能，0K 温度下的**费米能**为

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{3}{8\pi}n_e\right)^{2/3} = 7.9n_{23}^{2/3}(\text{eV}) \tag{3.12}$$

式中 m_e、n_e 分别为电子的质量和密度；n_{23} 是以 $10^{23}/\text{cm}^3$ 为单位的电子数密度，$10^{23}/\text{cm}^3$ 这个值既是质量密度接近 1g/cm^3 的低 Z 等离子体中电子密度的量级，又是典型金属中传导电子密度的量级。

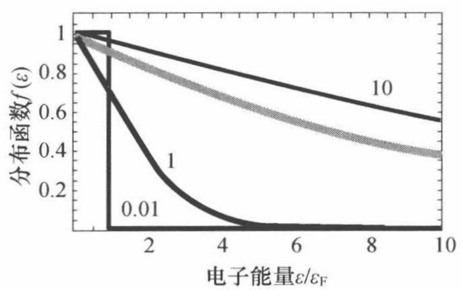


图 3.3　稠密物质中电子能量的分布
纵坐标的分布函数以零能量处的值进行归一化，
横坐标的电子能量以费米能进行归一化，
图中曲线表示分布函数与电子能量的关系，
温度参数是 $k_BT/\varepsilon_F=0.01$，1 和 10。
灰色曲线表示 $k_BT/\varepsilon_F=10$ 的麦克斯韦分布。

任何物质中都可能存在附属于特定原子的束缚电子，它们对于式（3.12）中的电子密度 n_e 没有贡献。如果把束缚电子的能谱以图 3.3 的归一化尺度方式表示出来，它们将呈现为负电子能量处的一个尖峰。

3.2 节中将讨论电离度以及自由电子与束缚电子的相对个数。对于所考察的物理系统，从式（3.12）可得出许多结论。该式意味着密度远低于固体密度、被加热到几十电子伏特至几百电子伏特的等离子体中，电子不是费米简并的；反之，在惯性约束聚变内爆过程中，当等离子体被压缩到超过 100 倍固体密度时，费米能达到几百电子伏特，这样的等离子体可以看作相当冷，以至于这些电子的物态方程是**费米简并**的。在**简并温度** T_d 以上，电子可以近似看作自

由粒子，T_d 的值可以令 $k_B T_d = \varepsilon_F$ 而求得。

尽管费米简并物质与通常气体有着明显差别，其物态方程仍然十分类似于 $\gamma = 5/3$ 的多方理想气体。上述两种情形中式(3.3)都可应用，也就是有 $p = (2/3)\rho\varepsilon$。此外，理想气体中的电子压力 $p = n_e k_B T$，在费米简并物质中则为 $p_F = (2/5)n_e\varepsilon_F$，进一步计算给出

$$p_F = \frac{2}{5}n_e\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{20m_e}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \tag{3.13}$$

改为实用单位制，则为

$$p_F = 0.50 n_{23}^{5/3} = 9.9\left(\frac{\rho}{A/Z}\right)^{5/3} (\mathrm{Mbar}) \tag{3.14}$$

式中：$(A/Z) \approx 2$；密度 ρ 采用 cgs 制单位。当 $T = T_d$ 时，式(3.14)近似地过渡为式(3.1)，虽然从图 3.3 中可以看出，即使当 $T = 10T_d$ 时电子分布仍然与麦克斯韦分布显著不同。

习题 3.1

典型的惯性约束聚变设计需要把氘氚(DT)燃料压缩到其液态密度($0.25\mathrm{g/cm^3}$)的 1000 倍。假定压缩过程是等熵的，燃料一直处于 0K。试确定压缩每克燃料所需的能量，并与假定燃料为理想气体，把 1g 燃料压缩到同样密度所需能量作比较，后一情形中已认为被压缩理想气体的最终温度是点火温度 5keV。

温度接近简并温度时部分简并物质的具体研究，涉及一些直接的数值积分运算。对高能量密度物理有意义的离子数密度范围为 $10^{19}/\mathrm{cm^3} \sim 10^{24}/\mathrm{cm^3}$，但在惯性约束聚变的压缩靶丸中可高达 $10^{26}/\mathrm{cm^3}$。此时，所有电子都带有费米简并性质，对应的电子密度范围为 $10^{19}/\mathrm{cm^3} \sim 10^{26}/\mathrm{cm^3}$，其上限对应于离子密度约 $10^{24}/\mathrm{cm^3}$ 的高 Z 物质，或者惯性约束聚变中被压缩的低 Z 物质。有意义的电子温度范围为 1eV ~ 1000eV。下面研究在上述状态参数范围中电子的行为。

把一个电子具有某具体动量值的概率密度在动量 χ_e 的全部区间上进行积分，就可给出电子密度 n_e。把电子能量写为 $\varepsilon_e = \chi_e^2/2m_e$，则有

$$n_e = \frac{8\pi}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\chi_e^2 \mathrm{d}\chi_e}{\exp[(-\mu + \varepsilon_e)/k_B T_e] + 1} \tag{3.15}$$

式中 μ 为化学势，具有能量单位。

上述积分中 $\chi_e^2 \mathrm{d}\chi_e$ 给出了状态密度的尺度，其余项则给出一定状态被一个电子所占据的概率。把式(3.15)改写成常用形式：

$$\theta = \frac{T_e}{T_d} = T_e\left[\left(\frac{8\pi}{3n_e}\right)^{2/3}\frac{2m_e k_B}{\hbar^2}\right] = \left[\frac{3}{2}F_{1/2}\left(\frac{\mu}{k_B T_e}\right)\right]^{-2/3} \tag{3.16}$$

上式定义了电子温度与简并温度的比值 θ。下面还将应用函数 F 的一般定义：$F_n(\phi) = \int_0^\infty x^n[\exp(x-\phi)+1]^{-1}\mathrm{d}x$。

参数 θ 的有意义范围为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$。

化学势是向处于等熵等容条件下的系统中加入一个粒子所需要的内能。费米简并系统的化学势是正的，即使在零熵情形加入一个新粒子也需具有费米能，所以必须投入能量才能把新粒子放进去。对于经典系统，化学势 μ 是负的，新粒子可以零能量加入该系统。但为了保持熵不变化，该系统的内能还必须减少。$\mu/k_B T$ 的极限性态十分有意义，在简并状态下 $\mu = \varepsilon_F$，因而有

$$\frac{\mu}{k_B T_e} = \frac{\varepsilon_F}{k_B T_e} = \frac{1}{\theta} \tag{3.17}$$

把经典系统极限下的经典化学势记为 μ_c，可以得到

$$e^{\mu_c/k_B T_e} = \frac{n_e \hbar^3}{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}} \tag{3.18}$$

因而

$$e^{\mu_c/k_B T_e} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \tag{3.19}$$

当 $\theta = \theta_{crit} = 0.827$ 时，$\mu_c = 0$。Atzeni 和 Meyer - ter - Vehn 给出一个可以伸缩的跨越上述两个极限的的拟合公式为

$$\frac{\mu}{k_B T_e} = -\frac{3}{2}\ln\theta + \ln\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right) + \frac{0.25054\theta^{-1.858} + 0.072\theta^{-1.858/2}}{1 + 0.25054\theta^{-0.858}} \tag{3.20}$$

变动比值 $\mu/k_B T_e$，由式(3.16)计算 θ 值，就可得出图 3.4 所示的曲线。此图还比较了由式(3.17)和式(3.19)计算的值，其中实曲线表示真实的比值，灰虚线表示经典极限情形，黑虚线表示费米极限情形。这个结果非常令人注目，当 $\theta > \theta_{crit}$ 时电子的化学势具有经典值，在 θ_{crit} 以下急剧转变到简并值。

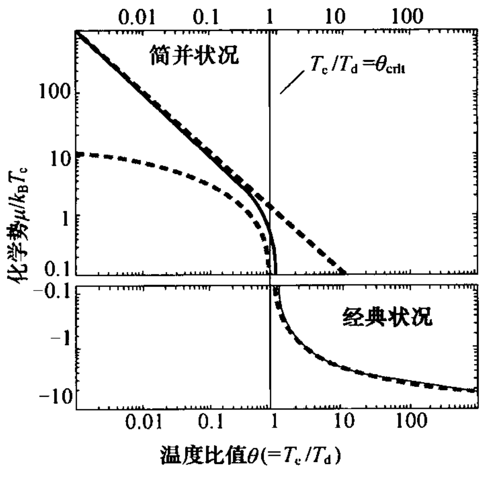


图 3.4　化学势 $\mu/k_B T_e$ 与 $\theta = T_e/T_d$ 的关系(经典情形中 μ 为负值)

习题 3.2

从概念上论证当μ/k_BT_e很大时，主导粒子在式(3.16)中的贡献是一个阶梯函数。数值计算该积分，以确定当μ/k_BT_e增大时该项多么快地变成为阶梯函数。

在状态被占据概率的区间上对各个状态的能量进行平均，就可以计算电子压力。对内能密度$n_e\varepsilon_e$的总积分为

$$n_e\varepsilon_e = \frac{3}{2}p_e = \frac{8\pi}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon_e\chi_e^2 d\chi_e}{\exp[(-\mu+\varepsilon_e)/k_BT_e]+1} \tag{3.21}$$

式中ε_e为每个电子的比内能；p_e为电子压力。

上式还可写成

$$n_e\varepsilon_e = \frac{3}{2}p_e = \frac{3}{2}n_ek_BT_e\theta^{3/2}F_{3/2}(\mu/k_BT_e) = n_ek_BT_e\frac{F_{3/2}(\mu/k_BT_e)}{F_{1/2}(\mu/k_BT_e)} \tag{3.22}$$

图3.5表示当$\theta<\theta_{crit}$时归一化电子压力p_e/n_ek_BT怎样随(μ/k_BT_e)增大。$\theta>\theta_{crit}$时，电子对压力和内能的贡献是经典的。尽管在压力方面存在差异，电子的行为始终如同$\gamma=5/3$的气体。在强费米简并条件下，电子压力和内能的作用完全超过了离子。但是由于与电离有关能量的缘故，在有意义的所有状况中，在等离子体内能方面电子不一定总是占有主导地位。3.2节中还要进一步探讨这个问题。

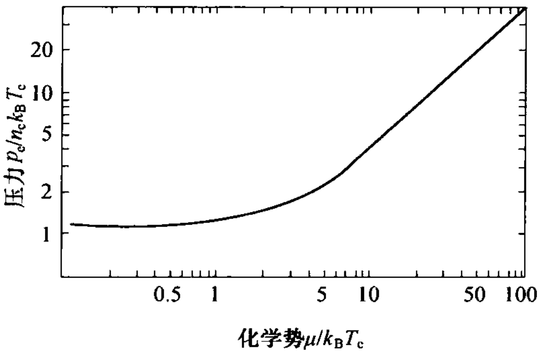


图3.5　归一化电子压力与化学势的关系
当μ/k_BT_e很大时电子压力趋于$(2/5)\mu/k_BT_e$；
当μ/k_BT_e趋于0时电子压力趋于1。
经典状况下归一化电子压力为1。

习题 3.3

证明在$T_e\to 0$的极限下，$n_e\varepsilon_e=(3/5)n_e\varepsilon_F$。

对于各种应用来说(包括惯性约束聚变在内)，电子热容量和熵的研究很有价值，更深入了解函数$F_n(\phi)$对此也有帮助。可以证明$F_n'(\phi)=n\phi'F_{n-1}(\phi)$，并且若$T_e$接近于零，则$F_n(\phi)=\phi^{n+1}/(n+1)$。还可知道，若$\phi=0$，则$F_{3/2}(0)=1.153$，$F_{1/2}(0)=0.678$。在经典极限下，式(3.18)给出

$$F_n\left(\frac{\mu}{k_BT_e}\right)=\frac{n_e\hbar^3}{2(2\pi m_ek_BT_e)^{3/2}}\Gamma(1+n) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\Gamma(1+n) \tag{3.23}$$

因而，在此极限下有$F_{3/2}=\theta^{-3/2}$，$F_{1/2}=(2/3)\theta^{-3/2}$。下面导出电子的比定容热容，即

$$c_V = \left.\frac{\partial(n_e\varepsilon_e)}{\partial T_e}\right|_{n_e} = \frac{3}{2}n_ek_B\left[\frac{5}{3}\frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{\mu}{k_BT_e} + \frac{1}{k_B}\frac{\partial\mu}{\partial T_e}\right] \tag{3.24}$$

式中比定容热c_V的单位是每单位体积、每单位温度的能量；函数$F_{3/2}$和$F_{1/2}$的变元都是

$\mu/k_B T_e$，经典极限下可得出 $c_V=(3/2)n_e k_B$。简并极限下，在低温区可以把积分进行展开，得出 $c_V=(3/2)n_e k_B[\pi^2 k_B T_e/3\varepsilon_F]$，这就是在强简并物质中占主导地位的电子的贡献。任何统计物理书籍都从声子激发角度讨论离子的贡献，得出其与温度立方成正比的标度关系。

电子每单位体积的熵为

$$\frac{S}{V}=\left(-\frac{1}{V}\frac{\partial(pV)}{\partial T_e}\right)_{\mu,V}=\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial T_e}(n_e\varepsilon_e)\bigg|_{\mu,V} \tag{3.25}$$

式中 $-pV$ 为朗道与栗弗席兹的统计物理学书中所讨论的热力学势之一。

由式(3.24)可得

$$\frac{S}{V}=\frac{5}{2}n_e k_B\left[\frac{2}{3}\frac{F_{3/2}(\mu/k_B T_e)}{F_{1/2}(\mu/k_B T_e)}-\frac{2}{5}\frac{\mu}{k_B T_e}\right] \tag{3.26}$$

在经典极限下即为

$$\frac{S}{V}=n_e k_B\left[\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{n_e\hbar^3}\right)\right]=n_e k_B\left[\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}{4}\right)\right] \tag{3.27}$$

当 $T_e \ll \varepsilon_F$ 时，有

$$\frac{S}{V}=\frac{3}{2}n_e k_B\left(\frac{\pi^2}{3}\theta\right) \tag{3.28}$$

当温度趋于 0K，熵趋于零，这是理所当然的。

惯性约束聚变研究中，由于压缩过程中产生的冲击波增加了熵（见第 4 章），人们关心压力与熵的关系。因为压力正比于 $F_{3/2}$，密度正比于 $F_{1/2}$，重排式(3.26)得

$$p=\frac{2}{5}\frac{S}{V}T_e+\frac{2}{5}n_e\mu \tag{3.29}$$

当 T_e 和 S 趋于零，式(3.29)化约为式(3.13)。可以看出，在熵到达 $2n_e\mu/5$ 的阈值之前，压力对于熵值并不敏感。图 3.5 中表示得很清楚：当 $\mu\sim 5k_B T_e$ 或 $\theta\sim 0.2$，即 $T_e\sim 0.2T_d$ 时，压力曲线开始偏离 $2\mu\varepsilon_F/5$。

惯性约束聚变研究中称比值 p/p_F 为简并参数。由于 p/p_F 增大、聚变增益下降，这个参数具有重要的实际意义。一般说来，对于简并物质 $p/p_F=1$，并随 θ 而增大，在经典情形中则为 $(5/2)\theta$。θ 参数的实际重要性，在于对 p/p_F 做近似估算很有用处。Atzeni 和 Meyer - ter-Vehn 给出如下关于 p/p_F 的拟合公式：

$$\frac{p}{p_F}=\frac{5}{2}\theta+\frac{0.27232\theta^{-1.044}+0.145\theta^{0.022}}{1+0.27232\theta^{-1.044}} \tag{3.30}$$

习题 3.4

推导式(3.24)和式(3.26)，并讨论它们的差别。

3.2　电离等离子体

高能量密度等离子体中，中 Z 和高 Z 离子极少是完全剥离的（即其所有电子都被移

除)。仅当温度趋于而且超过 1keV 或者压缩程度超过 10 倍固体密度时,也许可在除了特别低 Z 以外的实验样品中见到完全剥离的离子。当许多千电子伏特温度下远高于固体密度的研究成为能够进行的工作时,也许物质会成为完全剥离的,然而此时越来越重要的辐射作用将导致很广泛的新的复杂性的出现(第 7 章中将讨论一些有关的问题)。当前我们明白,为了很好理解高能量密度现象,必须很好了解部分电离的等离子体的行为,称它们为电离等离子体。在 2.4 节中也已清楚,若要很好描述整个高能量密度范围中等离子体的行为,也必须了解非理想的强耦合等离子体。

由于种种原因我们需要估算电离度,最重要的原因是等离子体的热力学性质也与电离有关,在 3.3 节中将作讨论。完全剥离的离子的内能包含来自电离的主要贡献。真实物质的行为较复杂,很难准确计算,但有些简单的模型可以反映其行为的某些方面,下面讨论这些问题。

电子密度为 Zn_i,但是平均电荷数 Z 与温度有关。为了准确计算 Z 值,必须估计电离平衡状态,以确定不同电离状态的相对布居数 N_i。Z 是各个电离状态加权的和数,即

$$Z = \frac{1}{N}\sum_i Z_i N_i \tag{3.31}$$

式中状态 i 的布居数 N_i 可以是粒子个数,也可以是数密度;相应地,N 可以是离子总个数,也可以是相应的数密度 n_i。

我们以电荷值 Z_i 表示给定组分的各种电离状态。任何给定离子中的电子可以处于基态或者激发态,这些状态自然可以用必需的量子数表示,例如主量子数 n、自旋量子数 s 和轨道角动量量子数 l。本节讨论中有时主要关注主量子数,常忽略激发态,这意味着把所有离子看作基态离子,大多数情况下这样做是合理的。最低的激发态能量($n = 2$)高于基态,高出部分为电离能量 E_i 的 3/4。另一方面,如果离子处于 E_i 远高于 T_e 的环境之中(这是常见的情况),则激发态的布居数将小于基态的布居数,它们的比值低于 $\exp[-3E_i/(4k_BT_e)]$,因此激发态的布居数是相当低的。再者,如果 E_i 低于 T_e,则极有可能电子对离子的撞击把最外面的电子打击跃迁到数目不确定的自由状态之一中去,而不是进入到少数几个确定的激发态之中。

把最外面的电子从给定的电离态移开所需的准确的电离能,与其余电子的个数和布局有关。然而这里不考虑这些复杂情形,只选取类氢原子来进行分析。这样的处理中把所有原子和所有离子都看成类氢系统,只有一个电子和一个核子,并具有适当的净电荷。当原子的净电荷增加(从而其内层电子被束缚得更紧密),这种方法就越准确。这条途径可以使用相对而言较容易的计算模型,研究范围广泛的原子和电离状态,给出定性正确的结果。本章中首先使用与类氢原子模型相关的电离能 $E_i = Z^2E_H$,这里 $E_H = 13.6\text{eV}$,Z 是原子的净电荷,这个定义与本书其他地方使用 Z 的意义一致。

这里采用的原子结构简单图像不同于计算的"平均原子模型"(见 Salzman 的书),该计算模型提出了一种物理上一致的定义"平均原子"的方法,包括表征各种元素的束缚电子和自由电子。

在关于电离的讨论中,离子密度起着重要的作用,因为它可以标度电子密度。作为对典

型离子密度的加倍估计，可以采用 $\rho = Z_{\text{nuc}}/4(\text{g/cm}^3)$ 和 $A = 2Z_{\text{nuc}}$，从而有

$$n_{\text{i}} = \frac{\rho}{Am_{\text{p}}} \sim \frac{Z_{\text{nuc}}}{8Z_{\text{nuc}}m_{\text{p}}} = 7.5 \times 10^{22} \quad (\text{g/cm}^3) \tag{3.32}$$

这个离子密度关系将表示在后面一些图中。

3.2.1　根据萨哈方程的电离平衡

电离度的准确确定是涉及复杂计算的困难问题，但可以在很简单的基础上找到合理的近似方法。我们预期等离子体中离子的电离能与电子温度之间存在某种一般性关系。若把离子近似看作电荷为 Z 的类氢离子，则其电离能 $E_{\text{i}} = Z^2E_{\text{H}}$，这里 $E_{\text{H}} = 13.6\text{eV}$。因此可以预计 $Z^2E_{\text{H}}/(k_{\text{B}}T_{\text{e}}) \sim C^2$，这里 C 为常数，从而有 $Z = C\sqrt{k_{\text{B}}T_{\text{e}}/E_{\text{H}}}$，也就是 $Z = 8.75C\sqrt{T_{\text{e}}}$，这里 T_{e} 的单位是 keV。现在的问题在于寻求常数 C。

另一方面，在能量约为 $3k_{\text{B}}T_{\text{e}}$ 时库仑过程很有作用，如像热输运的情况（见第 8 章）。由此可以猜测 $C \approx \sqrt{3}$，这个值已接近于下面讨论的更好的估计值。

关于电离的更复杂估计，涉及电离与复合之间的平衡问题，也就是需要假设处于平衡态的离子的分布函数。这两件事当等离子体密度足够高时是等价的，但在低密度下并非如此。Griem 和 Salzman 的书中详细论述了本书涉及的电离动力学问题，这里只讲述对于高能量密度系统很重要的基本现象。在以日冕为基本模型的低密度等离子体中，碰撞电离被辐射复合所平衡，从而建立了日冕平衡的势态。另外一种过程是双电子复合，当密度增大时这种机制越加重要，尤其是在磁约束聚变装置相应的等离子体密度范围中。但是在高能量密度系统的密度范围中，相关的平衡机制是碰撞电离和碰撞（三体）复合。由于细致平衡原理，平衡状态下碰撞电离和碰撞平衡相均衡，因此电离态的相对布居数可由萨哈方程给定，Griem 利用这一事实导出了复合率系数。

当密度和温度相当高时，离子的分布和各能级内电子的分布趋近于萨哈方程确定的平衡分布。作为电离平衡的一种估计方法，忽略电子在激发态之间的分布，只关注离子在电离能级之间的分布。关于平均电离态的典型的一次近似估算，可以设定两个状态，它们之间的电离和复合是平衡的。这两个状态就是萨哈方程使用的状态。利用萨哈方程估算 Z，该方程给出离子在第 j 个状态中的布居数 N_j 与第 k 个状态中的布居数 N_k 的比值：

$$\frac{N_j}{N_k}n_{\text{e}} = \frac{g_j}{4g_ka_0^3}\left(\frac{k_{\text{B}}T_{\text{e}}}{\pi E_{\text{H}}}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-E_{jk}}{k_{\text{B}}T_{\text{e}}}\right) \tag{3.33}$$

式中 a_0 为玻耳半径，$a_0 = 5.29 \times 10^{-9}\text{cm}$；$E_{jk}$ 为从状态 k 变化到状态 j 所需的能量；g_j、g_k 分别为状态 j、k 的统计权重。

为了有助于阅读各种文献，我们指出，$E_{\text{H}}a_0^2 = \hbar^2/(8\pi^2m_{\text{e}})$，这里略去了很小的质心修正量。对于简单计算来说，唯一实际的选择是假定离子是类氢的，从而一个孤立离子从状态 k 变化为状态 $k+1=j$ 需要的电离能为 $E_{(k+1)k} = Z_{k+1}^2E_{\text{H}}$。下面将讨论，若离子不是孤立的会有什么后果。当温度足够高时，这种情况对平均电离度影响较小。

根据萨哈方程做如下推导，可以确定一个与真实平均电荷数相差不多的特征电荷数。

存在某个电荷数 Z_{bal}(不一定是整数),对于分别具有电荷 $Z_{bal}+1/2$ 和 $Z_{bal}-1/2$ 的两个虚拟的电离状态,恰好有比值 $N_j/N_k=1$。Z_{bal}应当接近(但不一定等于)平均电荷数 Z。回忆起 $n_e=Zn_i$,从萨哈方程可以解出 Z_{bal},即

$$Z_{bal}=\sqrt{\frac{k_BT_e}{E_H}}\sqrt{\ln\left[\frac{1}{n_e}\frac{g_j}{4g_ka_0^3}\left(\frac{k_BT_e}{\pi E_H}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}-\frac{1}{2}\tag{3.34}$$

也就是

$$Z_{bal}=19.7\sqrt{T_e\left[1+0.19\ln\left(\frac{T_e^{3/2}}{n_{24}}\right)\right]}-\frac{1}{2}\tag{3.35}$$

式中 T_e 的单位为 keV;n_{24}是以 $10^{24}/cm^3$ 为单位的电子(数)密度。式(3.35)中已设 $g_j=g_k$。当 $Z_{bal}\leqslant Z_{nuc}n_i$,可以采用近似式 $Z_{bal}=20\sqrt{T_e}$,这里 Z_{nuc}是核电荷数。

一次近似估算可以假定 $Z=Z_{bal}$,此时要么采用 n_{24}的近似值,要么求解式(3.35),通过电子密度的关系($n_e=Z_{bal}n_i$),把该式变成为关于 Z 的隐式方程。这个问题原先的公式表达中,式(3.35)的系数对应于 $C\approx2.3$,与初始的猜测$\sqrt{3}$相近。图 3.6 通过隐式求解 Z_{bal}作图,表示 Z_{bal}如何随离子密度和温度而变化。如果 Z_{bal}的解严格为 $20\sqrt{T_e}$,则该图中的 Z 等值线族成为许多条垂直线。斜穿整个图形的曲线表示 $Z_{bal}=20\sqrt{T_e}$的解。可以看出,在图中大部分参数范围内使用 $20\sqrt{T_e}$关系,大致精确到 50 %,离子密度高于 $10^{23}/cm^3$ 的范围中误差更大些。我们原来预期,离子首先会处于电离与复合接近平衡的一个或两个状态之中,因而式(3.35)确定的 Z 值本应当接近于等离子体中真实的平均离子电荷数。

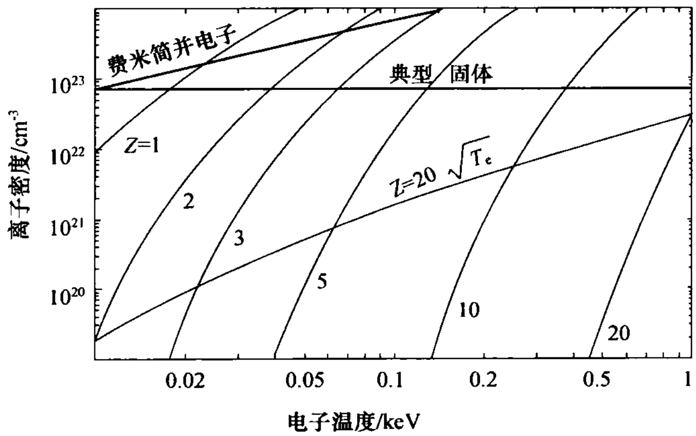


图 3.6 萨哈方程解算的电离度表示为 Z_{bal}的等值线

"简并"线以上区域中电子是费米简并的;下面的斜曲线表示 Z_{bal}等于近似值 $20\sqrt{T_e}$的结果。

习题 3.5

作图比较式(3.35)确定的 Z_{bal}与其近似估算值 $20\sqrt{T_e}$,离子密度取 $10^{19}/cm^3$、$10^{21}/cm^3$ 和 $10^{23}/cm^3$,并对结果进行讨论。

当电离能量符合上述假设时，可以证明 $Z \approx Z_{\text{bal}}$。使用 Z_{bal} 的定义重写式(3.32)，对于任何状态 j、k，有

$$\frac{N_j}{N_k} = \exp\left[-\frac{E_{jk} - Z_{\text{bal}}^2 E_{\text{H}}}{k_{\text{B}} T_{\text{e}}}\right] \tag{3.36}$$

注意到上式对应于峰值在 $Z_k \sim Z_{\text{bal}}$ 附近的离子分布，因为当 $E_{jk}/E_{\text{H}} > Z_{\text{bal}}^2$ 时，$N_{\text{i}} < N_k$；当 $E_{jk}/E_{\text{H}} < Z_{\text{bal}}^2$ 时，$N_{\text{i}} > N_k$。图 3.7 表示 $T_{\text{e}} = 1$ keV，$Z_{\text{bal}} = 20$ 处的比值 N_j/N_1。为了得到这个比值，应当根据下面的连乘式多次使用式(3.36)，即

$$N_j/N_1 = \prod_{k=1}^{j-1} N_{k+1}/N_k \tag{3.37}$$

变换为指数形式，上式成为容易计算的求和式，即

$$\frac{N_j}{N_1} = \prod_{m=2}^{j} \exp\left[-\frac{m^2 - Z_{\text{bal}}^2}{k_{\text{B}} T_{\text{e}}/E_{\text{H}}}\right] = \exp\left[-\frac{(j-1)(6+5j+2j^2-6Z_{\text{bal}}^2)}{6k_{\text{B}} T_{\text{e}}/E_{\text{H}}}\right] \tag{3.38}$$

图 3.7 表示式(3.38)对应的分布，呈现明显的尖峰形状，表明差不多所有离子具有的电荷数都在几个 Z_{bal} 单位范围内。这个分布的峰值理所当然地几乎准确对应于式(3.35)给定的 Z_{bal} 值。使用式(3.38)可以从形式上估算平均电荷数，根据电离状态布居数比值和核电荷数 Z_{nuc}，得出

$$Z = \sum_{j=1}^{Z_{\text{nuc}}} j \frac{N_j}{N_1} \Big/ \sum_{j=1}^{Z_{\text{nuc}}} \frac{N_j}{N_1} \tag{3.39}$$

可以证明，这个方法得出的 Z 十分接近于 Z_{bal}。

习题 3.6

假定 $T_{\text{e}} = 1\text{keV}$，$Z_{\text{nuc}} = 30$，$n_{\text{i}} = 10^{21}/\text{cm}^3$，根据式(3.39)估算 Z 值，并与 Z_{bal} 值进行比较。

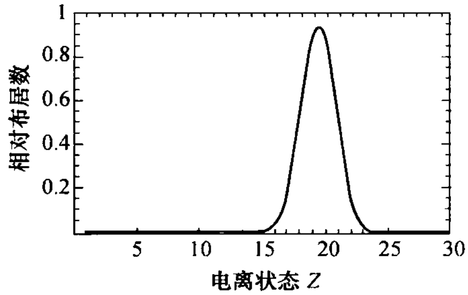


图 3.7　$T_{\text{e}} = 1\text{keV}$，$Z_{\text{nuc}} = 30$ 条件下，电离状态的相对布居数

必须强调指出，这里对 Z 进行估算的主要基础是萨哈方程，但是该方程并不反映纯粹的自然规律，即使对于平衡系统也是如此。如果重要的能量只是电离和激发的能量，萨哈方程就成为统计力学的一个推论。但若等离子体较稠密或较冷，与粒子间相互作用有关的能量将变得很重要，这个问题的某些方面将在下节讨论。在某种程度上，这些情况可以在萨哈方程的框架内考虑。但是，无论通过费米简并或者通过离子－离子相关，一旦量子效应对于粒子行为具有实质性影响，它们的配分函数即发生很大变化，萨哈方程不再是关于电离平衡的适当陈述。

基于 3.1.3 节的讨论以及假定的关系 $Z = 20\sqrt{T_{\text{e}}}$，图 3.6 左上角的曲线表示电子变为费米简并状态的参数范围，虽然在该图的双对数坐标平面上此曲线的位置对于 Z 的具体假设并不敏感。

为了深入探讨高能量密度等离子体的内能中电子何时占有优势的问题，把电离总能量

（它是等离子体内能的一部分）与电子的内能进行比较。电离能量是各电离状态的 $Z_i^2E_H$ 值相加到 Z 之和数，这里采取 Z_{bal} 的整数部分作为上述计算中的 Z。每个离子所具有的电子能量则为 Zk_BT_e，这里同样采取 $Z = Z_{bal}$。图 3.8 示出上述两种能量的比较，按上述模型计算的电离能量呈现阶梯曲线形状，然而真实情况中若干个电离状态出现的事实将使这条曲线光滑化。根据图 3.8 得到的重要结论是，只要离子保持在电离状态并且电子不是费米简并的，电离能量始终是内能中较大的部分。仅当离子变成为完全剥离的，电子能量才可能占有优势。与通常内能可以忽略的低密度实验室等离子体或空间等离子体比较，这是一个重要的差别。

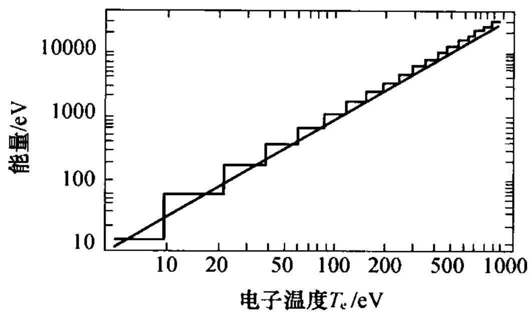


图 3.8　内能和电离能（阶梯曲线）以及电子动能（直线）随电子温度 T_e 的增长加（能量单位为 eV）

3.2.2　连续能区下降和离子球模型

对于稠密物质表面烧蚀形成的等离子体，式（3.35）大致是准确的；但是对于低温下受压缩的高核电荷稠密物质来说，此式并不准确。原因之一是电子已成为费米简并的，另外的原因在于高能量密度等离子体中离子不可能孤立地存在。虽然从体积平均的基础上看来，等离子体是电中性的；但更深入地看来，粒子自身的排列方式总使得具有任何给定电荷的一个粒子在平均意义上更接近于具有相反电荷的粒子。因此，必须投入能量才能把等离子体拉开，让粒子彼此相距足够远，致使它们之间的相互作用可忽略不计。也就是说，等离子体的势能相对于真空来说是负的。向等离子体中加入新的粒子或电荷（如发生电离的场合），将会使其势能更加降低，这种效应称为**连续能区下降**。它对于等离子体中离子或原子的后果是，不再存在能量处于等离子体势能与真空之间的真空能级。图 3.9 是说明这种状况的能级图。上述效应对于电离的影响则是，相对于真空环境而言电离所需的能量降低了。

连续能区的下降量可以通过确定一个原子或离子的电离所引起静电势能的变化来估算，有两种计算方法，分别对应于两种有效的状况。对于低密度等离子体，其德拜长度大于离子的间距，可以计算屏蔽势以及电离引起的相应静电能的变化。在 Griem、泽尔道维奇、莱依捷尔以及 Krall 和 Trivelpiece 的书中，可以找到对于这种状况类同的处理方法。下面只讨论与高能量密度等离子体更加有关的情况，这里的离子间距远大于德拜长度，因而在每个离子周围各自独立地形成了屏蔽。即使电子是费米简并的，这个情况仍然是正确的，但是此时空间中电子密度的分布要比非费米简并时更加均匀。人们注意到围绕着各个离子形成局部屏蔽的事实，提出了**离子球模型**。图 3.10 表示较低密度区域中德拜屏蔽状况和离子球状况之间的分界线，高能量密度物理的主要兴趣在密度更高的范围。

离子球模型假定每个离子只对下式给出的半径 R_0 以内区域发生影响，即

$$\frac{4\pi}{3}R_0^3n_i = 1 \tag{3.40}$$

式中 n_i 为离子的数密度。

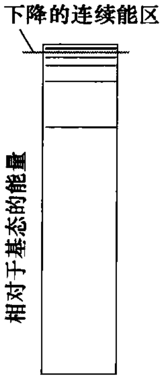


图 3.9　下降的连续能区能够消除一些激发态并使电离能降低

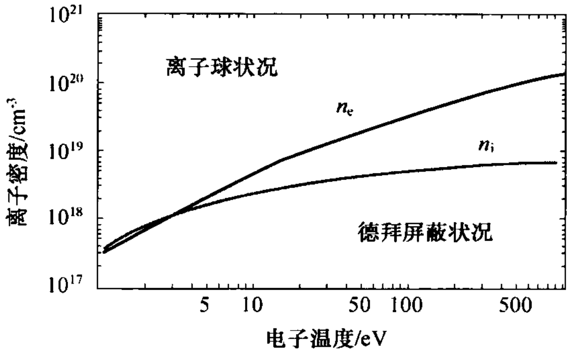


图 3.10　连续能区下降时离子球状况与长程德拜屏蔽状况之间的分界线

（图中作为参考显示的离子密度 n_i 曲线是从 $Z=20\sqrt{T_e}$ 和 n_e 推得的）

从所考察的离子来看，在上述距离以外区域中，正电荷与负电荷密度相等，因此对 R_0 以内区域的静电势能没有贡献。每立方厘米中离子的个数一般为 7.5×10^{22} 个，由此可知，固体中有 $R_0\sim10^{-8}$cm，即 1Å 的量级。由于原子尺度约为 1Å，这个结果是合乎预料的。由于在 R_0 范围内自由电子必须与离子电荷 Z_i 相平衡，而且和别的离子应保持一致性，平均的自由电子密度必须与整个等离子体的平均值相等，即

$$Z_i = \frac{4\pi}{3}R_0^3 n_e \tag{3.41}$$

Griem 书中提出一种近似计算离子能级偏移的方法，即假定电子密度不变，利用基于量子力学的类氢离子的一阶扰动理论，根据泊松方程就可确定围绕离子周围的静电势。得出最高残存束缚态的主量子数为

$$n_c = \sqrt{Z_i R_0/a_0} \tag{3.42}$$

泽尔道维奇和莱依捷尔从半经典的论证中也得到同样结果，即认为最高量子数对应于轨道半主轴等于 R_0 的状态。电离能相应下降为

$$\Delta E \approx Z_i E_H a_0/R_0 \tag{3.43}$$

还可看出当真空中电离能（$\sim Z_i^2 E_H$）增大，上述效应的相对重要性减弱，尤其可以得出

$$\frac{\Delta E}{Z_i^2 E_H} = \frac{a_0}{Z_i}\left(\frac{4\pi n_i}{3}\right)^{1/3} \approx 1.33\left(\frac{n_{24}}{T_e^{3/2}(\mathrm{eV})}\right)^{1/3} \tag{3.44}$$

该式的近似在于使用以 $10^{24}/\mathrm{cm}^3$ 为单位的电子密度，并采用 $Z=20\sqrt{T_e}$，还把 T_e 的单位从千电子伏特改变为电子伏特。当离子能级的偏移变得较大时，关系式 $Z=20\sqrt{T_e}$ 不再准确，但仍可用来标出电离能偏移变大的参数范围。图 3.11 显示了离子密度和电子温度组成的参数平面上电离能相对下降量的等值线。当 Z_i 上升时，电离能明显增加，甚至于在低 Z 物质中电离能变动可达 30%，平均电荷数 Z 却几乎没有差别，而在高 Z 物质中这种差别也只是很少的电离状态数。后一种情况对于如 X 射线激光等某些应用来说，也许非常重要，但

还不足以使得等离子体的热力学性质发生定性的变化。我们看到,固体密度物质中电离能的变化不会比这种情况高出若干电子伏特,对于受单次冲击加载的固体(其密度相应增加 4 倍 ~7 倍)也不会大于 10eV。

把式(3.43)推广到包括德拜长度 λ_D 超过 R_0 的较低密度等离子体的行为,即有

$$\Delta E \approx Z_i E_H \min\left(\frac{2a_0}{\lambda_D}, \frac{a_0}{R_0}\right) \tag{3.45}$$

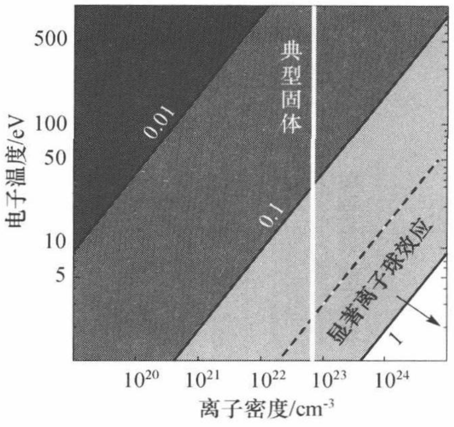


图 3.11　式(3.44)计算的电离能相对下降量(各等值线的值分别为 0.01、0.1 和 1)

图 3.10 示出了离子球状况和长程德拜屏蔽状况的分界线,可以看出,整个高能量密度物理范围基本上处于离子球的状况。还可以看到,根据式(3.44),可以存在 ΔE 大于真空电离能的情况,因而甚至在零度温度下也可能发生若干电离,这种效应称为压致电离。这个名词有时使人感到困惑,因为此情形似乎只有密度参与其中。但在稠密物质尤其是费米简并物质中,即使在零度温度下压力仍然是很重要的。

习题 3.7

取离子密度值分别为 $10^{19}/\text{cm}^3$、$10^{21}/\text{cm}^3$、$10^{23}/\text{cm}^3$ 和 $10^{25}/\text{cm}^3$,画出各条 ΔE 与电离能比值的关系曲线(Z_i 的变化范围为 1 ~80),并对所得结果进行讨论。

进一步确定一个类氢原子发生压致电离时产生的 Z 值。在这种高密度低温状况下,离子的所有束缚态都已被占据,因而核电荷 Z_{nuc} 与离子电荷 Z_i 的差数可由下式给定,即

$$Z_{\text{nuc}} - Z_i = \sum_{n=1}^{n_c} 2n^2 = \frac{n_c}{3}(1 + n_c)(1 + 2n_c) \tag{3.46}$$

这里已取 Z_i 等于平均离子电荷数 Z,n_c 由式(3.42)确定。图 3.12 表示这样得到的 Z 的等值线,这是根据式(3.46)的准确求和式计算的,与 Griem 书中用近似求和方法得到的曲线不同。

我们看到,在离子行为类似于氢离子的意义下,在通常的固体密度下几乎不存在任何压致电离,而且对于压缩只达到几倍固体密度的情形,电离量也是很小的。在核电荷大于 10、压缩程度大于 10 倍固体密度的情况下,电离很快增长。在离子行为与氢类似的状况下,作为一个粗糙的经验法则,Z 可以取由式(3.46)计算出的最大值和式(3.45)中的 Z_{bal}。在这两个模型之间的过渡区中,这样得到的 Z 值偏低,因为等离子体的作用将显著减少下一对电离态之间的电离能。为了改进对于这种状况的估计,可以使用式(3.45)调整萨哈方程。另一方面,当 T_e 增大到远高于 10eV 之前时,大多数物质仍将处于萨哈方程适用的状况。

然而图 3.12 也可能引起较大误解,因为在 1eV 量级的温度下,大多数通常物质的行为与简单的类氢模型不相像。例如,可以认为,导体具有的有效电离态对应于该导带中的每个原子平均的自由电子数。铝的情形中,每个原子约有 3 个电子,可以合理地用"压致电离"

来描述，此例再次说明更好的术语也许应是“密致电离”。在类氢模型认为不会发生电离的情形，电离的出现在某种程度上是由于微妙的量子效应。但是更为重要的是，原子核周围存在多个电子的传统性影响。在传统的理解中，人们也许认为内层电子起到了屏蔽核电荷对最外面电子的作用。3.4 节中讨论的托马斯 - 费米模型考虑了这种作用，而且的确给出了近似正确的铝中自由电子的个数。接近和低于 1eV 的稠密物质的细致行为，至今仍是热门的研究课题。在全局观念中，所有物质的性态是相仿的，但发生一定转变所对应的确切密度值可以很不相同。量子效应可能十分重要，尤其对于被称为**温密物质**（Warm Dense Matter，WDM），即处于固体密度量级和几电子伏特以下的密度、温度范围的状态来说。

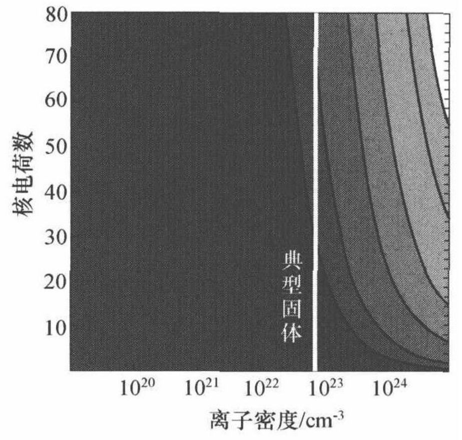


图 3.12　压致电离

由离子球模型计算的类氢离子压致电离产生电荷数的等值线，分别表示 $Z=1$、2、5、10、20 和 30。

3.2.3　库仑相互作用

等离子体物理的大多数内容中，都可以把等离子体描述为理想气体。玻义耳定律给定了压力和接近于 5/3 的多方指数。这种气体可能发生电离，但对其热力学性质影响不大。大部分天体物理、宇宙空间和实验室情形的等离子体中氢和氦是主要的，因而这些等离子体的热力学性质比较简单（实际上，正是中性的氢在上述环境中带来了很多复杂性）。由于许多等离子体系统具有的两个“节俭”的特性，使得简单热力学性质和传统等离子体理论成为可能。这两个特性是：粒子成对地相互作用，而且与其热能相比它们的相互作用能量较低。第 2 章中已看到，当转向高能量密度状态的研究时，这两个“节俭”的特点逐渐消失。在 Krall 和 Trivelpiece 的书中，读者可以看到关于偏离理想等离子体行为的很好论述，Griem 的书提供了这些内容与较近文献资料的联系。本节中许多内容是遵循 More 等人书中观点陈述的。

本节的任务是探讨关于我们感兴趣的稠密等离子体状况有什么更多的结果。在 3.1.3 节中已看到电子的行为类似于理想气体，但在 2.4 节中又看到粒子之间库仑相互作用十分重要，尽管任何时刻它们通常只在当时所处的离子球范围内相互作用。为了估算库仑作用并为下节对于托马斯 - 费米模型的讨论做好铺垫，下面对于热力学量做些进一步的提示。

确定有意义的热力学量时，亥姆霍兹自由能 F 很有用处，其单位即能量单位，然而也可以表示为单个粒子、单位质量、单位体积中的能量，或者一个系统中全部粒子的总能量。在注意此概念应用于电中性等离子体时，还要引入定义为单位总质量所具有能量的比自由能。如果记电子的比自由能为 F_e，则电子压力 p_e、电子比熵 s_e 和电子对比内能的贡献 ε_e 分别定义为

$$p_e = \rho^2 \frac{\partial F_e}{\partial \rho} \tag{3.47}$$

$$s_e = -\frac{\partial F_e}{\partial T_e} \tag{3.48}$$

和

$$\varepsilon_e = -T_e^2 \frac{\partial}{\partial T_e}\left(\frac{F_e}{T_e}\right) \tag{3.49}$$

式(3.49)看来很一般,但蕴涵了这样的事实,即自由能和熵两者对于内能都有贡献。按链式法则进行此式的微分运算,就可明显看出。

3.1.3 节已经明确,我们的主要兴趣在于离子球环境中电子行为类同于理想气体的状况。此时的比自由能(每单位总质量所具有的能量)为

$$F_e = \frac{Zk_B T_e}{Am_p}\left[-1 + \ln\left(\frac{Zn_i\hbar^3}{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}\right)\right] - \frac{9}{10}\frac{Z^2e^2}{R_0 Am_p} \tag{3.50}$$

式中 R_0 为离子球半径。

在关于离子球状况的准解析模型中,式(3.50)中 Z 是每个离子具有的电离出来的自由电子个数。此式应用于 3.4 节中讨论的托马斯 - 费米模型时,应以 Z_{nuc} 取代这里的 Z。式(3.50)右部第一项是粒子密度为 n_iZ 的理想气体比自由能的标准表达式。可看到,Z 随温度变化的事实,会引起一些不常见的后果。根据 3.1.3 节的定义,式(3.50)右部对数项中的变元即为 θ/θ_{crit},但此式仅适用于 $\theta < \theta_{crit}$ 情形,所以该对数项始终是负的。

式(3.50)右部第二项是库仑相互作用项,包括了电子与电子、电子与离子相互作用的贡献(后者较大)。在此形式中,这一项是"马德隆(Madelung)能量",可以通过确定在电荷 Z 的核子周围离子球面上均匀分布的 Z 个自由电子的势能而求得。这种电子 - 离子的势能为 $-(3/2)Z^2e^2/R_0$,而电子 - 电子势能为 $+(3/5)Z^2e^2/R_0$。当密度增加,正是后面此项使得通常的等离子体物理学不再管用。密度通过 R_0 进入该项,而温度(或许还有密度)也可以通过 Z 进入该项。应注意到,此项并不是理想等离子体中与相互作用有关的势能,例如,泽尔道维奇和莱依捷尔书中讨论的与德拜长度有关的那种等离子体势能。高能量密度状况下,相关的尺度长度将是离子球半径。

根据式(3.50)并应用式(3.47)和式(3.49),可以找到关于压力和内能的具体表达式。若取 Z 为 $0.63\sqrt{T_e}$(T_e 单位为 eV)或者 Z_{nuc}(如果离子是完全剥离的),则可得到关于电子压力和电子内能的两种相应结果,即

$$p_e = 0.63k_B n_i T_e^{3/2} - 0.192e^2 n_i^{4/3} T_e \tag{3.51}$$

及

$$\rho\varepsilon_e = 2.18k_B n_i T_e^{3/2} - 0.315k_B n_i T_e^{3/2}\ln\left(\frac{n_i\hbar^3}{T_e(m_e k_B)^{3/2}}\right) \tag{3.52}$$

或

$$p_e = Z_{nuc}k_B n_i T_e - \frac{6^{2/3}\pi^{1/3}}{10}e^2 n_i^{4/3} Z_{nuc}^2 \tag{3.53}$$

及

$$\rho\varepsilon_e = \frac{3}{2}Z_{nuc}k_B n_i T_e - \frac{2^{2/3}3^{5/3}\pi^{1/3}}{10}e^2 n_i^{4/3} Z_{nuc}^2 \tag{3.54}$$

上面诸式中除了 T_e 用 eV 为单位外,其余物理量都用 cgs 制单位,包括 $e = 4.8\times10^{-10}$ 静电库仑,还应注意到 $n_i = \rho/Am_p$。在上述电离模型中当 $T_e = (Z_{nuc}/0.63)^2$ 时,系统从上述第一组方程转变为第二组方程。如果离子球效应决定了电离度,但是发生在密度高于原先考

察的情况,则哪一组方程都不适用。这些方程组中有三个式子包含动能和库仑键能的直接贡献。只是式(3.52)中库仑键能对来自自由能贡献的影响与熵相互抵消,消除了正比于 e^2 的项。

在 3.3.2 节中这四个式子都很重要,但在这些关系式以外还需要合理考虑离子的压力和内能,以后再考虑这些问题。其次在 3.3.2 节中,将估算高能量密度状态下等离子体全面的热力学行为,在图 3.13(a)和图 3.15(a)中将看到,从高温低密度的理想等离子体状况变化为费米简并状况时,压力大约下降一半,这首先是因为刚才讨论的库仑相互作用的缘故。

3.3　电离等离子体的热力学

对于高能量密度电离等离子体的热力学描述,我们已经有了相当了解。在继续探讨之前先归纳一下前面几节中已学过的内容。在某些条件下电子是强简并的,但是在我们关心的参数空间的大部分范围中,它们的行为却与理想气体相像。这是由于估算其行为时把它们当作费米子看待,并没有遵循传统等离子体物理学的论证。由于这是非理想等离子体,传统等离子体物理学并不适用。然而,把电子按费米子处理并没有包括它们的库仑相互作用,这种相互作用应当包括在自由能之中,并且会导致压力的下降。

我们发现,直至变为完全剥离态之前,离子通常携带着等离子体的大部分内能,但在一般状况下大多数元素不是完全剥离的。离子电荷是被屏蔽在局域中的。因此,一般说来,除了通过压缩的总能量外,离子相互之间基本上没有直接的影响。同时,还未考虑对于等离子体内能影响较小的许多作用,包括靠近离子到某种程度的电子团簇、电子之间的量子力学交换能以及电子的自旋-自旋相互作用。在讨论了如果以前定义的 γ 不再是常数该怎么办的问题之后,将系统地应用刚才得到的结果,为在 3.3.2 节中考虑电离等离子体的热力学性质做好准备。

3.3.1　*广义多方指数*

电离等离子体和辐射等离子体两者都具有压力和内能,遗憾的是在这些等离子体完全电离或者完全成为辐射主导之前,它们压力和内能的变化方式很复杂。因此,多方指数不变的假设对于这些系统是不合适的。由此产生的问题在于,是否存在相当简单的方法可以处理这种系统的行为,并能够据此发展一些简单的模型。幸运的是我们能够这样做,文献中已提出若干途径,最佳的选择与具体应用有关。遵循 Mihalas 和 Mihalas 的书,下面鉴识适用于各自场合的三种广义多方指数。

首先,需要把内能 ε 表示为 p 和 ρ 的函数,使得动量方程和能量方程仅包含压力。此时的等效多方指数如在式(3.3)中定义那样,即

$$\gamma = 1 + p/\rho\varepsilon \tag{3.55}$$

这种情形中 γ 原则上是变量,但是对第 4 章论述的冲击波应用来说,已假定强间断面两边的流体分别是均匀的,上面定义的 γ 值很有用处。

其次,对于声波应用来说,第 2 章中的推导表明,相应的多方指数定义为

$$\gamma_s = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_s \tag{3.56}$$

再者，对于热输运应用来说（包括辐射热输运），希望把温度与其他参数关联起来，此时将看到所需要的多方指数定义为

$$\gamma_3 = 1 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_s \tag{3.57}$$

如果式(3.55)定义的 γ 是常数，则有 $\gamma = \gamma_s = \gamma_3$。在热力学函数的领域，寻求对这些量有用的表达式，尤其是对于热输运有用的方程。在进行某量对于某量的偏导数运算时往往容易出错，这里不准备进行逐步推导，而是给出一些以后用得到的具体方程，特别是寻求式(2.14)的推广，其形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\right)p - c_s^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\right)\rho = 0 \tag{3.58}$$

上式右部还可以增添源项，用来考虑热输运问题。

除了耐性以外，下面的工作所需的全部基本信息来自热力学第一定律和第二定律的一对方程式，即

$$\mathrm{d}\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}q = T\mathrm{d}s \tag{3.59}$$

式中 $\mathrm{d}\varepsilon$、$\mathrm{d}q$ 和 $\mathrm{d}s$ 分别为比内能、输入热量和熵的微分（或增量）。

下面特别指出两个具体的数学关系式：

$$(\partial a/\partial b)_c = 1/((\partial b/\partial a)_c \tag{3.60}$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_c\left(\frac{\partial b}{\partial c}\right)_a\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_b = -1 \tag{3.61}$$

通常在任何热力学运算中，任何时候总在 p、ρ 和 T 三个变量中选取两个作为热力学函数的自变量。首先把 ε 表示为 p、ρ 的函数，从式(3.59)导出

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}q = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\rho \mathrm{d}p + \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_p - \frac{p}{\rho^2}\right]\mathrm{d}\rho \tag{3.62}$$

由于 $\mathrm{d}s$ 是全微分，则得

$$\mathrm{d}q = T\mathrm{d}s = T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \mathrm{d}p + T\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p \mathrm{d}\rho \tag{3.63}$$

计算比定容热容可以用 T、ρ 或 T、p 作为热力学自变量，式(3.63)意味着比定容热容为

$$c_V = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \tag{3.64}$$

把比内能 ε 写成为 $\varepsilon(T,\rho)$，按式(3.59)进行求导，即得比定压热容为

$$c_P = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_p = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho + \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \tag{3.65}$$

利用这些定义式计算式(3.62)中的系数，把式(3.65)两边乘以 $(\partial T/\partial \rho)_p$，并根据 c_V 的定义得到

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_p = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T = c_P\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p + \frac{p}{\rho^2} \tag{3.66}$$

同时,依据微分的连锁法则有

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\rho = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \tag{3.67}$$

从而得到式(3.62)中的输入热量为

$$\mathrm{d}q = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \mathrm{d}p + c_P\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p \mathrm{d}\rho = T\mathrm{d}s \tag{3.68}$$

把式(3.66)和式(3.67)代入式(3.62),并利用$(\partial p/\partial \rho)_s$得到

$$\frac{c_P}{c_V} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \tag{3.69}$$

进一步简化有

$$\mathrm{d}q = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \left[\mathrm{d}p + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p \mathrm{d}\rho\right] \tag{3.70}$$

由式(3.61)可知,这也就是

$$\mathrm{d}q = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \left[\mathrm{d}p - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \mathrm{d}\rho\right] \tag{3.71}$$

上式即是我们要寻求的表达式。如预期那样,其右部方括号中的项具有式(2.14)的形式。等熵声速由式(3.69)和式(3.65)给定,得出

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_P}{c_V}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T - \frac{1}{c_V}\left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = \gamma_s \frac{p}{\rho} \tag{3.72}$$

这样就确定了 γ_s。这个声速表达式很容易依据 p 和 ε 的函数表达式来估算,也就是式(3.71)中与方括号相乘的整个因子。当关注输入热量的绝对表达式时,注意应把式(3.71)乘以 ρ。相仿地利用式(3.62)和式(3.63),并且把 $T\mathrm{d}s$ 看作 T 和 ρ 的函数,就可确定

$$(\gamma_s - 1)^{-1} = \rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \tag{3.73}$$

为了解释 Mihalas 和 Mihalas 书中的一些方程式,以上关于式(3.73)工作是值得的。还应注意到,只要$(\partial p/\partial \rho)_T = p/\rho$,而且$(\partial \varepsilon/\partial \rho)_T = 0$,总会有 $\gamma_s = \gamma_3$。这是下一节的情况,但并不是第 7 章中考虑的辐射等离子体情形。现在已具备了描述任何等离子体行为的必要工具,需要知道的只是等离子体的压力和内能与其密度、温度的函数关系。3.3.2 节接着进行估算等离子体热力学参数的工作。

习题 3.8

根据式(3.60)~式(3.64),推导式(3.73)。

3.3.2　压力、能量及相关结论

以下讨论电离气体特殊的热力学性质,并为第 7 章中研究辐射气体建立必要的基础。使用式(3.51)~式(3.54)表述电子的贡献,从而看到当电子成为费米简并的时候,这些公

式的功效很差。而且知道，当离子密度超过 $10^{24}/\mathrm{cm}^3$、温度低于某值时，压致电离可以使 Z 增大。大多数情形中电子是压力和动能的主导因素，这里把离子对压力的贡献记为 p_i，对比动能的贡献记为 ε_{ik}，分别表示为

$$p_i = \frac{\rho k_B T_i}{A m_p} \tag{3.74}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{3}{2}\frac{k_B T_i}{A m_p} \tag{3.75}$$

与离子紧密排列有关的库仑键能已经包括在电子的公式之中，而且通常条件下物质的初始状态处于较低的（或为零的）正能量状态，离子也对电离能和激发能做贡献。这里不考虑激发，其原因已在 3.2 节开始处进行了讨论。再次使用类氢模型，把离子的比内能写为

$$\varepsilon_{II} = \frac{R}{A m_p} = \frac{k_B E_H}{A m_p}\sum_{k=0}^{Z} k^2 = \frac{k_B E_H}{6 A m_p} Z(1+Z)(1+2Z) \tag{3.76}$$

式中 Z 的最高值可以是 Z_{nuc}；R 为每个离子的内能。

习题 3.9

式(3.76)中采用的 R 值忽略了激发态的内能以及电离中由于辐射损失的能量，这个问题可以用更普遍的方程组加以适当处理。再次假设离子是类氢的，试估算多大部分的内能出现于激发态，并讨论这部分内能如何随 Z 而变化。

上面的结果给出了离子的贡献，从而可得到电离状况下和完全剥离状况下 $T_e = T_i$ 时物质的总压力和总比内能，即

$$p = 1.6\times 10^{-12} n_i T_e (1 + 0.63\sqrt{T_e} - 2.76\times 10^{-8} n_i^{1/3}) \tag{3.77}$$

及

$$p\varepsilon = 1.6\times 10^{-12} n_i\left[1.43\sqrt{T_e} + 4.20 T_e + T_e^{3/2}\left(1.3 - 0.315 T_e^{3/2}\ln\frac{n_i}{10^{23} T_e}\right)\right] \tag{3.78}$$

或

$$p = 1.6\times 10^{-12} n_i [T_e(1 + Z_{nuc}) - 6.96\times 10^{-8} n_i^{1/3} Z_{nuc}^2] \tag{3.79}$$

及

$$p\varepsilon = 2.4\times 10^{-12} n_i [825 + T_e(1 + Z_{nuc}) - 1.39\times 10^{-7} n_i^{1/3} Z_{nuc}^2] \tag{3.80}$$

除了 T_e 以 eV 为单位外，上面诸式中均采用 cgs 单位制，还要指出 $n_i = \rho/A m_p$。下面探讨对于很高 Z 元素维持电离来说，上述前面两式有什么涵意；然后再考虑以碳作为完全剥离元素的例子。

设想一个高 Z 元素，式(3.77)和式(3.78)所给出的压力和能量，其信息比其理想气体对应物更为丰富。理想气体模型给出压力 $p = n_i(1+Z)k_B T_e$，能量为 $\rho\varepsilon = (3/2)n_i(1+Z)k_B T_e$。图 3.13(a)和图 3.13(b)表示式(3.77)和式(3.78)给出的更完善估算结果与理想气体模型结果的比值。可以看出，在费米简并区域中式(3.77)的模型相当失败，这是不足为奇的。图 3.13(a)平面上，该式的压力一般为理想气体值的 50% ~ 100%，也就是说，理想气体模型的压力值是非简并电子压力的双倍估计值，这里对压力的估算也许

高了一些。与此相反,图 3.13(b)中式(3.78)计算的内能是理想气体值的好几倍,尽管由于加热新电子的原因能量还下降了一些。该图的计算表明,内能大约是理想气体值的 5 倍,定性上已大于标准计算可能得出的倍数,与类氢离子的计算值相比,高 Z 物质外层电子的电离能确实可能有所下降。然而,这个定性结论是正确的,相对于理想气体来说高 Z 物质的内能增大了。

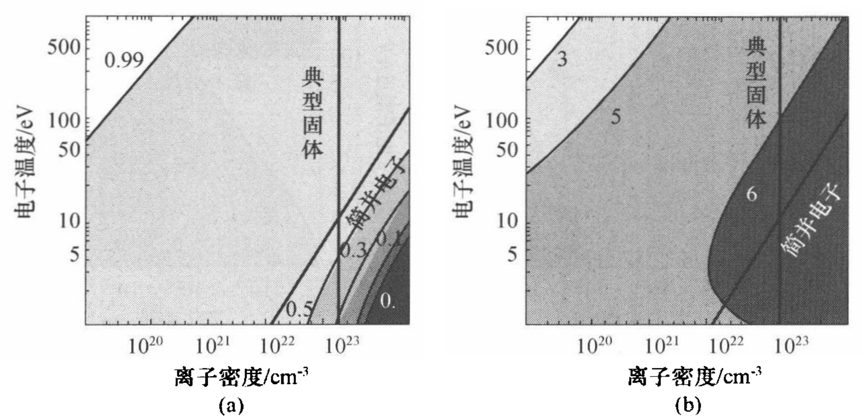


图 3.13　以理想气体压力作归一化的电离高 Z 元素的压力
等值线从右下角起增加,依次为 0、0.1、0.3、0.5 和 0.99;
以及以理想气体内能作归一化的电离高 Z 元素的内能密度
等值线从左至右增大,依次为 3、5 和 6。

随着内能增大和压力下降,式(3.55)定义的 γ 值必然减小。图 3.14 表示按照式(3.55)的定义、结合式(3.77)和式(3.78)计算的 γ 值。这里同样不必认真看待约为 1.15 的定量值,相对于理想气体的 γ 值 5/3,高 Z 物质 γ 值大大下降在定性上是真实的。对氙的标准物态方程估算($A=130, Z_{nuc}=54$),给出 $\gamma \approx 1.2 \sim 1.3$。第 4 章中将看到,这意味着同样冲击作用下压缩程度的增加。

现在考虑碳,这是一个具有 6 个电子的元素,在不很高的温度下这些电子可以被完全剥离。采用估计值 $Z=0.63\sqrt{T_e}$,碳将在 $T_e=91\text{eV}$ 温度下完全电离。更高温度下,其内能中仍包括电离能,但是这种贡献再也不会增加了。为了估计碳等离子体的性质,在 $T_e=91\text{eV}$ 之前使用式(3.77)和式(3.78),之后在更高温度下使用式(3.79)和式(3.80),计算结果示于图 3.15(a)和(b)以及图 3.16。

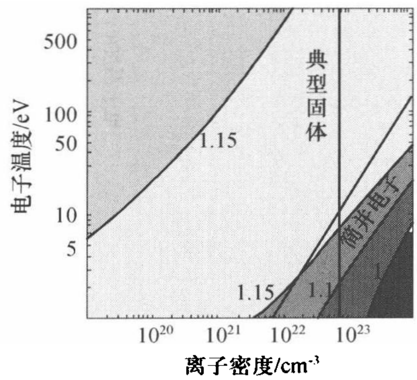
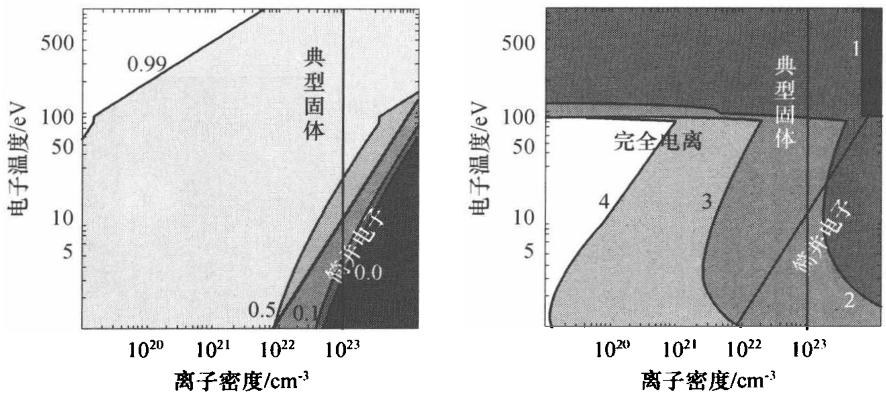


图 3.14　由式(3.55)定义电离高 Z 元素的 γ 值
等值线为 1(右下部)、1.1 和 1.15,
永远达不到 1.2。

碳的核电荷数比氙少得多,非常低,因此其库仑键的作用也低得多。这个主要结论图示于图 3.15(a),即在相关参数空间的大部分范围中

其压力与理想气体模型的压力的差别在 1% 以内。与压力相对均匀分布的情况相反,图 3.15(b)所示的内能曲线有确定的结构。在碳没有完全被剥离的温度区域中,电离能是主导因素,内能大大超过理想气体模型值,但是当离子密度增大时这种作用降低。一旦温度增长到足以使碳完全剥离时,内能很快地下降趋于理想气体值。



(a) (b)

图 3.15(a) 以理想气体压力进行归一化的碳等离子体的压力

等值线从该图右下部起增大,依次为 0.1、0.5 和 0.99

以及图(b)以理想气体值进行归一化的碳等离子体的比内能密度

已标出其等值线的范围从 1 至 4。

碳等离子体的行为对所推算的 γ 值产生明显影响,如图 3.16 所示。当温度低于 91eV,这种行为十分相像于图 3.14 的情形,γ 的推算值一般为 1.15 ~ 1.2。一旦碳成为完全剥离的,γ 开始增大,但是在这个模型中即使在 1keV 温度下,γ 也不会达到理想气体的极限值 5/3。由于在温度 T_e 到达 1keV 之前辐射将使 γ 向 4/3 下降,因此上述 γ 达不到理想气体的极限值的断言,开始变为不太可靠。

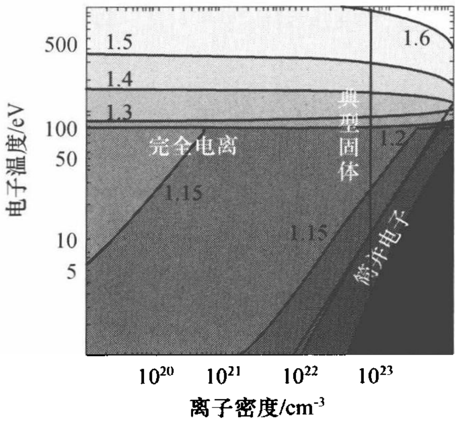


图 3.16 由式(3.55)推算的碳等离子体的 γ 值

(除了 $\gamma=1$ 和 1.1 以及图的右下部分,其余范围中的等值线均已标出)

下面根据式(3.77)~式(3.80),推导其他热力学量,尤其是估算比定容热容 c_V、γ_s 和 γ_3。在式(3.78)的电离等离子体情形,可得到

$$c_V = \frac{1.6 \times 10^{-12}}{Am_p}[4.2 + 0.715/\sqrt{T_e} + 27.3\sqrt{T_e} - 0.473\sqrt{T_e}\ln(n_i/\sqrt{T_e})]$$

(3.81)

对于式(3.80)的完全剥离等离子体情形,可得到

$$c_V = \frac{2.4 \times 10^{-12}(1 + Z_{nuc})}{Am_p} \tag{3.82}$$

然后使用式(3.72)和式(3.73)计算 γ_s 和 γ_3,这样会得出相当杂乱的表达式,但很容易用计算机程序来算,结果示于图 3.17 和图 3.18。可以看出,这些多方指数较小,约为 1.2,有一些变化,在幅度上接近于电离状况的 γ 值。图 3.18 是碳的情形,表明这两种多方指数在整个完全电离范围中都很接近于 5/3。

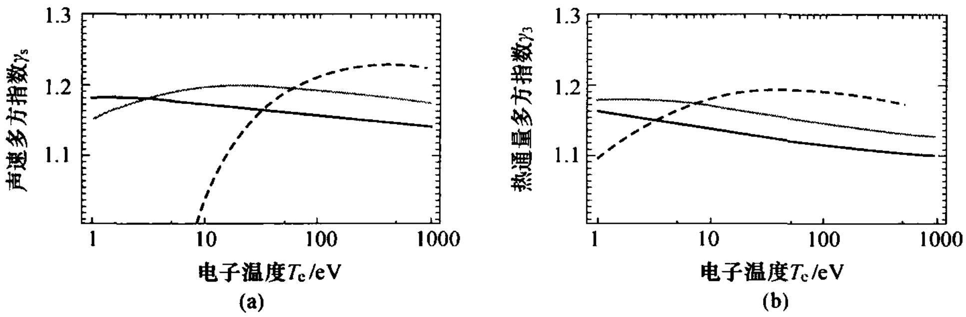


图 3.17　电离状况的多方指数 γ_s 值与电离状况的多方指数 γ_3 值

曲线对应于离子密度 $10^{19}/cm^3$(实线)、$10^{21}/cm^3$(灰线)和 $10^{23}/cm^3$(虚线)。

很低温度和很高密度下电子成为简并的,该模型失效。

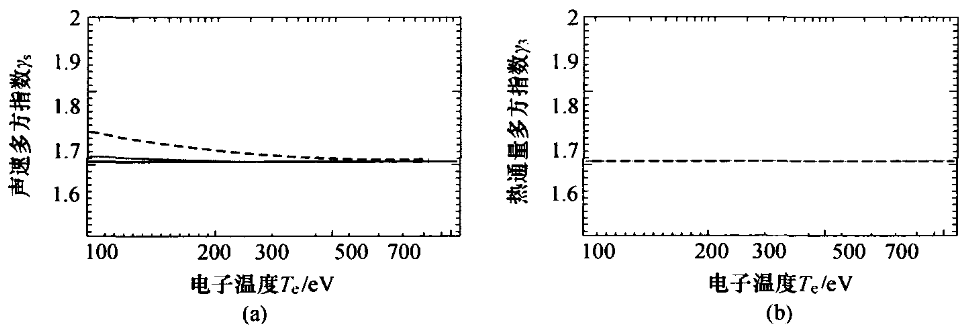


图 3.18　完全剥离状况下碳的多方指数 γ_s 值与完全剥离状况下碳的多方指数 γ_3 值

曲线对应于离子密度 $10^{19}/cm^3$(实线)、$10^{21}/cm^3$(灰线)和 $10^{23}/cm^3$(虚线)。

这样就完成了关于物态方程具体模型的论述,后面章节的一些例子中将采用 $\gamma = 4/3$ 或 5/3 作为典型值。在第 7 章研究辐射流体动力学之前,没有必要去区分这些定义不同的多方指数,但应当明白 γ 可能大大低于 5/3,稠密等离子体并不是理想气体,而且理解物态方程的实质并不容易。作为本章的结尾,下节将讨论表格式物态方程。

3.3.3 物态方程的概貌

关于高能量密度系统的物态方程我们已经学到些什么？在这里小结一下很有益处。图3.19是这方面的归纳，图中用专门的曲线画出了假定 $A=2Z_{nuc}$ 的电离等离子体区域，但在双对数坐标平面上各种元素的相对定向对这个假定并不敏感。图(3.19)左上部为理想等离子体状况，其例子是足够热的等离子体冕区，如稠密物质靶前方的激光加热区，或者 Z 箍缩内爆所产生的等离子体(见第8章)。图3.19右下部范围中压致电离十分重要，例如，固体受到冲击波非常强烈的压缩以及电子成为费米简并的情形。该区决定了压缩固体密度物质所需要的压力，包括惯性约束聚变中对燃料的压缩。

图3.19中所示两种极限之间是21世纪初许多实验的活动范围，这里的物质是部分电离的，也许还不是完全剥离的；离子处于它们各自的离子球范围内，但是携带着系统中相当多的内能。电子则是费米气体，其压力因库仑相互作用而下降。

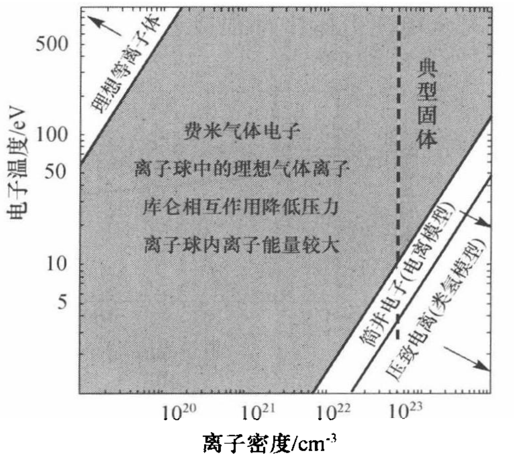


图3.19 高能量密度等离子体物态方程的概貌

3.4 计算使用的物态方程

稠密等离子体状况的物态方程相当复杂，而且使用多方指数必然要付出降低精度的代价，事实上这也是本书大部分章节中采用的方法。但是如果用计算机编码对高能量密度系统进行数值模拟，自然希望得到的结果更精确些。精确模拟高能量密度状况下物质的行为，显然是对我们的巨大挑战，这里有着库仑能量修正、简并电子、压致电离、连续能区下降以及其他效应。计算除了应充分精确之外，还需要包括我们提及的但还未加进来的若干物理作用，例如束缚电子的影响，还需要更精确地处理各种状况之间的过渡。实际问题比上面讲的更加麻烦，因为高能量密度物质差不多总是从非高能量密度状况、实际上处于固态或液态的物质演化而来，并且彼此的状态是很接近的。现实的计算应当能够考虑物质的这些状态，以及它们向更灼热也许更稠密状况的转变。本书编写中一个特别困难的例子是，Z箍缩内爆等离子体中导体丝阵行为的研究(见第8章)，它们开始时是固体，经过烧蚀和(或)电爆炸，形成Z箍缩内爆驱动的等离子体。模拟这种复杂过程的动力学，是一个严重的挑战。

本节将讨论解决这类问题的两种途径：第一种是托马斯-费米模型及其向惯用物态方程(Quotidian Equation Of State，QEOS)的扩展；第二种是使用表格式物态方程。

3.4.1 托马斯-费米模型和QEOS

首先讨论托马斯-费米模型，其显而易见的复杂性使人感到不快。相当糟糕的是，使用

这个模型需要很繁重的数值运算，否则它就是选择离子球状况进行准解析分析的模型。基于若干个十分简单的关系，托马斯 - 费米模型准确地考虑了电离、激发、费米简并、库仑相互作用、自洽电子密度结构和某种程度上的离子 - 离子耦合等作用。在不同情况下，该模型的各种变型还可包括各种量子力学效应，如壳层结构的影响等。Salzman 书中对托马斯 - 费米模型进行了很好的概述，在 Eliezer、Ghatak 和 Hora 的书中则有很详细的陈述。

托马斯 - 费米模型是离子球模型与电子作为费米子处理的一种自洽组合，该模型成功的关键在于，证实了作为费米子的电子与核子的静电相互作用在这种场景下是自洽的。在经典场景中这也自然是适合的，静电能的增加与密度或温度的提高相联系。这样就可以忽略电离和激发，把这些过程分开来处理，在平均意义下可以由被加热电子的膨胀或者状况改变时连续能区的下降来考虑。下面以简单形式推导出托马斯 - 费米模型的公式。

假定系统是球对称的，电场的势 $\phi(r)$ 由如下的泊松方程给定：

$$\nabla^2\phi(r) = 4\pi e n_e(r) - 4\pi Z_{nuc} e\delta(r) \tag{3.83}$$

边界条件是在离子球边界 $r = R_0$ 处 $\partial\phi/\partial r = 0$，因为每个离子球必定是净电中性的。把式(3.15)推广到包含变动的势能，就可给定电子密度为

$$\begin{aligned} n_e(r) &= \frac{8\pi}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\chi_e^2 d\chi_e}{\exp[(-\mu - e\phi(r) + \varepsilon_e)/k_B T_e] + 1} \\ &= \frac{4\pi(2m_e k_B T_e)^{3/2}}{\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{\exp[x - (\mu + e\phi(r))/k_B T_e] + 1} \end{aligned} \tag{3.84}$$

因此，电子作为费米子的性质得到了考虑。每个离子球为净电中性的条件，构成了对电子密度分布的约束条件，即

$$Z_{nnc} = 4\pi\int_0^{R_0} n_e(r) r^2 dr \tag{3.85}$$

此式决定了化学势 μ。式(3.83) ~ 式(3.85)是为描述该系统必须求解的，只要计算机数学程序不仅仅可以求根，而且能够计算剖面，这个模型就可直接计算。

假定已经求解了上述方程组，进而考虑如何应用所得到的解。上面式子中定义的势，可以相差一个任意常数，该常数的选择将影响到 μ 值。通常，选定在离子球的边界上有 $\phi = 0$，从而密度增大时整个球的势成为增长的正值。这就是此模型能够反映离子相互作用的原因。电荷数可由下式计算：

$$Z = \frac{4\pi}{3}R_0^3 n_e(R_0) \tag{3.86}$$

上式相当于假设自由电子在离子之间自由流动，从而确定了离子球边界上的电子密度值。其他一些热力学量计算如下：

电子压力为

$$p_e(r) = \frac{8\pi(2m_e)^{3/2}(k_B T_e)^{5/2}}{3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{\exp(x - \mu/k_B T_e) + 1} \tag{3.87}$$

每个离子球中的电子动能为

$$K_e = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}(k_B T_e)^{5/2}}{\hbar^3}\int_0^{R_0}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{\exp[x - (\mu + e\phi(r))/k_B T_e] + 1}dr \tag{3.88}$$

但上式并不是电子的全部能量,因为吸引的库仑能尚有待考虑。利用每个原子的电子与核子的相互作用能量 U_{en},可以直接计算上述能量。再把每个原子的电子之间相互作用能记为 U_{ee},可以得到

$$U_{en} = -4\pi Z_{nuc}^2 e^2 \int_0^{R_0} n(r) r \mathrm{d}r \tag{3.89}$$

以及

$$U_{ee} = \frac{e^2}{2}\int_0^{R_0}\int_0^{R_0} \frac{n(r)n(r')}{|r-r'|}\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \tag{3.90}$$

有了这些定义式,就可把总比内能写成

$$\varepsilon = (K_e + U_{en} + U_{ee})/Am_p \tag{3.91}$$

为了避免势能定义的混淆,应当指出这里静电能的能量尺度的零点,与本书其余讨论中常用的约定不一致。其他的讨论中未明确说出的观点是:一个零能量、零压力的状态名义上是零温下的无约束中性气体所处的状态(但没有量子效应)。在较高温度下,正能量的投入使其电离;在较高密度下,电离气体的库仑相互作用提供了一定键能,减少了原来需要的输入能量。相比之下在通常的托马斯-费米模型中,零能量状态即是所有粒子都飞散至无限远的情形。把托马斯-费米模型的结果转换到标准尺度下,原本还需要把真空中一个原子被完全剥离所需的电离能量加入到式(3.91)括号内的能量中去。然而,若把等效多方指数当作比较模型的手段,这个能量的加入就有所干系了。

最后,还有一类计算机模型称为 QEOS(Quotidian Equation Of State),即常用物态方程,这里"Quotidian"意味着"日常的"或者"惯用的"。托马斯-费米模型往往与 QEOS 一起应用(如在 More 等人的工作中)。这类模型像是添加一些项或方程,用以考虑固体、液体和气体状态,以及这些状态之间的过渡。这类模型是很有用的方法,可以把模拟计算必然涉及的很广范围内的参数相互联系起来。

3.4.2 表格式物态方程

数值模拟中描述物质的另一种途径是使用表格式物态方程。这类物态方程的想法,在于综合采用实验数据、分子动力学数值模拟和一些可能是最好的模型等,根据这些手段构造表格,把两个热力学量(四个热力学量 ρ、p、ε、T 中选两个)表示为另外两个热力学量的函数。前面已讨论过的所有模型都可以做成这样的数据表格,而且必定是平衡状况下的数据,计算机编码可从这些表格数据中插值,以合适的精度获取所需的物质性质数据。

构建物态方程表格的一个挑战性问题是,如何保持热力学上的一致性?表格可以显示当一些热力学量不变时,另一些量应怎样变化,这些变化在热力学上必须自洽。当对物质做功或者输入热量时,所引起的状态变化也必须与热力学第一定律相一致。如果不是如此,则使用此表格的计算机编码将会以非物理方式莫名其妙地产生或者失去能量。当邻接区域使用不同的物态方程模型需要融合时,要达到热力学上的一致性实际上十分困难。应用热力学第一定律对表格数据进行热力学一致性的检查,这种做法之一是根据热力学第一定律计算当地偏导数值。朗道和栗弗席兹编写的理论物理教程第五卷中,把热力学第一定律写为

$$d(\rho\varepsilon)/dV + p - T(dp/dT) = 0$$

选择一个物态方程表格，根据此式就可计算偏导数，并把结果表示为曲线或画成等值线图形。

应用最广的表格式物态方程是美国洛斯阿拉莫斯国家实验室（LANL）提供的 SESAME 表，这种表格在若干个量级的密度、温度范围内列出了作为这两个变量函数的比压力（每单位密度的压力）和比内能的值。图 3.20 是用物态方程 SESAME 表画出 γ 曲线的两个示例，图的横轴表示温度的范围，虚曲线表示固体密度，实曲线表示密度为 0.1g/cm^3，都与高能量密度物理实验室研究有关。从图 3.20 中首先可以看出，这两种密度下的 γ 曲线在低温范围中的性态十分不同，反映了当强迫 γ 接近于 1 时，低密度多自由度气态（甚至或许是团簇）物质性态设想的发展；反之，随着温度下降，固态密度 γ 曲线的变化显得更为有序。根据传统的热力学，如果固体物质形成为被界面紧密束缚的晶格，则在低温下 γ 应趋于 3。

SESAME 表中低温段的 γ 有时超过 3；高温下物质的 γ 似乎趋于 5/3，对应于完全剥离的理想气体，下面将进行更多的讨论。在中间温度段（对于聚乙烯约为几电子伏特至 100eV，对于氙约为几电子伏特至 1000eV），γ 随温度而下降。本章前面的讨论中已经预见到这种性态。氙的这个结果，事实上偏离对于电离高 Z 物质的推测值并不远。另一方面，聚乙烯的 γ 值也低于 5/3 不多，γ 的下降事实上是否有这么大，还是值得怀疑的。

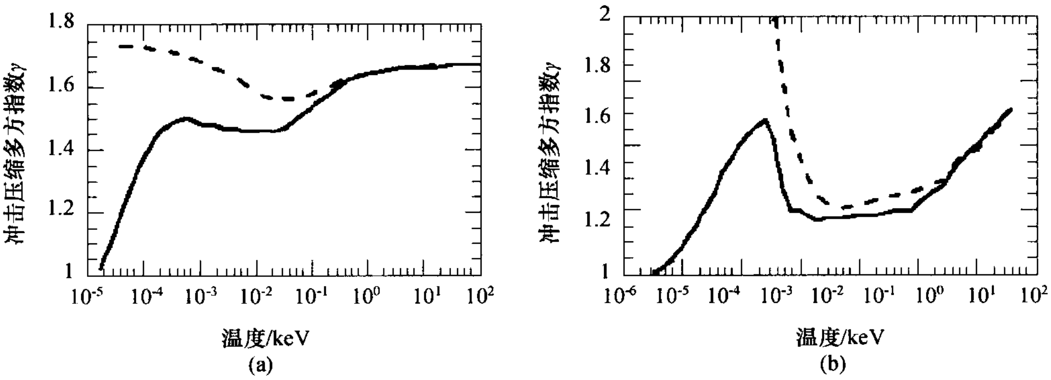


图 3.20　SESAME 表计算的（a）聚乙烯（CH）和（b）氙（$A = 131, Z = 54$）的 γ 值随温度的变化

下面的实曲线表示 0.1g/cm^3 的密度，上面的虚曲线为固态密度。此图引自 Carolyn Kuranz 的论文。

图 3.20 还提供了说明该物态方程表格具有局限性的例子。如果高温下（1keV 以上）的物质没有如假设那样确实处于平衡态，则此时辐射场的出现将使 γ 变为 4/3。因此可以看出，SESAME 表忽略了辐射场。虽然制作该表时并未假设物质处于真正的平衡态，但问题在于人们不得不作些特殊的假设。涉及辐射场与物质耦合时，真实系统可能有很大的变化，一套表格无法都考虑到。任何给定的计算机编码对这个问题的处理也时好时坏。

物态方程表格的实际使用还存在其他一些问题，特别是对真实系统的模拟一般都采用平衡模型。然而真实系统差不多总是不平衡的，它们常处于或接近定常状态，但并不是平衡的。一个很好的例子是，等离子体从一个灼热表面膨胀，但并不是主动地受到加热。膨胀中的等离子体发生冷却，过些时间后它的性质慢慢变化。即使在经常见到的几十纳秒时间尺度内，离子和电子可能还未复合，等离子体确实还未达到自身的平衡态。另一方面，物态方

程表格却假设等离子体是瞬态平衡的。如果它已降到凝结温度,按此表格计算则处于凝聚态,尽管这种处理也许很不真实。数值模拟中通常可用密度突然变化的源项来处理这种情况和理论平衡相变情形,但这是完全不真实的。有时候利用 γ 为常数的理想气体模型给出更加真实得多的途径,去模拟随时间变化的系统。关键在于应注意思考一下,我们究竟看到了什么? 不要认为计算机编码揭示的都是真理。

读者也许已经注意到根据设定的模型,上面讨论的一些方程也许会给出压力为负的状态,当这种模型应用于物态方程表格时也会发生同样的问题。有些情形对负压力很敏感,例如,流体动力学模型的意境中要使物质中出现负压力的唯一真实途径是引入拉伸力,也就是压力可以成为负项。如果物质被紧紧束缚住并且相当冷,在拉力的意义下把压力处理为负值是合适的。但是在模拟真实的非平衡系统时,物态方程表格中存在负压力区,则可能造成严重的问题。上节中的例子是从一个表面膨胀出来的等离子体,本来应该具有相应于受到拉伸并处于平衡中的凝聚态的温度和压力,然而实际上把它处理为理想气体更为准确。在某些场合下修改物态方程表格,改变拉伸区域并维持其中的压力始终不为负值,是很合理的做法。物态方程表格工作正常时,数值模拟能够比简单模型更好地重现系统的动力学行为,但是不能指望它总是很好地运作。明智之举是,经常把使用物态方程表格对各种简单物质的数值模拟结果与使用固定 γ 值的结果做比较,这将有助于确定所观察到的动力学行为中哪些方面是由于物态方程表格的特殊性而造成的。

最后,关于新材料的物态方程表格一般是缺乏的,例如低密度泡沫材料。这种材料微观上不均匀,其行为与均匀的低密度物质不相同。事实上在当今的实验中,均匀密度的模型还不能准确预言冲击波在泡沫材料中传播的现象。将来更新的物态方程表格或者某种别的途径能否很好地反映泡沫材料的性质,尚待以后观察。

3.5 实验室和天体物理学使用的物态方程

稍加思考就可知道,物态方程的性质对于天体物理学非常重要。在受引力束缚的天体中(如行星、白矮星或中子星等),内部压力首先取决于引力。但是为了知道天体物质的密度,从而知道任何给定压力范围中它们的体积,人们必须了解物态方程。直接的天文测量能够确定这些天体的质量,有时也能确定其尺寸,通过光谱技术也许还可知道其表面组成,然而通常既无直接的也没有间接的关于天体内部情况的信息。太阳是一个例外,可以应用地震学方法获得很多结果,得到制约其物态方程的数据。

假定已经知道物态方程,我们就能构造行星的模型。基于关于行星物质组成的假设,这种模型就可给出由引力压力和物态方程决定的、该行星质量沿半径分布的规律。物态方程的不确定性,使得这项工作更加困难。例如木星的情形,一些有意义的问题是:具有这样尺寸和质量的整个行星是否都由氢元素组成? 该星体是否必然存在一个冰和岩石的内核? 行星形成理论蕴涵了上述问题的肯定答案。如果掌握了关于氢物态方程的充分知识,才有可能确切地回答这些问题,但在 21 世纪之初这方面的知识仍是不充分的。

上面利用图 1.3 所作的简短讨论表明,物态方程还会影响到人们理解磁场的能力。行

星中的磁场是由被称为“发电机”的内部电流产生的，但遗憾的是行星发电机理论需要复杂的三维计算，而且产生磁场的可能性受到行星内部传导态区域位置的制约，物质是否导电则取决于其物态方程。木星再次提供了构成这种难题的很有意义的情况。木星具有极强的磁场，在太阳系中产生尺度非常大的作用。木星表面处的氢是绝缘体。根据氢的物态方程的性质将可确定，在木星表面下方多深处其电流可以流动，该行星中有多少体积参与了“发电机”作用，这些问题都制约着产生木星磁场的可能性。

3.5.1　物态方程的天体物理学背景

为了说明物态方程的重要性，下面更详细地考虑木星的问题。图 1.3 是木星内部的示意图（在 Guillot 等人的书里有更多讨论），它有一个电介质分子氢组成的外层，人们认为在其地下半径 $0.75R_J$ 处分子氢转变为金属原子氢，该处的压力 $p \approx 200\text{GPa}$，土星的中心是一个压力约达 4TPa 的冰 - 岩石内核。木星的质量 $M_J \approx 10^{-3}M_s$，M_s 为太阳的质量，特征半径 $R_J = 7.2 \times 10^4\text{km}$。关于木星内部的模拟计算结果示于图 3.21，这是一张温度 - 压力（$T-p$）剖面图，以星体年龄为参数。棕矮星 GI229B 的 $T-p$ 曲线也示于该图中。在这种环境下，分子氢（H_2）离解为原子氢，并在较深的地幔中发生电离，从电介质转变为导体。木星近表面地幔中的压力和温度，在几分之一电子伏特温度下处于 100GPa ~ 300GPa 的范围。内部更深处的压力和温度上升，在芯部若干电子伏特温度下达到 4TPa。棕矮星 GI229B 地幔中相应的量值，压力、温度与木星相仿，但其芯部的压力却高出四个量级，即 $p_{\text{core}} \sim 10^4\text{TPa}$。

木星内部构造的关键问题之一是，分子氢地幔与等离子体一阶相变所造成的单原子氢内核之间是否存在一个截然的界面，这个问题对于了解木星内部确切的结构具有重要意义。因为这种相变所造成的间断面趋向于抑制对流热输运，从而改变了木星内部的温度剖面，还会影响到因氦和更重元素的沉积而导致的引力能释放的程度及速率。已经观察到木星和土星的大气层中含有较少的氦，少于这两个行星形成时本来应有的量。人们认为这个现象是 H - He 相分离所引起的。星球外层含氦很少、内部区域含氦丰富的事实十分重要，因为这意味着该行星内部较深处具有一定量较重的元素，并且意味着氦沉积过程中引力能将以热量的形式释放出来。氦的沉积是解释土星内在的热通量之所需，对于木星或许也有意义。上述讨论的重要性在于，目前关于氢性态的各种细致问题的了解仍是十分不肯定的。诸如，从分子氢转变为单原子氢的相变性质，氢的金属相是否存在，H - He 相分离的可能性以及其他一些关键问题，目前都不大清楚。

重于氢、氦的元素在极端高压下的物态方程，是更为复杂的问题，与研究类似地球的行星关系甚大。为了说明此点，图 3.22 中画出了一些计算得到铝的的**冲击绝热线**（Shock Hugoniot），它们是依据很高压力和压缩度下（$p > 1\text{TPa}, \rho/\rho_0 > 3$）铝的性态的不同理论模型得到的。冲击波的 Hugoniot 线即压力 - 密度平面上从一个初始状态点出发，通过不同强度的冲击跃变后可能达到的所有终态点的迹线。各种理论模型之间存在很大的差别（参看 Avrorin 等人和 Trunin 的书），其中最简单的也是使用最广的模型是量子修正的托马斯 - 费米统计模型（TFQC），在图 3.22 中以实曲线表示。这个模型不考虑原子的壳层结构，把电子状态作为连续谱处理。自洽场（SCF）、Hartree - Fock - Slater（HFS）和 INFERNO 等模型，

都把电子壳层作量子力学处理,它们之间的差别在于如何处理与能带对应的密排层次。半经典物态方程模型(SCES)以半经典方法处理离散的电子壳层和能带。ACTEX 模型是一种电离平衡等离子体模型,使用了由拟合光谱学实验数据得到的等效电子-离子势。这些模型一般都包括采取理想气体近似的核组分。一个例外是用蒙特卡洛(MC)计算处理核的热运动,这是在在半经典物态方程模型(SCES)的一种版本中实现的。

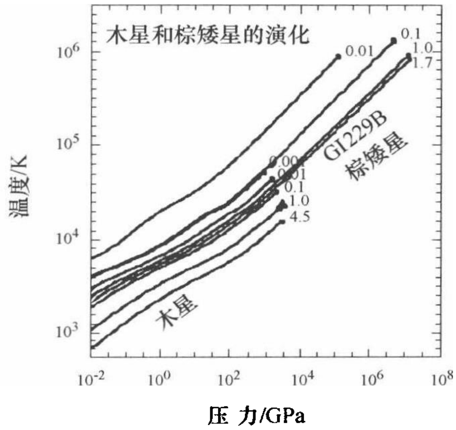


图 3.21　木星和棕矮星 GI229B 不同年龄段对应的温度-压力剖面

(依据 Hubberd 等人的模型计算(1997 年))

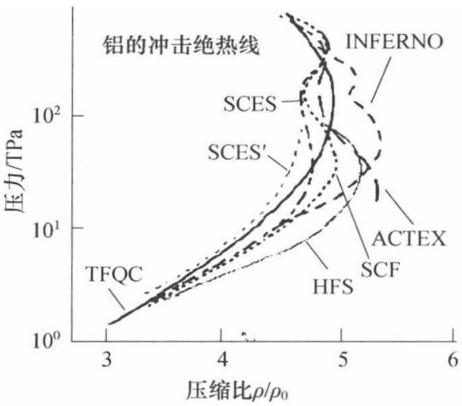


图 3.22　各种理论计算的铝的冲击绝热线

由图可以看出,理论上的不确定性相当大,只能依靠实验解决(此图根据 Avrorin 等人的书(1987 年)改画)。

图 3.22 所示的压力与压缩比关系的理论曲线存在若干次振荡,这是铝的 K 壳和 L 壳电子发生压致电离而引起的。在 10TPa ~ 50TPa 压力下,高度压缩迫使邻近的原子充分相互靠近,使得 L 壳电子发生电离,从而破坏了 $n=2$ 的电子轨道。冲击压缩使得物质中的电子处于自由状态,通过冲击波流动的能量必然更多地转变为内能,正如 4.1 节中将讨论的那样,这将导致物质密度更加增大。因而当模型中新的电子壳层开始发生压致电离时,冲击波后物质的密度随压力更快地增大,这种行为称为物态方程"变软"。压致电离对物态方程的影响,定性上类似于 N_2 和 D_2 分子离解引起的作用,在低压实验中已经观察到这种现象(见 Nellis 的文章)。一旦某壳层的电离结束,其作用即表现为物态方程"变硬",因为此时通过冲击波流动的能量转变为内能的部分减少了。这就是约 100TPa 以上压力范围中一些 $p-\rho$ 曲线向低压缩方向回转的原因。在 300TPa ~ 500TPa 范围中由于 K 壳电子的电离,虽然因 K 壳电子数较少且这种振荡的幅度要低一些,但是可以预期冲击绝热线也会出现相仿的变软—变硬的振荡。冲击绝热线在极端高压范围中的振荡是否真实,在本书写作时还不清楚。如果新电子脱离的真实过程进展得比模型计算预计的更缓一些,也许可使对壳层电离的响应匀滑化,避免出现振荡。

3.5.2　实验室物态方程及其在天体物理学中的应用

物态方程描述了给定种类的大量原子聚集体的平衡性质,即使微量物质一般也含有巨量的原子。使用对于人类尺度而言十分小的物质聚集体进行测量,得到的结果也能直接应

用于行星或恒星尺度的物质聚集体。在这样的意义下，进行物态方程的实验室测量，然后直接应用于天体物理学，是十分简便的事情。

然而遗憾的是，与天体物理系统实际情况相比，实验室依靠压缩进行物态方程测量时只能达到比较有限的压力和密度范围。因此，人们希望把物态方程表示为压力和密度的标度关系，使得实验室测量结果可以适用于天体物理环境的广大范围。在简单物态方程情形这是可能做到的，但是没有必要，如理想气体或者辐射为主导的系统等情形。但在更复杂的情形中，物质的动力学行为因其所处环境不同而各有其特殊性，物质在各种状态下的化学结构的标度关系已很难求得，而且离解、电离等过程仅仅发生在特定的能量条件下。因此，实验室的测量结果只能用来论述与实验真实达到的压力范围中物态方程有关的天体物理问题。

根据 21 世纪初的技术状况，该时期内用于物态方程研究的压力可处于 0.1TPa ~ 10TPa 范围，适合于研究行星体的物态方程问题，可以预期这将是此类研究首先关注的目标。

3.6　测量物态方程的实验

本章最后一节的安排似乎有些问题。一方面在关于物态方程的本章中讨论测量物态方程的实验，看来是顺理成章的；但另一方面为了真正理解这些实验测量运作的道理，又必须具备后面第 4 章、第 8 章和其他一些部分的知识。作者最后选定把本节放在这里，也就是最容易找到的地方。对于刚进入此领域的新手，为了能够深入理解下面的内容细节，有必要先阅读本书有关的其他章节。

多年以来，物态方程的实验测量一直是一个活跃的研究领域，这类实验很多是通过平面飞片的撞击，产生具有设定的波后“粒子”速度的冲击波（见第 4 章），从而得到沿着冲击绝热线（冲击 Hugoniot，其定义可参看图 3.22）的一系列点处的物态方程数据。这种实验通常采用气体炮或者电磁轨道炮发射平面飞片，21 世纪初前后（在液氢样品中）可达到的压力约在 100GPa 以下。这些实验研究中，氢的物态方程是十分活跃的课题，因为其实验数据可应用于气态巨行星内部的研究（见 Nellis 的等人的论文）。有些实验是利用核武器地下试验中发射很高速度的平面飞片并产生很高压力而进行的，它们属于高能量密度状况，但不能看作通常意义下的“实验室”实验。使用一些新的加载技术，高能量密度条件下的物态方程实验就可以在实验室中进行，下面讨论这些方法。

3.6.1　平面飞片直接撞击

使用处于冷状态的给定材料的平面飞片，对于测量这种材料的物态方程具有很大优点。为此，只要让这个飞片直接与同种材料的另一个平面样品碰撞。如后面 4.1.5 节所述，样品中冲击波后的粒子速度恰为平面飞片初始（撞击）速度的 1/2，在冲击波透出被撞击样品的后自由面或者撞击器飞片的前自由面之前，这个粒子速度保持不变。实验采用光学方法测量平面飞片的初始速度以及碰撞时间，再测量冲击波透出被撞击材料样品后自由面的时间，就可以确定样品中冲击波传播的速度。这些测量可采用传统的光学方法或者更先进的技术，直接而且同时测量冲击波速度和波后粒子速度值，再按照 4.1.2 节所述方法推算出材料样品中冲击波后的密

度和压力。铝是经常使用的平面飞片材料，所以人们对铝的物态方程数据了解得十分清楚。

3.6.2 阻抗匹配

如果具有一种物态方程为已知的材料，则利用其作为参考可以确定其他材料的物态方程数据（这种技术通常称为阻抗匹配方法），然而实际上测量的是这两种材料阻止冲击波性质的差异。如图 3.23 所示，阻抗匹配方法的原理分析如下：

从在第一种样品 A 中产生一个参数已知的（左行）定常冲击波开始，同时知道此冲击波后的粒子速度为 u_{p1}，压力为 p_{A1}。十分重要的是，冲击波传播的定常程度要求很高（散布偏差约小于 1%），否则物态方程的测量数据将有较大误差。碰撞产生的冲击波进入紧靠样品 A 左边的待测样品 B，在样品 B 中形成透射冲击波，同时向第一种材料飞片 A 中反射一个冲击波或稀疏波。测量样品 B 中的透射冲击波速度 u_{SB}，该样品中初始压力为 p_{B1}（通常忽略不计）。根据透射冲击波的速度 u_{SB} 和样品材料的初始密度 ρ_{B0}，就可知道该冲击波后的压力 p_{B2} 对应的状态点应当位于由式（4.9）给定的直线 p_{B2}（即处于透射冲击波的瑞利（Rayleigh）线）上。在图 3.23 坐标平面上画出的这条瑞利线的表达式为

$$p_{B2} = p_{B1} + \rho_{B0} u_{SB} u_{p3}$$

式中 u_{p3} 为实验室参考系中材料样品 B 内透射冲击波后的粒子速度，其值暂时还是未知的。p_{B2} 是 u_{p3} 的增函数。

如 4.1.6 节中所述，已知撞击器 A 与样品 B 界面上的连续条件是 $u_{p2} = u_{p3}$，$p_{A2} = p_{B2}$，这里 u_{p2} 和 p_{A2} 分别为入射冲击波进入样品 B 之后及样品 A 与样品 B 邻接区中的粒子速度和压力。已经掌握关于样品 A 物态方程的充分知识，就可以画出 p_{A2} 作为 $u_{p2} = u_{p3}$ 函数的曲线（译注：即图 3.23 中通过入射冲击波后状态点 I 的 p_{A2} 曲线，其上分支是反射冲击波的冲击绝热线，下分支是反射稀疏波的等熵稀疏线）。p_{A2} 是 u_{p3} 的降函数，因为 u_{p3} 的下降对应于右行的反射冲击波离开 A－B 界面速度的增加，因此其波后的压力而增高。如果反射的是稀疏波而不是冲击波，p_{A2} 仍然是 u_{p3} 的降函数，读者可以参阅 4.2 节中的论证。最终可知，表示入射波反射之后样品 A 波后状态的 p_{A2} 曲线与表示透射冲击波后样品 B 状态的曲线 p_{B2} 相交于唯一的交点 II（实际上是一个幅度由实验测量不确定度决定的小区域），由于 $p_{A2} = p_{B2}$，该点也就同时确定了 p_{B2} 和 u_{p3}，给出了样品 B 的冲击绝热线上一个状态点 II 的数据。（译注：由变动样品 A 中入射冲击波的参数，可得到样品 B 的冲击绝热线上一系列状态点的参数），又因冲击波后材料的密度与 u_{p3} 的关系为

$$\rho/\rho_{B0} = (1 - u_{p3}/u_{SB})^{-1}$$

通常把物态方程的多点测量结果画为压力—密度平面上的一系列状态点或拟合曲线。这样利用定常冲击波压缩实验和阻抗匹配方法测定的（p，ρ）状态点的全体，称为冲击绝热线或者**主雨贡纽线**（Principal Hugoniot）。

有一种向样品 A 施加冲击压力的方法，可以高精度获得其初始入射冲击波后的压力值，也就是取铝为样品 A，再用铝飞片去撞击样品 A 的方法，已经在脉冲功率发生器加载的磁驱动平面飞片实验中实现，可参看 8.3.3 节的论述。图 3.24 是使用这种方法测量 100GPa 以上压力范围中液氘（D_2）物态方程的实验系统示意图（参阅 Knudson 等人的论文）。

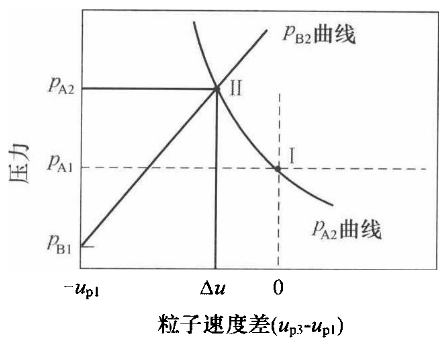


图 3.23　阻抗匹配方法原理

样品 A 中初始入射冲击波后(也就是反射冲击击波或稀疏波前方)参数处于两条虚线的交点处,曲线 p_{A2} 和 p_{B2} 分别表示 A、B 中冲击波压力随粒子速度的变化,这两条曲线的交点确定了物态方程测量点处的压力以及 $\Delta u = u_{p3} - u_{p1}$ 的值。

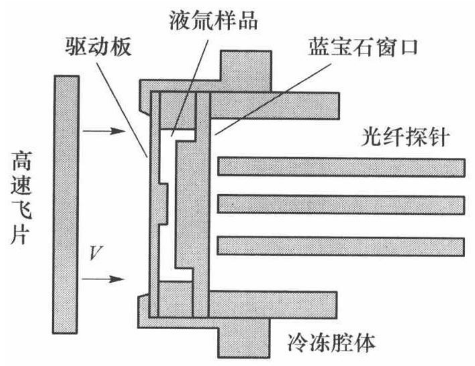


图 3.24　平面飞片驱动的阻抗匹配实验

图 3.24 中磁驱动的铝平面飞片撞击同样铝制的“驱动板”,它们之间的界面速度为飞片撞击速度之半,根据铝的物态方程就可知道驱动板中冲击波后压力 p_{A1}。初级飞片的厚度足以在实验所需时间内维持上述界面处定常的撞击压力。当驱动板中的冲击波进入液氘样品成为在其中传播的透射冲击波的同时,有一个反射稀疏波进入铝驱动板。诊断仪器测定透射冲击波在两段不同厚度液氘样品中的传播时间,即透射冲击波进入液氘样品至到达蓝宝石窗口的时间,得到该冲击波速度 u_{SB},此值与液氘初始密度一起决定了图 3.23 中瑞利线 p_{B2} 的斜率。Knudson 等人通过这种实验获得了液氘的物态方程数据,以很高的精度表明有些理论模型并不适用。

对样品 A 施加初始冲击压力(即冲击波)的另一种方法是使用高功率激光或其他合适的辐射源。这种情形中样品 A 内的初始冲击波速度并不清楚,也必须进行测量。图 3.25 示出了用这种激光加载的方法测量铜物态方程的实验,此时激光烧蚀是压力源(见第 8 章),烧蚀产物的反冲作用驱动在一个台阶形铝板中传播的定常冲击波。铜材料样品紧贴铝板上较薄台阶的表面。冲击波从每个区域的自由面先后透出时,产生的各个光发射被一台光学条纹相机所探测,所记录的发光信号波形示于图 3.25(b)。重要的是中部的光信号(冲击波透出薄的铝台阶表面的信号)与左右两个较厚台阶层表面透出光信号之间的时间差。实验的复杂性在于来自样品侧面的稀疏波会影响冲击波的传播,使其减慢的影响从样品侧面向内散布,这就限制了样品的厚度,从而限制了实验测量的精度。

测量冲击波从厚、薄铝台阶表面透出的时间,可以确定其在铝中传播的速度,依据已知的铝的物态方程得出铝中波后的粒子速度 u_{p1} 和压力 p_{A1}。再利用冲击波从铜样品表面透出的时间,决定透射冲击波在铜中的传播速度 u_{SB}。应用图 3.23 说明的阻抗匹配分析方法,就可获得铜中透射冲击波后的压力和粒子速度,如图 3.25(c)所示。

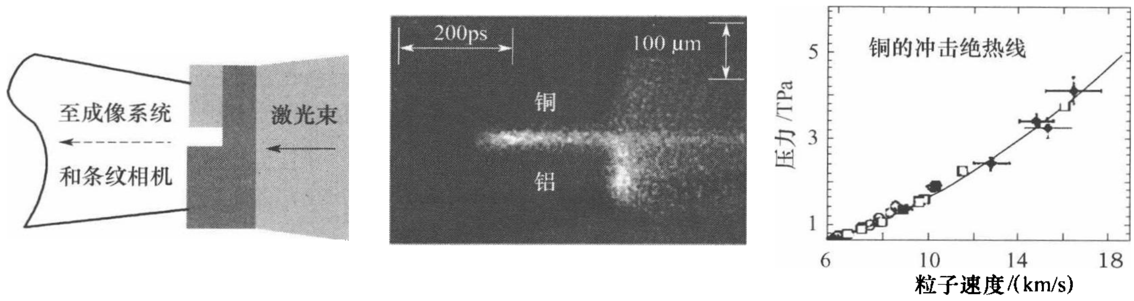


图 3.25　激光驱动的阻抗匹配实验

(a)装置示意图;(b)发光信号的空间波形,时间从左至右增长;(c)推算的铜的物态方程数据。
图(b)和图(c)引自 Benuzzi 等人的论文。

3.6.3　其他方法

撰写本书的近几年中,一些测量物态方程的其他方法得到了实验证实,这里进行有关概述并提供几篇较早的参考文献目录。

第一种方法涉及样品材料中反射冲击波的测量(Mostovych 等,2001 年)。在类似图 3.24所示的实验装置中,冲击波通过液氘区域之后发生反射,测量这个反射冲击波的性质,或者稍后反射的离子的性质,就可以进行比单个冲击波方法测量精度更高的检验物态方程模型的实验。

第二种可选的方法是已经成功地对样品进行无冲击压缩的技术,该方法开辟了构画压力－密度平面上等熵参考线的新天地。这种等熵压缩实验(Isentropic Compression Experiments,ICE)首先是在脉冲功率装置上进行的(Asay 等,1999 年),使用上升较缓慢的磁压力加载,从而有可能测量样品后自由面(非受冲击面)的速度随时间的变化。例如,这类实验测量已经观察到铁材料中晶格结构从 fcc 至 hcp 的相变,表明这种技术可用来研究相变动力学及其时间分辨的演化过程。人们企图利用激光作为激励源进行类似的实验(Edwards 等,2003 年),方法是先用激光烧蚀冲击波造成某种(气库)材料的高速射流,喷射至材料样品前表面得到逐渐升高的压力加载手段。

第三种方法可以使用的场景是,如果某种透明材料中传播的冲击波相当强,足以在冲击波阵面上引起压致电离,此时所用的 VISAR 探测激光束在冲击波阵面(而非材料界面)上反射(Celliers 等,2000 年),反射光束与 VISAR 的入射探测光束相互干涉,就可测定冲击波传播速度和冲击波对探测激光束的反射率(Barker 和 Hollenback,1972 年)。测量得到的反射率又可用来推算受冲击材料的电导率,从而确定是否发生了电介质至金属状态的转变。

第四种方法不用条纹相机测量冲击波透出样品后自由面的波形,而是使用啁啾激光脉冲技术(Benuzzi－Maunaix 等,1999 年)。宽带激光束通过较长的光纤后产生啁啾脉冲,其谱分量(波长 λ)和传播时间之间建立起一一对应关系,即 $t_{sb0} = a + b\lambda_{sb0}$。利用啁啾脉冲作为探测光束照射在材料样品的后自由面上,再把其反射光成像于一个静态的光谱仪,只要注

意到光谱曲线上间断的位置,就可获得高时间分辨率的冲击波透出时间。

第五种方法利用时间分辨的布拉格衍射仪,测量中等强度冲击波($p<100\mathrm{GPa}$)作用于单晶固态材料样品的冲击压缩数据(Loveridge - Smith 等,2001 年)。当材料的晶格受到冲击时,晶格间距($2d$)变小,布拉格峰按照布拉格定律发生偏移,这就直接给出了材料样品的压缩度。通过正交的几个晶格面同时不引起绕射,还可以观察到压缩状态下三维晶体的响应,也就是从一维受冲击状态变化为三维压缩状态的弛豫过程。

第六种方法属于完全不同的状况。在物质还来不及发生任何流体力学运动或膨胀的情况下,利用超短脉冲激光(脉宽约 100fs)探测处于固体密度的压致电离物质的物态方程数据。这种激光脉冲十分短暂,在其作用期间物质样品来不及发生流体力学膨胀,上述方法测到的是处于物质样品初始密度之下的强耦合稠密等离子体的性态。这种方法在关于碳样品的实验中已得到证实(Nantel 等,1998 年)。

第 4 章　冲击与稀疏

“冲击”一词在日常生活中使用十分广泛，如人们受到未曾预料事件的震撼，受难的伤员陷于休克，以及用骤然冷却的方法使材料“激冷”等。“冲击波”是指流体中以波动方式传播的很窄转变区（理想情形中没有厚度）两边介质性质发生的突然转变，高能量密度物理中差不多任何实验至少涉及一个冲击波，它们可以是物体表面受到突然施加的压力作用，或者两个物体之间发生碰撞而产生的。天体物理中差不多每个突然事件都产生冲击波。然而，日常生活中能遇到的冲击波十分稀少，雷闪之后会听到雷声，这是雷电通道产生的冲击波长距离作用的后效，不过希望人们永远不要直接遇到这样的冲击波。大多数人偶尔听到过声爆，这是通常见到的起源于人类活动的唯一的冲击波。

人们直接经历的更多是稀疏或“稀疏波”，这种情形中流体开始运动、膨胀、密度变低，稀疏运动影响范围的边沿向流体中尚处于初始状态的未受扰动区域推进。例如，当一阵风吹过时，由于伯努利定理的压差效应使房门拉开，这是由稀疏导致的房屋内外气压差所造成的。稀疏还有一些实际的应用，广为人知的是制冷技术中利用稀疏膨胀造成散热。差不多每个高能量密度实验至少涉及一个稀疏波，这种说法同样也是正确的。

再者，大多数高能量密度实验还至少包含一个界面，其两边物质的密度（或者物态方程）发生变化。只要有冲击波或稀疏波到达一个界面，作为响应就会出现波的透射和反射。在入射、反射两个传播方向上，界面处形成的透射波或反射波既可以是冲击波也可以是稀疏波，因而总共有四种可能的响应，究竟发生哪一种响应取决于流体运动的细节。在关于冲击波物理的书籍中，读者可找到关于上述问题的系统性分析。本书下面考虑的各种情形，仅着重于所遇到的具体例子。本章中将对冲击波、稀疏波以及波之间的相互作用进行一系列考察，这项工作的重要性显而易见。

4.1　冲击波

图 4.1 表示被称为“第谷”（Tycho）的超新星遗迹的图像，图中该遗迹显示出清晰的边缘，光谱测量表明该处的温度达到 2000 万度，这是许多天体物理冲击波事件中的一例。除了第 11 章所讨论的磁场使得流体粒子局域化的情形以外，这类冲击波中的磁场对于其动力学行为并不重要，因此，实验室实验中有可能观察到与此类似的天体冲击波的动力学行为。但要说明，上述遗迹中的冲击波动力学行为可能引起磁场的增长，冲击波所加速的宇宙射线也有可能对冲击波自身产生影响，本书编写时这两个问题的研究都十分活跃。相反地，太阳所产生的较弱的冲击波会受到磁场的强烈影响，这里不考虑磁化冲击波，读者可以在关于空间等离子体物理学的书籍中了解这些问题。

即使较简单的非磁化冲击波，初看起来也很神秘。为什么一个流体会陡然地改变其性质？大声奏乐时，声波的能量通量使得输送到我们耳边的能量增强，为什么声波的能量通量并不正好增强到为输送所需能量而必需的程度？基本答案是声波以声速运动，其所能输送的最大压力幅差只能达到传输介质（流体）中初始压力的程度，即 ρc_s^2 的大小，因此可设想的声波能够传送的最大能量通量为 ρc_s^3 的量级。然而，可以很容易地迫使流体传输比这更多的能量，其方法是使流体的边界面快速运动，或者在流体中快速释放能量。例如，在温度约 1eV、密度约 $1g/cm^3$ 的单电离等离子体中，压力的量级为 100 万 atm（100GPa）。高能量密度实验中很容易得到更高得多的压力，但是这样的等离子体不可能以发射声波作为对这种压力加载的响应，必须代之以冲击波的形式。本节将讨论冲击波的基本性质。

4.1.1　冲击间断跳跃条件

冲击波的作用有三点：首先，以超声速的冲击波速度向前输运能量；其次，加热和加速冲击波所掠过的介质，使得冲击波后的介质动能和热能增加（强冲击波作用下，这两部分能量的增量彼此相等，这里采取**实验室坐标系**（标架），即波前上游介质为静止的参考系）；再者，冲击波加热了其后方的介质，致使相对于已被加热的波后介质而言，冲击波的运动是亚声速的。因此，波后能量变化的信息可以（波后介质中新的更高的）声速传递至冲击波阵面。然而对于波前的原始介质来说，扰动则是以冲击波的形式来到的。图 4.2 是冲击波的示意图，其参考系固结于冲击波阵面，称为**冲击波坐标系**。以后总是假设冲击波自左向右运动，在冲击波标架中观察则是流体自右向左运动。

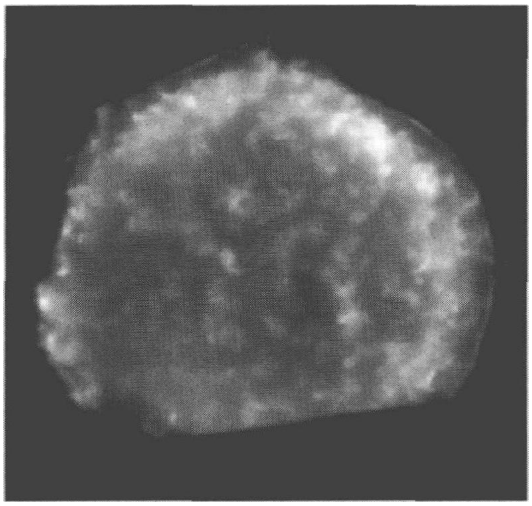


图 4.1　第谷超新星遗迹的图像
本图引自美国国家航天与空间署（NASA）
Cadra X 射线中心，斯密逊天体物理中心。

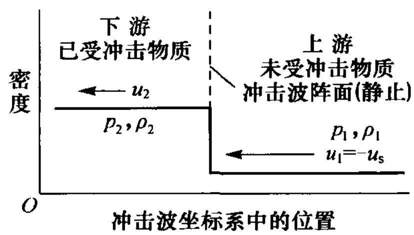


图 4.2　在与冲击波阵面一起运动的参考系中一个单独的定常冲击波的示意图
（$u_1 < 0, u_2 < 0$，在上述参考系中冲击波的速度即为 $u_s = -u_1$）

尽管冲击波阵面是流场量的间断面，但是其前后介质的运动仍然应分别满足质量、动量

和能量守恒的要求。为了揭示冲击波的基本规律，从守恒形式的欧拉方程组出发，这里压力为标量形式，并具有显式的比内能项：

连续性方程
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) \tag{4.1}$$

动量方程
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) - \nabla p \tag{4.2}$$

能量方程
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\nabla \cdot \left[\rho \boldsymbol{u}\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + p\boldsymbol{u}\right] \tag{4.3}$$

下面考虑平面扰动，并在一个包含流动参数突然变化的小区域上对上述三式中任意一个进行积分。使用2.1节的符号，以守恒形式把上述三式进行统一表示，得到

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho_Q \mathrm{d}x' = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_Q(x')\mathrm{d}x' = \Gamma_Q(x_2) - \Gamma_Q(x_1) \tag{4.4}$$

当$(x_2 - x_1)$趋于无穷小，上式左部的积分趋于零，但通量Γ_Q并不一定趋于零。当$(x_2 - x_1) \to 0$，式(4.4)给出$\Gamma_Q(x_2) = \Gamma_Q(x_1)$。这个分析显然适用于该问题所在坐标系中任何一对固定位置（控制面），这正好说明了冲击波参考系的重要性，因为在这个参考系中冲击波始终处于某个固定的x位置处（一般取$x=0$）。把式(4.4)用于式(4.1)~式(4.3)，可导出平面一维情形中冲击波前、后流场量的跳跃关系式，即

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{4.5}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \tag{4.6}$$

$$\rho_1 u_1\left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) + p_1 u_1 = \rho_2 u_2\left(\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) + p_2 u_2 \tag{4.7}$$

更一般的是斜冲击波的跳跃条件，需要沿冲击波传播方向进行积分。两个矢量的流场量$\boldsymbol{u}$和∇p可以有或者没有与波传播方向垂直的横向分量。如果关心的只是平面一维几何情形中单个冲击波与平面界面的相互作用，则可以设想与冲击波固结的标架同时以适当速度作横向运动，使得在这样的参考系中粒子速度矢量$\boldsymbol{u}$不出现横向分量。然而，实际情况并不是总能进行这样的简化，要进行更一般的分析，4.1.5节中将讨论**斜冲击波**，即具有横向流动速度的冲击波。

在由欧拉方程组描述的流体运动中，冲击波跳跃区域的宽度必定无限小。若我们思考某种程度上总会出现于真实流体中的一些例外现象时（如存在黏性），冲击波两边流场量的转变可能成为渐变的。但是，只要黏性或其他因素的作用仅仅局限于冲击波阵面附近，定常流动中冲击波跳跃条件仍能很好地适用于离冲击波阵面较远处的一对上、下游控制面之间。第7章中将讨论与辐射有关的冲击波，此时式(4.5)~式(4.7)还应作补充，导入一些在那种场合下适用的关系式。下一节中将考虑一些这样的关系式。

在转入下节之前，我们注意到至今对冲击波的描述中似乎有自相矛盾之处。一方面，认为冲击波的特点是能够对流经其阵面的流体加热和压缩；另一方面，在式(4.5)~式(4.7)中流场量的下标1、2是对称的，可以交换。根据流经间断面的物质受到加热和压缩的观点，相反的过程是否可使物质冷却并且变得稀薄（密度下降）？使物质陡然地冷却和稀薄的转变，称为**稀疏冲击波**。从守恒方程组的观点看来，稀疏冲击波也可能存在，但可能违反热力

学第二定律（详见4.1.4节的讨论）。

习题4.1

在式(4.2)和式(4.3)中添加引力密度和引力势能，并导出这样修改后的跳跃关系式。

习题4.2

假设在冲击波跃变中相当多能量因辐射而耗散，试写出引入此项修正后的跳跃关系式。

4.1.2　冲击绝热线和物态方程

冲击波能使物质转变到新的状态，其性质通常与处于给定压力、密度状态所需的内能量值有关。变动物质的初始密度、压力和速度，冲击跃变可使其转变为一系列相连的终态。确定物态方程的初级方法之一是利用冲击波进行测量，得到满足**兰金—雨贡纽关系**（Rankine-Hugoniot，即冲击波跳跃关系）的一系列状态点的参数，传统上把这些数据拟合为函数关系$p(p_1, 1/\rho_1, 1/\rho_2)$。此式中密度的倒数是比容，通常写为$v = 1/\rho$，下标1、2分别表示冲击跃变的初态和终态。上述函数关系中终态（即冲击波后或下游介质）的密度是自变量，可任意选择。一系列终态点（参数）构成从同一个给定初态点出发的冲击绝热线（Hugoniot线），在不同的参数平面上此线可以有不同的画法（以图3.22和图3.25为例）。下面说明怎样进行测量才能确定冲击绝热线。虽然该线常称为Hugoniot线，实际上Rankine的工作（1870年）要比Hugoniot的工作（1887年）早了17年。

人们通常能够测量的是介质中的冲击波速度和波后粒子速度，例如，测量冲击波从被冲击物质的不同厚度台阶表面透出的时间，可以推算冲击波的传播速度。由于物质被冲击波强烈加热，测量其表面的发光信号就可以确定上述波的透出时间。波后粒子速度的测量需要使用特别设计的靶样品，冲击波掠过后其界面的运动历史可以被测定，例如靶后界面的运动速度可通过光的反射，利用多普勒频移原理测量，或者用X射线照相技术得到物质界面运动的阴影像。

这种测量一般在实验室惯性参考系中进行，这里波前（上游）物质处于静止状态。如图4.2所示，此时测到的波后物质粒子速度u_p，实际上是冲击波参考系中物质流入和流出其阵面的速度之差，即$u_p = u_1 - u_2$，或$u_2 = u_1 - u_p$。从式(4.5)和式(4.6)得出

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{u_p}{u_1 - u_p} \tag{4.8}$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho u_1 u_p \tag{4.9}$$

根据测得的参数u_1和u_p再去确定物质的热力学状态，是一种很巧妙的方法，但这也就是冲击绝热线实验测量力所能及的事，其中u_p的测量往往比较困难。在3.6节中已经讨论过一些测量冲击绝热线的实验方法。图4.3是式(4.9)的图示，说明如何用u_1和u_p的测量值确定$(p_2 - p_1)$。用平面飞片撞击方法测量冲击绝热线时，往往使用式(4.9)构画类似于图4.3的图线，这样可以直接用被测量的物理量进行思考。

4.1.3　一些有用的冲击波关系式

前面叙述的跳跃关系式的两种形式通常是适用的，但是还有一些从它们导出的关系式

也很有用。冲击波上游的流场量以下标 1 表示，上游任何流体微元至冲击波阵面的距离随时间而缩短。冲击波下游的流场量以下标 2 表示，下游任何流体微元至冲击波阵面的距离随时间而增长。最有用的一些关系式，把上游流体的指定性质与下游流体的性质以及**上游马赫数** M_u 关联起来，马赫数 M_u 的定义是上游介质与冲击波阵面彼此趋近的速度与上游物质声速的比值。上游物质与冲击波阵面彼此趋近的速度通常称为**冲击波速度**，也就是实验室惯性参考系中当上游流体静止时一个单独冲击波的速度，以下记为 u_s。前面已经提及，简单情形中 u_s 等于冲击波参考系中的 $|u_1|$。分析出现几个冲击波的复杂情形时，必须细心思考并恰当地标识每个冲击波的上游马赫数。

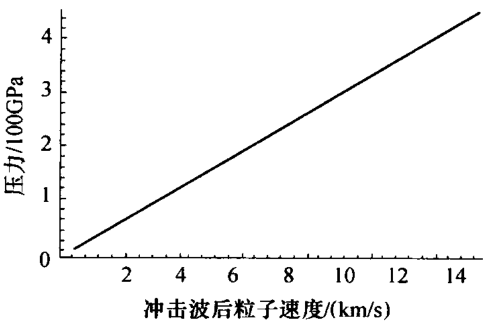


图 4.3　实际中很有用处的式(4.9)的图示
自变量为实验室参考系中的波后物质粒子速度 u_p，纵轴是波后压力 p_2。
图中曲线对应于 $\rho_1 u_1 = 30(\mathrm{g/cm^3})(\mathrm{km/s})$。

为了得到式(4.5)~式(4.7)的解，应采用冲击波参考系。在平面一维的冲击波标架中，这个方程组具有三个式子和四个下游状态的流场量，还需要用物态方程把 ε 和 p 联系起来。通常，假定流体为多方气体，从而有 $\rho\varepsilon = p/(\gamma - 1)$。利用第 3 章中定义的各种多方指数，就能研究与不同类型物质有关的冲击波问题。能量方程中含有 γ 的项是所有以后出现的含有 γ 因子的起源，但是高能量密度物理研究中应当注意，有时冲击波前、后介质的多方指数差异较大，例如，初始状态为较冷的高度有序的晶体，γ 接近于 3，经过冲击波之后成为电离的等离子体状态，$\gamma \approx 4/3$。式(4.5)~式(4.7)仍然适用于这种情况，但是阵面两边介质的 γ 指数应当分别恰当计算。下面给出两个传统结果的比较，一是把 γ 看作不变的(因此不加下标)；二是采用下标不同的 γ，分别对应于冲击波阵面两边的流体。

由于 u_1 是冲击波速度，上游马赫数 $M_u = -u_1/c_{s1} = u_s/c_{s1}$，对于多方介质即为 $u_s\sqrt{\rho_1/\gamma_1 p_1}$。从冲击波关系式中解出波阵面后、前方的压力比为

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2(\gamma + 1) - \rho_1(\gamma - 1)}{\rho_1(\gamma + 1) - \rho_2(\gamma - 1)} \tag{4.10a}$$

或(阵面两边 γ 不同的情形)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2(\gamma_1 + 1) - \rho_1(\gamma_1 - 1)}{\rho_1(\gamma_2 + 1) - \rho_2(\gamma_2 - 1)}\right)\left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}\right) \tag{4.10b}$$

图 4.4(a)表示上述压力比与密度比 ρ_2/ρ_1 的函数关系。换一种形式，对于常指数 γ 容易推导出上述压力比与比容(即密度的倒数)的关系式

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mathrm{v}_1(\gamma + 1) - \mathrm{v}_2(\gamma - 1)}{\mathrm{v}_2(\gamma + 1) - \mathrm{v}_1(\gamma - 1)} \tag{4.11}$$

注意到上面诸式右部的分母在一个特殊的密度比之下变为零，这意味着该式给出的波后压力趋于无限，即表明多方介质存在着极限的冲击压缩度。把式(4.10)重新安排，得出以压

力表示密度比的形式

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{p_2(\gamma+1)+p_1(\gamma-1)}{p_1(\gamma+1)+p_2(\gamma-1)} \tag{4.12a}$$

或(阵面两边 γ 不同的情形)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{p_2(\gamma_2+1)+p_1(\gamma_2-1)}{p_1(\gamma_1+1)+p_2(\gamma_1-1)}\right)\left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_2-1}\right) \tag{4.12b}$$

这就显得更加清楚了。当 $p_2 \gg p_1$ 时,波阵面两边介质密度之比趋于如下极限,即

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\lim}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{4.13}$$

这个密度比值是依靠单个冲击波压缩多方气体可能达到的物理极限,而且只涉及波后介质的 γ 值。高能量密度物理中遇到的冲击压缩情形,经常可使得密度比接近这样的极限状况,特称为**强冲击(波)极限**。低原子量的物质经受很强的冲击波时,其行为可能类似于 $\gamma \approx 5/3$ 的多方气体,极限密度 ρ_2/ρ_1 将为 4 /1。如果受冲击物质的热能占据了内能密度的相当部分(例如第 3 章中讨论的物质电离情形),则可能出现这样的差异。此时跳跃条件(尤其是式(4.6)和式(4.7))意味着 u_2 必定小于其原来的值,增加的内能来自动能和热能,由此,式(4.5)表明 ρ_2 必定大于其原来的值。有些情况下,电离过程中的辐射损失也会有类似的作用。极限密度比依然存在,但其值将受到物质性质的影响。氙(Xe)在气体中很特殊,通常实验条件下它既吸收大量的电离能量,又发出强烈的辐射。相应地,氙气中强冲击波产生的密度跃变应大于低 Z 气体(如氮)的情形。如何把这种变化反映到跳跃关系的数学形式中去,其方法如第 3 章中所述,可以使这种物质的 γ 值减小一些。用等效多方指数的术语来说,氙气的 γ 值一般为 $\gamma \approx 1.2$ 到高于大气密度时的 1.3。在较低密度下,弱电离氙在激发状态中可以储存大量的能量,这种情形可用调整 γ 值的方法来应对,如把 γ 值降低到约 1.1 之下。

回到式(4.12),传统途径是寻求包含 M_u 的有用的表达式,例如以式(4.9)的 p_2 代入式(4.12a),密度比的公式则变为

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{M_u^2(\gamma+1)}{M_u^2(\gamma-1)+2} \tag{4.14}$$

此式展现了我们预期的性态,当 M_u 很大时该密度比值趋于 4.13。一般说来,M_u 很大时密度比应当以 M_u 存留的最大幂次项表示,这个极限也可视为强冲击波极限。相仿地,可以找到压力比的表达式,即

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma M_u^2-(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \tag{4.15}$$

当 M_u 无限增大,此压力比趋于无限。

很遗憾,真实的高能量密度系统中对于 M_u 的了解十分有限。这是因为上游温度可以是室温(实验系统通常在这种环境中制备),也可以通过在真空中冷却的方法达到更低得多的温度,或者依靠冲击波推进中电子或辐射较低程度的加热,使得介质达到很高的温度。M_u 的不确定度很容易达到几倍的范围。冲击波越强,这个问题越不重要。如果把式

(4.5)、式(4.6)和式(4.10)中的压力项都以 $\rho_1 u_s^2$ 相除,就可看出上面的论断。为此,定义

$$S = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_2 p_1}{\rho_1 u_s^2}\right)^2 + \frac{2p_1(\gamma_1 - \gamma_2^2)}{\rho_1 u_s^2(\gamma_1 - 1)}} \tag{4.16}$$

注意到冲击波速度增大时,S 趋于 1;当 $\gamma_1 = \gamma_2$ 时,$S = 1 - \gamma_2 p_1/(\rho_1 u_s^2)$。密度比可写为

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma_2 + S + \gamma_2 p_1/(\rho_1 u_s^2)}{\gamma_2 - 1 + \dfrac{2\gamma_1 p_1(\gamma_2 - 1)}{\rho_1 u_s^2(\gamma_1 - 1)}} \tag{4.17}$$

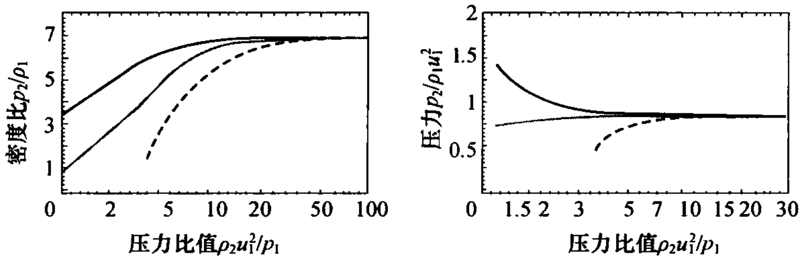
与不同的 γ_1 和 γ_2 值相应的密度比曲线示于图 4.4(a),这里强冲击波极限下密度比达到的终值仍不受 γ_1 值的影响,但在趋于此极限的过程中比值 $\rho_1 u_s^2/p_1$ 受到 γ_1 值的影响。下游压力 p_2 可以相仿地写为

$$p_2 = \frac{2\rho_1 u_s^2}{\gamma + 1}\left[1 - \frac{(\gamma - 1)p_1}{2\rho_1 u_s^2}\right] \tag{4.18a}$$

或(阵面两边 γ 不同的情形)

$$p_2 = \frac{\rho_1 u_s^2}{\gamma_2 + S + \gamma_2 p_1/\rho_1 u_s^2}\left[1 + S\left(1 + \frac{p_1}{\rho_1 u_s^2}\right) + \frac{p_1}{\rho_1 u_s^2}\left(\frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 - 1} + \frac{\gamma_2 p_1}{\rho_1 u_s^2}\right)\right] \tag{4.18b}$$

在单一 γ 值的假设下,上面第一式可用来快速估算波后压力。更有意义的是从中看出,因子 $2/(\gamma+1)$ 的大小接近于 1,对于强冲击波即有 $p_2 \sim \rho_1 u_s^2$,此式很容易记忆和用来估算。图 4.4(b)表示 $p_2/\rho_1 u_s^2$ 对 $\rho_1 u_s^2/p_1$ 的依赖关系。



(a) (b)

图 4.4 (a)波后与波前介质的密度比(ρ_2/ρ_1)对于 $\rho_1 u_s^2$ 与波前压力 p_1 比值的依赖关系,根据式(4.17)计算画出,$\gamma_2 = 4/3$,$\gamma_1 = 3$ (黑线)、4/3(灰线)和 1.1(虚线);
图 4.4(b) 波后压力 p_2 与 $\rho_1 u_1^2$ 的比值对于 $\rho_1 u_1^2$ 与波前压力 p_1 比值的依赖关系,根据式(4.18)计算画出,($p_2/\rho_1 u_1^2$)趋于渐近值 $2/(\gamma+1)$,$\gamma_2 = 5/3$,$\gamma_1 = 3$(黑线)、4/3(灰线)和 1.1(虚线)。

进一步推导可以得到关于温度的类似表达式。首先把压力表示为

$$p_2 = (Z_2 + 1)k_B T_2 \rho_2/Am_p$$

这里已假设电子与离子完全平衡,而且处于非简并状态。由式(4.18b)得到

$$k_B T_2 = \frac{Am_p u_s^2}{1+Z_2} \frac{2(\gamma_2 - 1)}{\left[\gamma_2 + S + \frac{\gamma_2 p_1}{\rho_1 u_s^2}\right]^2} \left(1 + \frac{2\gamma_1 p_1}{(\gamma_1 - 1)\rho_1 u_s^2}\right) \left[\frac{1+S}{2} + \frac{p_1}{\rho_1 u_s^2}\left(\frac{S}{2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - 1}\right) + \frac{\gamma_2}{2}\left(\frac{p_1}{\rho_1 u_s^2}\right)^2\right] \tag{4.19}$$

式中 Z_2 为波后介质的平均电离度。

在强冲击波极限下有

$$k_B T_2 = \frac{Am_p u_s^2}{1+Z_2} \frac{2(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_2 + 1)^2} \tag{4.20}$$

具有弱碰撞的冲击波情形中，由于低密度或者高温度，紧接冲击波阵面后的离子温度可以在式(4.20)中令 $Z_2 = 0$ 和 $\gamma_2 = 5/3$ 而得到。这个方法也适用于中性原子气体中的冲击波，这就是各种场合下都可以取 $k_B T_2 = (3/16) Am_p u_s^2$ 作为标准估算式的原因。然而，在高度电离的、电子与离子之间存在强烈碰撞耦合的等离子体中，这个标准估算式明显地大大高估了波后的离子温度。

习题 4.3

利用能量作论据，探讨怎样把式(4.20)推广到双组分等离子体的情形。

强冲击波还有一些值得了解的特性。由于速度比始终是密度比的倒数，在强冲击波极限下即有

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{4.21}$$

根据式(4.21)可以求出实验室参考系中波后介质的粒子速度 u_p（在这个参考系中波前介质为静止，详见式(4.8)上面段落的讨论），得到

$$u_p = u_s + u_2 = \frac{2u_s}{\gamma + 1} \tag{4.22}$$

当 γ 分别为 5/3、4/3 时，u_p 分别为 $(3/4)u_s$、$(6/7)u_s$，也就是说，一般物质中波后粒子速度大致是冲击波速度的 80%。容易看出，当密度跃变增高时，波后粒子速度更加接近于冲击波的速度。考虑强冲击波极限下的波后压力 p_2，把式(4.18a)中的 ρ_1 和 u_s 用波后参数替代，得出

$$p_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \rho_2 u_p^2 \tag{4.23}$$

因此，在上游流体驻定的参考系中，多方气体中强冲击波后方流体的动能和内能彼此相等（因为 $\rho\varepsilon = p/(\gamma - 1)$）。应用式(4.23)，再次考察强冲击波极限下一些速度量如下：

已受冲击流体中的声速为 $\sqrt{\gamma p_2/\rho_2} = \sqrt{\gamma(\gamma-1)/2}\,u_p$，当 $\gamma = 5/3$ 时，声速为 $\sqrt{5/9}\,u_p$。在实验室参考系中，并且 $\gamma < 2$ 时，由于声速低于 u_p，波后也是超声速流动。然而，此时支持冲击波的压力源（或活塞）必须以速度 u_p 推进，活塞表面与冲击波阵面之间的距离则以速度 u_2 增大，容易证明 $u_2 = ((\gamma-1)/2)u_p$；$\gamma = 5/3$ 时，$u_2 = (1/3)u_p$。这样，压力活塞表面与冲击波阵面分离的速度仍是亚声速的。这个论断完全等价于说："在冲击波参考系中，

下游流体以亚声速运动。”

习题 4.4

附录 B 给出了式(4. 10) ~ 式(4. 15)的推导。当 $\gamma_1 = \gamma_2$ 时,试推导式(4. 18)和式(4. 20)。建议使用计算机的数学程序。

习题 4.5

根据式(4. 10)和式(4. 12),推导 $\gamma_1 = \gamma_2$ 时对强、弱冲击波都适合的 T_2 的普遍表达式。把所得结果用物理意义清楚的参数表达,使得各项之间的关系明显可知。检查所得到的结果是否为式(4. 19)的一种极限情形,以及式(4. 20)是否是所得到结果的一种极限情形。

下面考察某些典型参数。高能量密度实验可以在 $\rho_1 = 1\text{g/cm}^3$,$A = 6.5$ 和 $Z = 3.5$ 的塑料物质中产生压力幅值为 5 TPa(即 $5 \times 10^{13}\text{dyn/cm}^3$)的冲击波,这种塑料的性态与 $\gamma \approx 4/3$ 的多方气体相像,冲击压缩后的密度 $\rho_2 \approx 7\text{g/cm}^3$。根据式(4. 18),上述冲击波的速度近似为 80km /s (即 8×10^6 cm/s),通过厚 100μm 塑料层的时间只有 1. 2ns。又依据式(4. 20),冲击波后介质的温度近似为 25eV。作为比较,考虑由“第谷”之类超新星遗迹产生的星际介质中的冲击波,其速度大于或等于 1000km/s (在较年轻的超新星遗迹中更快些),波前密度 ρ_1 为 $1\text{amu/cm}^3 \sim 10^{-24}\text{g/cm}^3$,因此波后压力 $p_2 \sim 10^{-8}\text{dyne/cm}^2$,即 10^{-9}Pa 量级。这个压力看起来很低,但波后介质的温度不低于 1keV,形成的等离子体非常灼热。但是,即使在十分年轻的超新星遗迹中出现的冲击波速度还要高出 10 倍以上,其等离子体温度还没有接近相对论范围的值。因此,除了在冲击波阵面外产生的宇宙射线以外,非相对论的理论和实验仍可用来表述这些系统的行为。

4.1.4 经过冲击波后熵的变化

经过冲击波后介质的质量、动量和能量保持不变,但熵不是如此,这并不令人惊讶,因为学过统计物理或热物理的人都知道,这是非绝热转变中流体温度上升时出现的情况。下面研究并讨论通过冲击跃变后介质中熵的变化。

使用关于比熵定义的式(2. 11)以及式(4. 12),得到经过冲击波后介质熵的增量为

$$s_2 - s_1 = c_V \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right] \tag{4.24}$$

绝热转变中(p/ρ^γ)保持不变,上式的熵增为零。冲击波是不可逆的非绝热转变,因此通过冲击波后介质的熵会增加。对于单个强冲击波,式(4. 24)右部对数项中 p_2 占优势,因为密度比的变化只限于一个较小的范围。在强冲击波极限下得出

$$s_2 - s_1 = c_V \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^\gamma\right] \approx c_V\left[\ln\frac{p_2}{p_1} - 2.2\right] \tag{4.25}$$

上式右部最后的数值是取 $\gamma = 5/3$ 而得到的,并且估计 p_2 为数百兆帕,p_1 为 3GPa,s 及 c_V 采用 cgs 单位制。再次注意到,完全电离的等离子体中电子和离子都具有热输运作用,因而得到

$$c_V = \frac{(Z+1)k_B}{Am_p(\gamma-1)} = 9.57\times10^7\frac{Z+1}{A(\gamma-1)}(\text{J}/(\text{keV}\cdot\text{g})) \tag{4.26}$$

此式适合于温度以 keV 为单位的表述。我们将看到，一个惯性约束聚变靶丸中的熵需要维持在 4×10^8J/(keV · g)以下。由于要求冲击波前、后的压力比值大于 1000，用单次冲击的方法不能实现惯性约束聚变所需要的压缩程度。

习题 4.6

利用式(4.24)估算当马赫数趋于 1 时熵的变化量。

读者可能觉得奇怪，前面已经指出冲击波与流体中质量、动量和能量的基本守恒方程组是一致的，而熵是由冲击波产生的，正是同一组方程式导出了第 2 章中表明熵守恒的式(2.12)。换言之，如果熵的守恒与基本方程组导出的方程相一致，这个方程组说明了冲击波的存在，为什么经过冲击波之后熵并不守恒？对这个难题的解释是，冲击波实际上是一种耗散结构，其细节不能用式(4.1)～式(4.3)描述。依据这三个守恒方程式的观点，冲击波转变可以发生于一个没有厚度的物质薄层中，因为这样的薄层不会改变流动中的质量、动量及能量的通量。然而，冲击波实际上把部分动能转变成为热能，这就形成了一种熵源。如果想要细致描述冲击波的这种作用，则需要在动量和能量方程中增加一些项，用以考虑流体中的这种变化。用这样改进后的方程组得出关于熵的方程，其中会出现一个熵源项。当冲击波转变区的厚度趋于零时，该项的极限值并不为零。

现在设想采用 n 次冲击的方法替代单个强冲击波，达到后者原来应实现的压力比 p_2/p_1，该比值以后写为($p_{\text{final}}/p_{\text{init}}$)。对于 n 次冲击压缩来说，每次冲击需要达到的压力比 $R_p=(p_{\text{final}}/p_{\text{init}})^{1/n}$，相应的密度比记为 R_ρ，可以趋于或不趋于$(\gamma+1)/(\gamma-1)$。但是 $n>1$ 时，最终的密度比应大大超过这个单次冲击压缩的极限值。在相同的终态压力下，多次冲击的介质中密度相对增高，但温度相应降低，因此多次冲击压缩情形的熵增低于达到同样压力比的单次冲击波情形。用公式表示为

$$s_2 - s_1 = nc_V\ln\left[R_p\left(\frac{1}{R_\rho}\right)^\gamma\right] = c_V\ln\left[\frac{p_{\text{final}}}{p_{\text{init}}}\left(\frac{1}{R_\rho}\right)^{n\gamma}\right] \tag{4.27}$$

图 4.5 表示式(4.27)计算得到的熵增，这里用式(4.12)计算 R_ρ，最终压力比($p_{\text{final}}/p_{\text{init}}$) = 1000。可以看出，仅用很少几个冲击波代替单次冲击波，就能大大降低总的熵增。冲击次数趋于无限大时($n\to\infty$)，每次压力跳跃的幅度逐渐降低，其极限则是一个不产生熵增的绝热压缩过程。

使用多次冲击对物质施加较高的压力，是一种重要的实验设计手段。如同惯性约束聚变(ICF)中那样，希望达到较低的熵增和较高的密度，就应当采用多次冲击压缩的途径。如果想要得到高温(例如产生快速喷流的情形)，则应采用单次冲击的方法。如果希望细致地调整最终状态介质的密度、温度和熵值，则应采用为此目的专门设计的多次冲击方法。

4.1.5　斜冲击波

如果在所选取的冲击波参考系中，上游来流的速度矢量中与冲击波传播方向垂直的横

向分量不为零,则必须分析本节讨论的斜冲击波问题。这个问题仍然可采用在速度横向分量为零情形中正确适用的方程式(4.5)~式(4.7)来研究。我们指出,实际中斜冲击波可用多种方法产生,简单的方法如使用表面倾斜的活塞,所驱动的冲击波就是斜冲击波。另外,一个正冲击波与倾斜的界面相互作用时,透射波和反射波都有可能是斜冲击波。分析斜冲击波问题所需的几何关系示于图4.6。

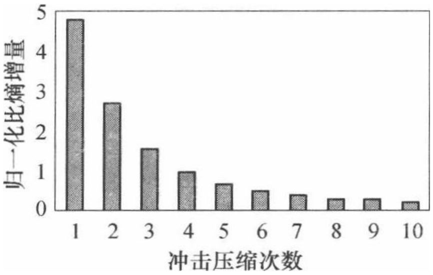


图4.5　压力增长总倍数为1000的条件下,归一化比熵$(s_2-s_1)/c_V$的累计增量与冲击次数$\boldsymbol{n}$的关系

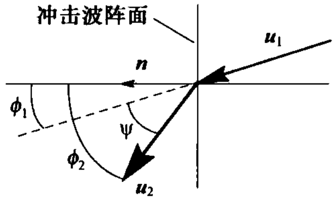


图4.6　斜冲击波的几何定义

为了处理不为零的横向速度分量,采用$\boldsymbol{n}$表示冲击波阵面的单位法向矢量,它垂直并且朝向冲击波阵面(法向来流方向)。按图4.6的规定,$\boldsymbol{n}$的指向为自右向左。速度$\boldsymbol{u}$的法向分量为$\boldsymbol{u}_n=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$,横向分量即$\boldsymbol{u}_\perp=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{n}$,下标n和⊥分别代表法向和横向分量。从式(4.1)~式(4.3)可导出如下关系式:

$$\rho_1 u_{n1}=\rho_2 u_{n2} \tag{4.28}$$

$$\rho_1 u_{n1}^2+p_1=\rho_1 u_{n2}^2+p_2 \tag{4.29}$$

$$u_{\perp 1}=u_{\perp 2}=u_\perp \tag{4.30}$$

$$\rho_1\varepsilon_1+p_1+\frac{1}{2}\rho_1 u_{n1}^2=\rho_2\varepsilon_2+p_2+\frac{1}{2}\rho_2 u_{n2}^2 \tag{4.31}$$

习题4.7

推导式(4.28)~式(4.31)。

与以前论述的方程组相比较,可以看出这里增加了一个新方向的重要信息——经过冲击波时介质速度的横向分量保持不变。或者说,把以前方程组中的u改成u_n更正确些(见上面诸式中相应的式子)。这个观点并不使人惊奇,因为正是粒子速度的法向分量u_n的变化,才导致了波后压力和内能的变化。

从上述方程组得出的一个明显推论是,经过斜冲击波后介质粒子速度的法向分量降低、横向分量不变,导致该速度矢量(及流线)发生转折,更加偏离波阵面的法向。进行数学推导,可以得出斜冲击波如下的一系列关系式。

设定来流$\boldsymbol{u}_1$与$\boldsymbol{n}$之间的夹角为来流角ϕ_1,$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}=u_1\cos\phi_1=u_{n1}$,可以得出波阵面后出流速度$\boldsymbol{u}_2$与$\boldsymbol{n}$之间的夹角即出流角$\phi_2$满足

$$\tan\phi_2=\frac{u_\perp}{u_{n2}}=\frac{u_\perp}{u_{n1}}\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\tan\phi_1 \tag{4.32}$$

对于多方气体,有

$$\tan\phi_2 = \frac{M_{nu}^2(\gamma+1)}{M_{nu}^2(\gamma-1)+2}\tan\phi_1 \tag{4.33}$$

式中以 u_{n1} 计算的上游马赫数记为 M_{nu}。

有时人们希望知道经过斜冲击波后流动的方向偏转了多少角度,例如飞行体的超声速绕流问题。为此,要确定来流经过斜冲击波阵面后的折转角 ψ,其定义式为 $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = u_1 u_2 \cos\psi$。把波阵面前、后的粒子速度用法向和横向分量表示,并以 $u_1 u_2$ 除之,得到

$$\cos\psi = \cos\phi_2[\cos\phi_1 + \sin\phi_1\tan\phi_2] \tag{4.34}$$

再以式(4.32)代入,消去 ϕ_2 后,得到

$$\cos\psi = \frac{\cos\phi_1 + (\rho_2/\rho_1)\sin\phi_1\tan\phi_1}{\sqrt{1+(\rho_2/\rho_1)^2\tan^2\phi_1}} \tag{4.35}$$

式(4.35)的一个有意义的推论是:来流经过斜冲击波之后的折转角存在最大值。图 4.7 表示若干设定的密度比之下 ψ 对 ϕ_1 的依赖关系,从中可以看出最大折转角与经过冲击波之后的介质密度比有关。对于头部相当扁钝的超声速飞行体,波后介质若要沿其表面流动,则折转角将大于可能的最大值,此时在钝头前方将出现弯曲的脱体冲击波阵面,使来流的折转角减小到可能的程度,并且加热流体使得波后绕钝头体的流动是亚声速的。图 4.8 说明了这个情形。图 4.7 和图 4.8 对于密度比已知的强斜冲击波问题十分有用。

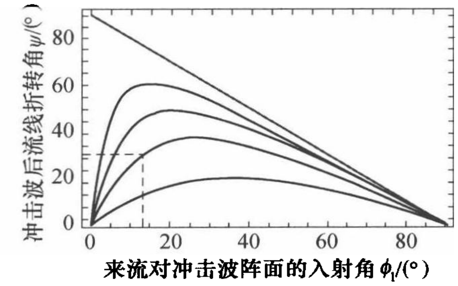


图 4.7　斜冲击波后流动的折转角与入射角的关系

（密度比参数从下而上分别为 2、4、7 和 14）

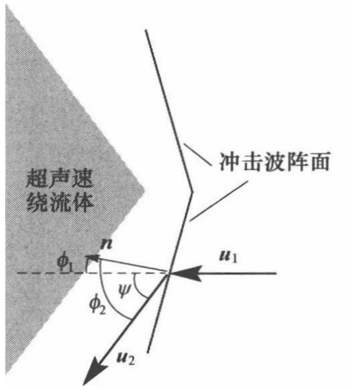


图 4.8　钝头飞行体及其前方脱体冲击波的示意图

关于多方气体中较弱的冲击波,从式(4.33)中可以看出上流马赫数也与来流的入射角有关,这样就可画出一种用于研究斜冲击波参数的称为冲击波极曲线的标准图线,读者可以参阅朗道和栗弗席兹的专著以及许多其他的流体力学教科书。第 5 章中讨论冲击波稳定性时,将对式(4.35)在小入射角极限下的性态感到兴趣。由于此极限下 ϕ_1 相当小,$-(\phi_1^2/2)(\rho_2/\rho_1)^2$ 也十分小,从式(4.35)可得到 $\psi = \phi_1[(\rho_2/\rho_1)-1]$。

习题 4.8

推导式(4.34)和式(4.35)。

4.1.6 冲击波与界面的相互作用和平面飞片撞击

对于单个冲击波基本性质的理解，是构建本书的重要基础。诸如超新星遗迹边缘或者激光烧蚀时靶的初始响应等问题中，系统的行为实质上就是单个冲击波的动力学过程。但是还存在许多情形，其动力学过程是冲击波与界面之间的相互作用以及其他现象所联合产生的，例如，超新星遗迹中的冲击波遇到分子云团或其他稠密障碍物的情形，又如实验中利用冲击波的来回反射、多次压缩和加热物质的情形。这里将讨论的第一个例子是冲击波（或者一般说来，具有一定性质的来流）与一个密度增高的介质界面的相互作用，通常这将导致入射波后方（密度较低）介质中的“反射”冲击波及其前方密度较高介质中的“透射”冲击波。这个例子表明一种可能的响应——当一个冲击波到达一个界面时产生两个冲击波。图 4.9 是这种相互作用的示意图，下面还要进一步讨论，在 4.4 节中将讨论其他的情形。

第二种介质以及冲击波与其相互作用的出现，使得符号表示问题更为复杂。如图 4.9 所示，用下标 0 表示第一种介质的原始状态；下标 1 表示介质在入射冲击波之后的状态；下标 2 表示介质在反射冲击波之后的状态；下标 4 和 3 分别表示第二种介质在透射冲击波之前的原始状态以及在其后方的状态。对于状态 0 基本没有兴趣，仅仅由于它们对状态 1 有影响而已，强冲击波极限下则可不考虑这种影响。另外，若第二种介质初始时不是固体（通常应处于凝聚态），则处于状态 4 的物质将向左边膨胀，不然则应有 $p_0 = p_4$。我们的目的是在给定两种介质性质和入射冲击波参数的前提下，计算反射和透射冲击波的参数。注意到在两种介质的界面处存在着计算中必须利用的连续条件：$p_2 = p_3, u_2 = u_3$，也就是说，界面两边密度不同介质的压力和速度仍是连续的。如果不是这样，则冲击波经过之后该界面处应产生另外的波或者空隙，这将与冲击波是介质性质局域转变间断面的定义相矛盾。为了解析研究界面处冲击波的行为，下面将记第一、二种介质的多方指数分别为 γ_1 和 γ_4。

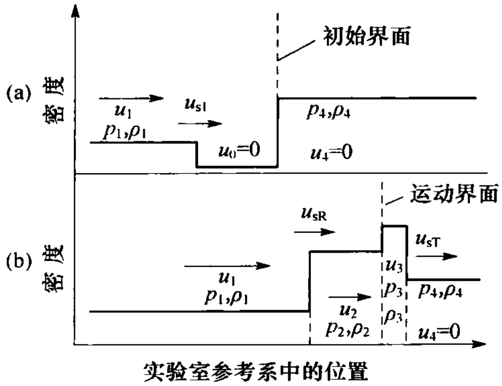


图 4.9　定常冲击波入射密度增高介质界面情形的示意图
(a) 冲击波到达界面之前；(b) 冲击波到达界面之后。

下面的推导方法相当通用，其结果适用于许多具体情况。一些较简单的情形，如冲击波从刚壁上的反射，或者理想平面飞片的性态等，留给读者作为习题思考。如图 4.9(a)所示的入射冲击波，根据式(4.5)、式(4.14)和式(4.15)以及状态 0 的介质性质，可以得到 ρ_1、u_1 和 p_1 等入射波后的参数。另一方面，图 4.9(b)描述了一个入射的固体板块（平面飞片）撞

击另一个固体板块(靶板)产生的相互作用问题,此时状态 1 的参数不能仅由冲击波关系式确定。为了推广上述分析,把图 4.9(b)看作两个具有一般材料性质的飞片碰撞相互作用的近似描述,也就是假定该图中表示的是经过一些初始过渡阶段以后的过程,不考虑这两个“飞片”各自的自由面的影响。这种可能性发生在一些能够产生处于等离子体状态的平面飞片的实验中,其净效果相当于从初始状态为 1 的介质着手,这里比值 $p_1/\rho_1 u_1^2$ 与以前相互作用的历程有关。总之,应用以前的公式可以得出

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_{12}^2(\gamma_1 + 1)}{M_{12}^2(\gamma_1 - 1) + 2} \tag{4.36}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2\gamma_1 M_{12}^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1} \tag{4.37}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_4} = \frac{M_{34}^2(\gamma_4 + 1)}{M_{34}^2(\gamma_4 - 1) + 2} \tag{4.38}$$

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{2\gamma_4 M_{34}^2 - (\gamma_4 - 1)}{\gamma_4 + 1} \tag{4.39}$$

$$u_{sT} - u_3 = u'_3 = u_{sT}\rho_4/\rho_3 \tag{4.40}$$

$$u_1 - u_{sR} = u_{s12} \tag{4.41}$$

$$u_2 - u_{sR} = u'_2 = u_{s12}\rho_1/\rho_2 \tag{4.42}$$

$$p_2 = p_3 \tag{4.43}$$

$$u_2 = u_3 \tag{4.44}$$

式中 $M_{12} = u_{s12}/c_{s1}$;$c_{s1} = \sqrt{\gamma_1 p_1/\rho_1}$;$M_{34} = u_{sT}/c_{s4}$;$c_{s4} = \sqrt{\gamma_4 p_4/\rho_4}$;$u_{s12}$为在反射冲击波参考系中观测的上游粒子速度;$u'_2$ 为该参考系中观测的反射冲击波后的粒子速度;u'_3 为在透射冲击波参考系观测的该冲击波后的粒子速度;u_{sR} 和 u_{sT} 分别为实验室参考系中的反射和透射冲击波的速度。

式(4.36)~式(4.44)等九式中,已知量是 ρ_1、ρ_4、p_1、p_4、u_1、u_4、γ_1 和 γ_4,九个未知量是 ρ_2、ρ_3、p_2、p_3、u_2、u_3、u_{s12}、u_{sR} 和 u_{sT},因此这个方程组虽然有些复杂,但还是封闭的。

习题 4.9

推导式(4.42)。首先应思考在哪个参考系处理,这是求解所有类似问题的关键。

习题 4.10

冲击波入射于不运动、不变形的刚壁,是冲击波与界面相互作用的较简单情形。试确定求解该问题的方程组,并推导出有关的动力学行为。记未受冲击的初始介质状态为 0,入射冲击波之后的介质状态为 1,冲击波从刚壁反射形成的反射冲击波后的状态为 2。

经过一定的演算,可以求解方程式(4.36)~式(4.44)。一种方法是把其他未知量都表示为 u_2 的关系(u_2 是两种介质中冲击波后共同的粒子速度),然后推导出确定 u_2 的方程式。由于一种介质中的冲击波参数,大抵与另一种介质的性质无关,这样做肯定会有结果的。这样就得到了除式(4.44)以外的如下 8 个式子,即

$$16\gamma_1 p_1 + \left[\sqrt{\frac{16c_{s1}^2 + (\gamma_1+1)^2(u_1-u_2)^2}{(\gamma_1+1)^2(u_1-u_2)^2}} - 1\right]\times$$

$$\left[4(\gamma_1+1)(p_1-p_4) - (\gamma_1+1)(\gamma_4+1)\rho_4 u_2^2\left(1+\sqrt{1-\frac{16c_{s4}^2}{(\gamma_4+1)^2u_2^2}}\right)\right] = 0 \tag{4.45}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4c_{s1}^2 + (u_1-u_2)[(\gamma_1+1)(u_1-u_2) + \sqrt{16c_{s1}^2 + (\gamma_1+1)^2(u_1-u_2)^2}]}{2[(\gamma_1-1)(u_1-u_2)^2 + 2c_{s1}^2]} \tag{4.46}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma_1+1}\left[(-\gamma_1+1) + \frac{2\gamma_1\rho_2^2(u_1-u_2)^2}{c_{s1}^2(\rho_1-\rho_2)^2}\right] \tag{4.47}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_4} = \frac{(\gamma_4+1)[(\gamma_4+1)u_2 + \sqrt{16c_{s4}^2 + (\gamma_4+1)^2u_2^2}]^2}{32c_{s4}^2 + (\gamma_4-1)[(\gamma_4+1)u_2 + \sqrt{16c_{s4}^2 + (\gamma_4+1)^2u_2^2}]^2} \tag{4.48}$$

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{1}{\gamma_4+1}[(-\gamma_4+1) + \frac{\gamma_4}{8c_{s4}^2}((\gamma_4+1)u_2 + \sqrt{16c_{s4}^2 + (\gamma_4+1)^2u_2^2})^2] \tag{4.49}$$

$$u_{s12} = \frac{\rho_2(u_1-u_2)}{\rho_2-\rho_1} \tag{4.50}$$

$$u_{sT} = \frac{1}{4}[(\gamma_4+1)u_2 + \sqrt{16c_{s4}^2 + (\gamma_4+1)^2u_2^2}] \tag{4.51}$$

以及

$$u_{sR} = \frac{\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1}{\rho_2 - \rho_1} \tag{4.52}$$

式(4.45)是关于 u_2 的隐式方程式,其中的其他量都是已知的。该式可以转化为关于 u_2 的高阶代数方程式,其阶数与所作假设有关。式(4.46)是在已知 u_2 的条件下计算 ρ_2 的式子。其余各式则用来在 ρ_2、u_2 和各已知量基础上计算其他未知量。这些结果的简单而且意义明确的归一化,可用量纲因子 u_1、ρ_1 和 $\rho_1 u_1^2$ 去除相应的速度、密度和压力量而得出,这些量决定了冲击波动力学过程。这些量看起来也许比较复杂,主要原因在于为了给定所考察的问题必须指定许多参数。下面讨论两个算例的结果。

第一个例子是冲击波入射稠密物质界面产生反射和透射冲击波。该介质的密度是入射冲击波所在的第一介质密度 ρ_1 的 $(\gamma_1+1)/(\gamma_4+1)$ 倍,入射波反射后分别在第一、二介质中产生反射和透射冲击波。入射冲击波后第一介质的状态参数为 ρ_1、u_1 和 p_1,而且 $p_1 = (\gamma_1-1)\rho_1 u_1^2/2$。图4.10表示归一化界面速度 u_2/u_1 如何随两个介质初始密度比值 ρ_4/ρ_1 而变化,可以看出,这个归一化界面速度十分接近于 $1/\sqrt{\rho_4/\rho_1}$。这是很有意义的,如果界面右边的第二介质密度达到 ρ_1 的数倍,则入射冲击波后的等离子体在界面处几乎停止不前,该处的压力接近恒常值 $\rho_1 u_1^2$。假定压力不变,定标关系是透射冲击波的速度与介质密度的平方根成反比。这些就是从图中看到的特点。

透射冲击波速度是 u_2 的 $(\gamma_4+1)/2$ 倍,也已在图中示出。由于在实验室参考系中透射

冲击波前面介质是静止的，波后的粒子速度等于 u_2，这个简单的关系十分显然。反射冲击波的探讨更有意义，它的速度与介质密度比的关系于图4.11，从中可以看出，反射冲击波的速度和方向与 γ 的关系极大。如果被冲击的第二介质的可压缩性很大，密度很低，则来流的冲量足以把两个介质之间的界面推进得快于反射冲击波受界面滞止的速度差，使得在实验室参考系中反射波的方向变得与入射波相同，也就是与透射冲击波合二为一（此时向第一介质中反射的是稀疏波）。

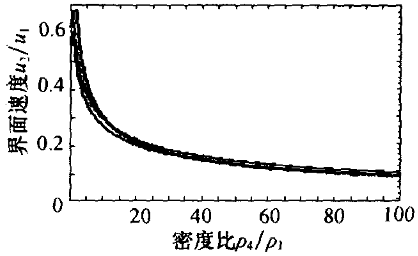


图4.10 冲击波入射于两个介质之间的界面时，归一化界面速度对于两个介质初始密度比值的依赖关系（两条实曲线下面的对应于 $\gamma = 4/3$，上面的对应于 $\gamma = 5/3$，灰曲线表示函数关系 $1/\sqrt{\rho_4/\rho_1}$）

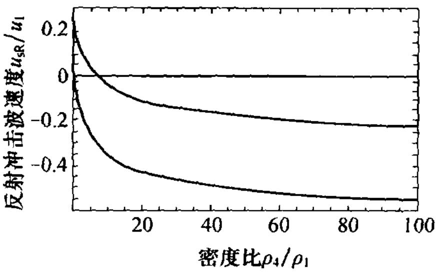


图4.11 介质初始密度比值增大时反射冲击波速度的下降（即反向速度的增大）（下面曲线对应于 $\gamma = 5/3$，上面曲线对应于 $\gamma = 4/3$）

反之，如果受冲击的第二介质几乎不可压缩或者密度很高，则在实验室参考系中反射冲击波从界面处返回传播，当 $\rho_4/\rho_1 \to \infty$，反射冲击波的极限速度为 $-u_1/3$（$\gamma = 4/3$）和 $-2u_1/3$（$\gamma = 5/3$）。这个极限速度很有用处，例如，可以估计实验中用来约束受冲击物质的器壁厚度是多少？冲击波反射技术可应用于测量物态方程的实验之中，这里经常需要测量入射冲击波在界面处发生反射、到反射冲击波透出第一介质前表面的时间，即冲击波的回射时间，它对于入射冲击波造成的第一介质压缩状况十分敏感。

上述情形还同超新星遗迹中的冲击波与周围分子云团的相互作用有关。图4.12表示这种冲击波与云团碰撞的图像，图中球状物体是超新星遗迹，还显示了冲击波与云团相互作用时产生的X射线和射频辐射。不考虑云团中集块的情形，对于星际介质和云团都可取 $\gamma = 5/3$。星际介质和云团典型的粒子数密度分别为 $2.5/\mathrm{cm}^3$ 和 $10^4/\mathrm{cm}^3$，因此超新星遗迹中前向冲击波后介质粒子数密度为 $10/\mathrm{cm}^3$，可以估计其速度约为1000km/s，也许还要大些。根据这些数据，得出透射冲击波在云团中的运动速度约为40km/s，而返回超新星遗迹中的反射冲击波速度约为330km/s。根据图4.12中给出的这两个天体的相对尺度，可看出早在透射冲击波穿过云团大部分区域之前，整个超新星遗迹都已受到反射冲击波的影响。

下面考虑另一范围的问题是平面飞片的撞击，理想的平面飞片是高速运动的处于冷状

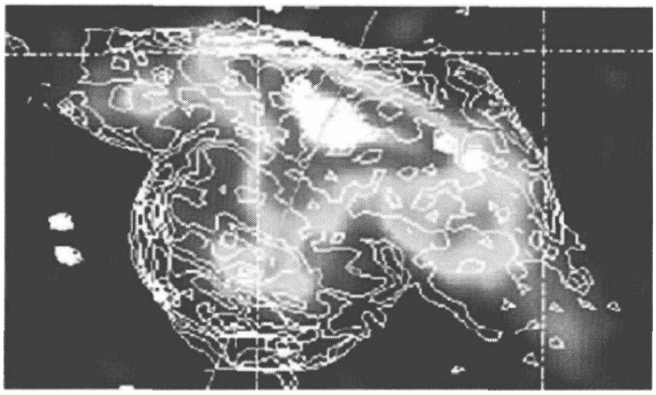


图 4.12　超新星遗迹(图中左下部的球状天体)与分子云团(图上方的扁长天体)的相互作用
(该图显示的是 X 射线辐射的灰度等级像,并且覆盖了射频辐射的等值线像。
此图引自宾夕法尼亚州立大学 D. Burrow 和 Dominion 无线电天文台 T. Landecker 的工作)

态的平面片状物质,当它干净地撞击平面靶物质的表面,就能在靶中产生非常均匀的、完善表征的(其参数完全确定的)冲击波。平面飞片撞击方法广泛地应用于物态方程实验,以获得冲击绝热线数据。平面飞片往往不直接撞击待研究的样品,而是撞击静止的铝制平面驱动板,其后表面紧贴待研究的材料样品,冲击波透过铝驱动板后在样品中传播。这种情形中 $\rho_4 = \rho_1$。前面已经指出,只要适当选定 p_1 值,本节导出的方程组同样适用于飞片与靶物质碰撞的情形。理想的强冲击波情形有 $p_1 \approx 0$,图 4.13 表示所得到的 u_2/u_1 对于飞片中归一化初始压力的依赖关系。当这个压力很小时,u_2 趋于 $0.5u_1$,这个有限制条件的结果可以从原始方程组中直接得出,推导过程留给读者作为习题。另外,只要 p_1 很低,入射平面飞片与任何密度的靶物质相互作用都产生反射和透射的冲击波(下面还将讨论 p_1 较大时界面处产生稀疏波的性态)。此时,把式(4.45)简化,得

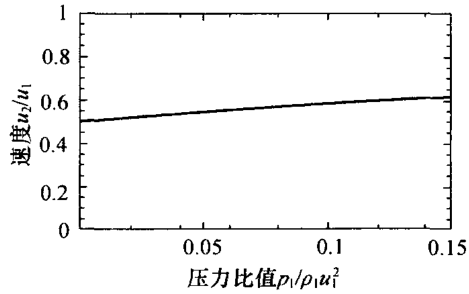


图 4.13　u_2/u_1 对于平面飞片中归一化初始压力 $p_1/\rho_1u_1^2$ 的依赖关系

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{\rho_4(\gamma_4 + 1)}{\rho_1(\gamma_1 + 1)}}} \tag{4.53}$$

习题 4.11

较简单情形中 $p_1 = p_4 = 0$,$\rho_1 = \rho_4$,$\gamma_1 = \gamma_4 = \gamma$,对于许多平面飞片撞击情形是较好的近似。试求解此时的方程式(4.44) ~ 式(4.52),得出受撞击靶物质中的压力和粒子速度。

4.2　稀疏波

稀疏是物质膨胀所引起的其密度和压力的下降过程。当膨胀从物体相应的边缘处向内部传播时，出现了稀疏波。例如，激光脉冲打在靶样品表面，引起对靶的压力作用或者形成等离子体，激光脉冲一旦停止，稠密的靶等离子体向外膨胀就产生了稀疏波。稀疏波中压力的下降以声速向物体内部传播，并伴随着物质向外流动和相应的密度下降。另一个例子是，当冲击波透出一个物体的表面进入另一个密度较低的区域或真空时，冲击波引起的高压使得物体中的物质朝冲击波传播方向加速，产生向物体内部传播的稀疏波。我们将看到，物质朝外流动引起稀疏向内传播的过程，开始于稀疏波以声速向原物质内传播之处。冲击波物理中称这种过程为受冲击物质的卸压或**卸载**，在高能量密度物理和天体物理中通常称为**冲击波透出**或冲出。

本节首先考虑一个理想化的问题——等温稀疏过程，许多情况下这是很有用的模型。从这个问题出发，可进一步讨论稀疏过程的自相似解，这是研究许多流体力学问题的重要工具。

4.2.1　平面一维等温稀疏过程和自相似分析

考虑等温状态下的等离子体从其一个平面表面向外膨胀的情形。此时需要持续地向等离子体提供热量以补偿膨胀的冷却作用，因此这种过程只可能发生在佩克莱特数很小（见第 2 章）或者具有不可思议的加热方式情形。常见的例子是，激光加热形成的低密度等离子体从物体受照表面向外膨胀。但是还有一些其他情形，等离子体的膨胀冷却不是很快，十分简单的等温模型很适合用于一次近似估算。图 4. 14 是膨胀过程初始状况的示意图。$t=0$时，该系统为处于界面左边的均匀密度 ρ_0 的温密物质，界面右边物质密度陡降为零，需要有热流进入或通过该系统以维持常温状态。

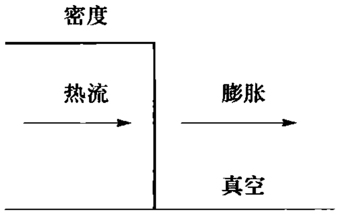


图 4. 14　等温稀疏过程初始状况的示意图

为了分析上述系统的膨胀过程，把连续性方程式(2. 1)和动量方程式(2. 2)改写为

$$\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\ln\rho\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{4.54}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T\nabla\ln\rho \tag{4.55}$$

式中偏导数是在温度 T 不变条件下取的，因为已假定膨胀为等温过程。对于多方介质，从 2. 1 节可知式(4. 55)右部的偏导数即是声速 c_s 的平方，但这里是等温声速而不是等熵声速。在等温稀疏过程中，热量向外流出。注意到式(4. 54)和式(4. 55)的左部算子具有共同的结构，把第一个式子除以 c_s，第二个式子除以 c_s^2，可使它们变得更加相同。这样，对于一维平面膨胀过程得出

$$\left(\frac{1}{c_s}\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+M\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}\right)=-\frac{\partial M}{\partial x} \tag{4.56}$$

$$\left(\frac{1}{c_s}\frac{\partial M}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \ln\rho}{\partial x} \tag{4.57}$$

式中 $M=u/c_s$。我们指出，根据所做的假定这里的 c_s 是等温声速，即 $c_s^2=(\partial p/\partial\rho)_T$，对于理想气体即有 $c_s^2=p/\rho$。式(4.56)和式(4.57)中左部算子都是对流导数结构，启示着某个与空间、时间耦合的组合变量可能是描述这个方程组性态的关键。我们将要讨论的这样的解即是相似解。许多方程组的相似解具有时间不变量的形状，可以用函数 $f(\xi)$ 描述，其中 ξ 为相似自变量，是空间和时间变量的某种组合。上面研究的情形中函数 M 和 $\ln\rho$ 原先的自变量是 x 和 t，当变换到另一个坐标系 ξ 和 t'，这里 $\xi=x/c_st, t'=t$，由微商的连锁法则得到关于时间偏导数的关系，即

$$\frac{\partial g(\xi,t')}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{4.58}$$

这里 $g(\xi,t')$ 是一般的函数形式，对于空间变量的偏导数也有类似表达式。根据假设显然有 $\partial t'/\partial x=0, \partial t'/\partial t=1$。巧妙之处在于寻求这样的解，它对时间的依赖关系都已包括在对 ξ 的依赖关系之中，因而有 $\partial g/\partial t'=0$。本章后面将看到，可以采用更为系统性的方法去寻求相似解，并确定这样的解是否存在。这里采用前面给定的 ξ 的定义，改写式(4.56)和式(4.57)，得

$$(M-\xi)\frac{\partial \ln\rho}{\partial\xi}=-\frac{\partial M}{\partial\xi} \tag{4.59}$$

$$(M-\xi)\frac{\partial M}{\partial\xi}=-\frac{\partial \ln\rho}{\partial\xi} \tag{4.60}$$

这个方程组具有颇为明显的解，即

$$M=1+\xi=1+\frac{x}{c_st} \tag{4.61}$$

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-(1+\xi)}=\rho_0\mathrm{e}^{-(1+x/(c_st))} \tag{4.62}$$

质量守恒条件确定此解适用的区域为 $x\geqslant -c_st$。

这个解具有一些值得注意的特色。首先，它具有线性的速度剖面和指数型的密度剖面。许多自由膨胀过程一般都具有线性的速度剖面，这是不足为奇的，因为任何不受外力的流体微元所走过的距离等于其速度乘上时间。指数型的密度剖面则反映了所考察情形的特殊性。

其次，流场量的剖面通常由问题的特征长度(或长度尺度) L 表征，特征长度 L 一般可定义为 $(\mathrm{d}\ln\rho/\mathrm{d}x)^{-1}$，其意义是通过这个长度的距离后，指数型剖面将降低 $1/e$，线性剖面将降低为零。L 的另一种可能的独立定义是这样一种距离，通过该距离后速度将变化 c_s 倍，也就是 $L=(\mathrm{d}M/\mathrm{d}x)^{-1}$。不论哪种定义都得出 $L=c_st$，因此特征长度的意义即是声波通过的距离，也就是处于初始状态最早开始向外飞散的介质微元离开原始界面的距离。

再次,膨胀过程中原始界面处的介质密度保持不变,其值为$\rho_0 e^{-1}$。一个孤立的物质团块开始膨胀时,其初始密度剖面均匀地为ρ_0。在其他的膨胀过程中,例如激光加热的靶物质内电子密度剖面可能趋于指数形式,低于最强烈的激光加热所对应的密度之下,但是更高密度区的剖面为不同的形状。这种情形中,我们将以指数型剖面可达到的最高密度替代式(4.62)中的$\rho_0 e^{-1}$。

习题4.12

试证在式(4.61)和式(4.62)中,质量守恒事实上必定要求$x \geqslant -c_s t$。

读者在专门的文献资料中还可以找到圆柱形和球形自相似膨胀的等温模型,但是这些情形得不出简单形式的解,而且可应用性也很有限,因为柱、球形膨胀时冷却作用比平面情形强得多,等温假设很难满足。此时,通常不去考虑等温过程而转向绝热膨胀过程,绝热情形中既无加热作用,也不存在热输运过程。

4.2.2　黎曼不变量

许多实验室工作和天体物理系统中,绝热膨胀或绝热稀疏是普通的现象,当冲击波从稠密物质层表面透出或一个星球发生爆炸时,由于能量的释放会发生膨胀现象。无论是实验中物质从通道里向外流出,还是物质从星球中流出形成行星星云,也都发生膨胀过程。当一个辐射源(如激光、Z箍缩装置或星球)突然衰减并且辐射强度下降时,受照射物体表面则发生朝外膨胀。因此,膨胀是广泛见到的现象。为了理解系统的这种行为,首先需要转向一些较深入的流体动力学知识,下面开始有关内容的介绍。

流体等熵流动中有两个称为黎曼不变量的组合物理量,分别在称为**特征线**的两条(时空)迹线上守恒。下面将会看到,如何利用黎曼不变量计算绝热稀疏过程。绝热过程可以涉及机械功,但是不存在热流,因此也是等熵的,可以由欧拉方程组完全描述(然而,还应参看本节结尾处关于膨胀前沿的讨论)。

运动流体的某些性质发生的一般扰动,可以通过两种方式对流体其余性质产生影响:一是产生声波,相对于流体流动以声速运动;二是使流体的性质(如组分)发生局部变化,然后以相关速度$\boldsymbol{u}$在流体中传播。一般扰动所产生的声波,自然沿着所有可能的方向传播,若要产生只在一个限定的方向范围内传播的声波,则需要具有十分特殊的条件,这样的声学扰动或流体扰动传播的时空迹线称为特征线。特征线上点的位置矢量$\boldsymbol{x}$随流体扰动而变化,其流线可由下式描述,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} \tag{4.63}$$

声学扰动的迹线则为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} + c_s \boldsymbol{k} \tag{4.64}$$

式中$\boldsymbol{k}$为传播方向的单位矢量;粒子速度$\boldsymbol{u}$、声速c_s和方向矢量$\boldsymbol{k}$通常都是x和t的函数。

式(4.63)定义的迹线称为C_0特征线。一维情形中依据$\boldsymbol{k}$的指向是$+x$轴或是$-x$轴方

向，式(4.64)定义的两条迹线分别称为 C_+ 或 C_- 特征线。下面将看到，在时间 t 为纵坐标、位置 x 为横坐标的平面上作图表示流体运动的变化，有助于对平面一维稀疏过程的直观理解。在这样的坐标平面上，一个等速运动表面的迹线是一条直线。

把流体运动的基本方程组变换为沿特征线传播运动的形式。首先回忆函数 $f(x,t)$ 沿具体迹线的方向导数的普遍公式，该迹线的定义式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{w}$，沿着该迹线的方向导数即为

$$(\mathrm{d}f/\mathrm{d}t)_w = (\partial f/\partial t)_x + \boldsymbol{w}\cdot\nabla f \tag{4.65}$$

寻求以特征线形式表达的运动方程时，最方便的方法是考虑压力而不是密度的变化。首先把密度通过压力来表达，即

$$\mathrm{d}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{c_s^2} \tag{4.66}$$

式中偏导数是在等熵条件下取的。利用式(4.66)把式(2.1)和式(2.2)变换为

$$\frac{1}{\rho c_s}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho c_s}\boldsymbol{u}\cdot\nabla p = -c_s\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} \tag{4.68}$$

为了寻找以沿特征线方向导数表达的运动方程组，把式(4.68)遍乘单位矢量 $\boldsymbol{k}$(它表示声波传播的方向)，再与式(4.67)相加，就得到组合成为类似式(4.65)形状的方程

$$\boldsymbol{k}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}+c_s\boldsymbol{k})\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right] + \frac{1}{\rho c_s}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\boldsymbol{u}+c_s\boldsymbol{k})\cdot\nabla p\right] = c_s[-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] \tag{4.69}$$

上式左部第一个方括号中的项是式(4.65)向矢量函数的推广，这里 $\nabla\boldsymbol{u}$ 是张量运算中关于并矢的符号，其元素 $(\nabla\boldsymbol{u})_{ij}$ 即是 $\partial u_j/\partial x_i$。由于 $\boldsymbol{k}$ 代表声波传播方向，可以看出式(4.69)左部两个括号中分别为 $\boldsymbol{u}$ 和 p 沿式(4.64)给定特征线的方向导数，把此式改写为

$$\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\boldsymbol{u}+c_s\boldsymbol{k}} + \frac{1}{\rho c_s}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)_{\boldsymbol{u}+c_s\boldsymbol{k}} = c_s[-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] \tag{4.70}$$

读者可能想在这里找到用途十分广阔的一般化的三维流动不变量，这样可以使得式(4.70)右部恒为零，但是只能在一些特殊情况下得到不变量，即一维平面、柱面和球面等熵流动以及二维平面定常等熵流动的情形。以下只考虑平面一维流动，此时式(4.70)右部方括号中两项相抵为零，得到

$$\text{沿 } C_+ \text{ 特征线}\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + c_s:\qquad \mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}p}{\rho c_s} = 0 \tag{4.71}$$

若把遍乘 $\boldsymbol{k}$ 以后的式(4.68)减去式(4.67)，相仿地可得

$$\text{沿 } C_- \text{ 特征线}\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - c_s:\qquad \mathrm{d}u - \frac{\mathrm{d}p}{\rho c_s} = 0 \tag{4.72}$$

把上面两个方程积分，分别得到黎曼不变量 J_+ 和 J_-，写为

$$J_+ = u + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho c_s},\qquad J_- = u - \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho c_s} \tag{4.73}$$

上式中的积分是不定积分，实际问题中应当在所考察的区间上计算。从任意的起点开始，对特征线关系式(4.71)或式(4.72)之一进行积分，一直积到两个不同的但都是任意的终点，然后把得到的两个积分结果相减，就可证明这样得出的 J_+ 值或者 J_- 值一定是不变的。特征线方程式和 J_+、J_- 为不变量的意义是，黎曼不变量在相应的特征线上保持常值，这个事实有助于研究流场的行为。应指出 ρ 或 c_s 都不可能从黎曼积分中移出，因为一般说来它们都是压力的函数。式(4.73)的重要应用在于多方气体情形，此时可以得出

$$J_+ = u + \frac{2c_s}{\gamma - 1}, \qquad J_- = u - \frac{2c_s}{\gamma - 1} \tag{4.74}$$

习题 4.13

从式(4.73)导出式(4.74)。

为了从黎曼不变量中获取有用的信息，必须了解它们的相关特性。首先，由于只考虑平面一维等熵流动，当流体的初始状态给定后，只需要得到 u 以及另一个流场量就可以完全确定流场的任何其他性态。这另一个流场量可以是密度、压力、声速或者这些变量的任何组合，例如 J_+ 和 J_- 中的积分函数 $\int \mathrm{d}p/(\rho c_s)$ 。由此可知，给定 J_+ 和 J_- 也就完全确定了流场的性态。这样，可以沿着各条 C_+ 和 C_- 特征线组成的网格，计算各格点上的 J_+、J_- 值，从而推算相关区域流场的性态，这就是计算一维等熵流动的特征线方法。

通常在以空间变量 x 为横轴、时间变量 t 为纵轴的坐标平面上画出特征线表示的波系图，如图4.15所示。考虑式(4.71)和式(4.72)计算的特征线图，如果 u 和 c_s 都为常数，则两族特征线 C_+ 和 C_- 都是直线。又如，已知沿 C_+ 特征线 J_+ 为常数，J_+ 和 J_- 都依赖于相仿的变量组合，C_+ 特征线斜率的变化必须以 u 或者 c_s 的变动为前提。由于 J_+ 守常，则意味着 C_+ 特征线斜率的变化必以 J_- 值变动为前提。这就得出了很有用的推论：如果在某个区域中有一个黎曼不变量守常，则另一个黎曼不变量所对应的特征线在该区域中一定都是直线。下面将看到，这两个性质可用来描述平面绝热稀疏过程。

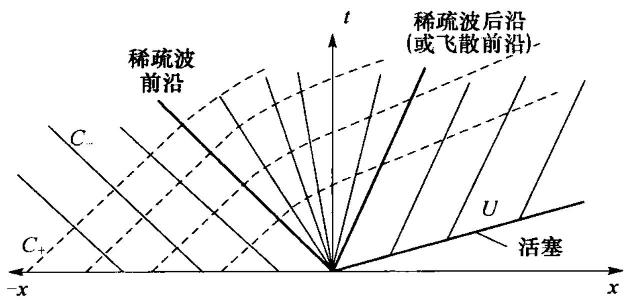


图4.15 平面一维绝热稀疏过程的特征线图

细实线为 C_- 特征线；虚线为 C_+ 特征线。

下面假设 C_+ 或者 C_- 特征线的起始点状态为 $u=0$，对于多方气体还有 $c_s=c_0$，试问该流体向外飞散可达到的最大速度是多少？显然当流体内能为零时，其速度将达到最大值。这是不足为奇的，因为当流体没有内能时其所有能量都转变为动能，这样达到的速度也就是流

体飞散的极限速度。对于多方气体，容易求出这个最大速度为 $2c_0/(\gamma-1)$，即逃逸速度。$\gamma=5/3$ 时此速度为 $3c_0$，这是一个很有用的估计值，例如当一个物质向另一个密度低得多的物质中膨胀时其极限速度的估计。

实验设计中也可见到这种现象的例子，常需要在密度较高物质中产生一个冲击波或爆炸波，当该波到达另一个密度低得多的物质层界面时则发生稀疏现象。后面还将讨论到，产生这种反向稀疏波的同时将驱动一个冲击波进入低密度的第二个物质层。人们在直观上也许会预期，第二个物质层密度降低，则被驱动进入的冲击波速度会增高，实际上往往并非如此。如果第二个物质层密度过低，朝其扩展的第一个物质层前沿的运动速度将接近上述最大可能的逃逸速度（它所驱动的冲击波速度也不可能大于这个速度）。这种情况下变动低密度物质的密度，对于被驱动进入其内部的冲击波的速度几乎不发生影响。

习题 4.14

在以速度 u 均匀流动的区域中画出 C_+ 和 C_- 特征线族。

另一方面，任何高能量密度的流体都是等离子体，前面的单流体描述不能准确反映自由膨胀等离子体前沿的状态。自由膨胀等离子体前沿的行为十分接近于等温稀疏过程，因为密度降低时电子就能穿越膨胀的等离子体输送热量，这种动力学行为即是快速的轻质量电子试图冲到离子前面，从而建立起一个加速离子的电场。这样，电子将逐渐地把能量转移至电场，然后再转给离子。电子从离子引起的加热中以及从密度足够低的新电子中取得更多的能量，致使热输运更为容易。离子受到彼此之间的压力和电场的作用而加速，并且损失部分内能用于电子的加热。根据第 2 章中讨论的双流体理论的预言，电场为 $eE=k_B T_e \mathrm{d}(\ln n_e)/\mathrm{d}x$，对于膨胀前沿加速度的限制是一种动理学的限制。

上述电场留住了热等离子体中差不多全部的电子，在某个密度处电子将被反射，返回到较稠密的区域中去（这种行为的可视化画面是，电子群企图“攀登”一个很长的势垒“山坡”，结果大部分电子未“爬”上去而“滚”了下来）。只有最具活力的电子才能到达膨胀等离子体的前沿，在该处由于与周围气体的相互作用使电子冷却，并有助于屏蔽等离子体的势场。这个问题尚未做到准确的分析，这也许需要对碰撞动理学理论进行一次引人入胜的探索。但作为大致的考虑，可认为在该前沿形成处有 $n_e \sim n_{gas}$，这里 n_{gas} 是周围气体的电子密度。取 n_{gas} 的典型值为 $10^{10}/\mathrm{cm}^3$，最大电子密度 $n_e \sim 10^{23}/\mathrm{cm}^3$，即可估算以 eV 为单位的等离子体中上述电场的电势约为 $30k_B T_e$，k_B 的单位为 J/eV（如 1.6×10^{-19} J/eV）。这个估计与测量结果相符。

4.2.3 平面一维绝热稀疏过程

现在转向平面一维绝热稀疏过程的分析。我们想象初始时左半平面充满了静止的均匀流体，其右边界为一个活塞，$t=0$ 时，该活塞突然以速度 U 向右做匀速运动。这里虽然可以考虑活塞速度从零逐渐加速到 U 的过程，但这个极短暂的阶段对于该概念性模型的长期行为基本没有影响。下面试图得出上述模型中流场参数的时空剖面。

图 4.15 表示以 x 为横坐标、t 为纵坐标的平面中上述稀疏过程的波系图，向右的粗直线

表示活塞从其初始位置($x=0$)以速度 U 作抽出运动。$t=0$ 时,坐标原点 $x=0$ 左边半空间中为静止的均匀流体。标注“活塞”的粗直线是该流体不可逾越的右部边界,但不一定是特征线。考虑左半平面范围的流场,$t=0$ 时是均匀静止的。在标注“稀疏波前沿”粗直线的左方,任何点处的 C_+ 和 C_- 特征线均起源于性质相同的初始状态,在该区域中都是直线。因此,该区域内黎曼不变量 J_+ 和 J_- 分别相同于它们在 $t=0$ 时的值,也就是说这里的流体状态尚未发生变化。

实际上,仅当起始于 $x \geqslant 0$ 区域(右半平面)的 C_- 特征线传递过来不一样的 J_- 值之后,流体的状态才会发生变化。这样的最早一条 C_- 线起始于原点($t=0, x=0$),图中标注为“稀疏波前沿”,即稀疏波的头部。一个区域起先受到冲击或者加热,当其前沿可以向外膨胀时,就经常看到这种稀疏波朝该区域内部传播的现象。这种波以初始介质中的声速向内传播,起始于左半平面的 C_+ 特征线最早与稀疏波前沿相交,并继续向右穿越已受扰的稀疏区域,进到流体可到达的任何地方。由于 $t=0$ 时在 $x \leqslant 0$ 轴线上任何 J_+ 值都相同,因此在整个流场(包括未受扰区域)中 J_+ 均为常值,这就意味着所有的 C_- 特征线都是直线。多方气体情形中则可得出,$J_+ = 2c_0/(\gamma-1)$,根据其定义在全流场有

$$J_+ = u + \frac{2c_s}{\gamma - 1} = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \tag{4.75}$$

从而得到

$$c_s = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}u \tag{4.76}$$

此式表明稀疏波区域中声速(从而温度)是怎样变化的:u 增大,则介质冷却,即预期的膨胀冷却作用。再考虑右行活塞界面处的流体状态,其粒子速度 u 必定相同于活塞速度 U 而为固定值,只要再确定一个不变量(J_+ 或 J_-)的值,就能确定该处流体的状态。由于各条右行 C_+ 特征线都从初始状态区到达活塞迹线,所以活塞界面处的 J_+ 值为已知。知道 J_+ 和 U 之后,可计算出从活塞迹线出发的各条 C_- 特征线对应的 J_- 值。对于多方气体,根据式(4.74)和式(4.76)即有

$$J_- = U - \frac{2c_s}{\gamma - 1} = 2U - \frac{2c_0}{\gamma - 1} \tag{4.77}$$

由于全流场中 J_+ 为常数,从活塞迹线出发的 C_- 特征线的开始段落为直线,其斜率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = U - \left(c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}U\right) = \frac{\gamma + 1}{2}U - c_0 \tag{4.78}$$

沿着这些特征线 J_+ 和 J_- 都是常数,所以在活塞后面一定区域内的流体状态也是均匀的,并随着活塞以速度 U 运动(活塞速度不超过逃逸速度,否则活塞后方将出现真空区),其声速为

$$c_s = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}U \tag{4.79}$$

这个均匀流动区的左部边界是图4.15中标注“稀疏波后沿(或飞散前沿)”的粗直线,是膨胀区域的头部或前沿。余下的问题是如何描述处于最左边未受扰初始状态区域和右边活塞

后方均匀流动区之间,即处于标注“稀疏波前沿”和“稀疏波后沿”两条直线之间的区域。该区域内的 C_- 特征线族是由从坐标原点发出的直线束组成的“扇面”,有时称为稀疏扇或中心稀疏波,其意义是指从一个公共的原点(“中心”)发出的同族的一组特征线。

式(4.76)给定了活塞界面后均匀流动区中 c_s 与 u 的函数关系,代入特征线方程式(4.72)中得到该区中 C_- 特征线的斜率为

$$\frac{dx}{dt} = u - c_s = \frac{\gamma + 1}{2}U - c_0 = \text{const.} \tag{4.80}$$

其次,稀疏扇中 $dx/dt = x/t$,特征线方程式(4.72)给出 u 的解为

$$u = \frac{2}{\gamma + 1}\left(c_0 + \frac{x}{t}\right) \tag{4.81}$$

对于多方气体,稀疏扇区域中流场量的完整描述如下:

由于

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{c_s}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}, \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{c_s}{c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{4.82}$$

引用式(4.76)即有

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{(\gamma - 1)u}{2c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{(\gamma - 1)u}{2c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{4.83}$$

写成时空变量的函数形式为

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{x}{c_0 t}\right]^{2/(\gamma-1)} \tag{4.84}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{x}{c_0 t}\right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{4.85}$$

上面诸式适用于稀疏扇区域,即图4.15中“稀疏波前沿”和“稀疏波后沿(或飞散前沿)”之间的区域:

$$-c_0 t \leqslant x \leqslant \frac{\gamma + 1}{2}Ut - c_0 t \leqslant \frac{2}{\gamma - 1}c_0 t \tag{4.86}$$

稀疏波的剖面图示于图4.16。可以看到,密度和压力在“稀疏波前沿”($x = -c_0 t$)处为它们的初始值,而在活塞界面处($u = U$)达到它们的定态飞散值(已对图4.16中的参数作了专门选择,达到定态正好发生在 $x = c_0 t$ 的线上,但这并不是普遍结果)。另外,坐标原点 $x = 0$ 处的密度、压力和速度都是常值,不随时间变化。式(4.86)是对 x 范围的限制,不等式的左边是“稀疏波前沿”,右边是“稀疏波后沿(或飞散前沿)”。当活塞速度 U 达到流体自由飞散的最大逃逸速度 $2c_0/(\gamma - 1)$ 时,上述右边沿即“飞散前沿”的斜率达到自己的上界,即与活塞迹线合二为一。如果活塞的抽出速度 U 继续增大,它将脱离膨胀中的流体,在活塞迹线和物质自由飞散前沿(即此时的稀疏波后沿)之间出现真空区。这种情形事实上等价于由式(4.77)和式(4.82)~式(4.86)所描述的自由绝热膨胀过程,其中式(4.86)还要补充的一个式子为

$$U = 2c_0/(\gamma - 1)$$

习题 4.15

画出稀疏波中最小密度、最低压力与活塞速度 U 的函数关系，并讨论这些曲线的意义。建议对流场量进行合理的归一化处理。

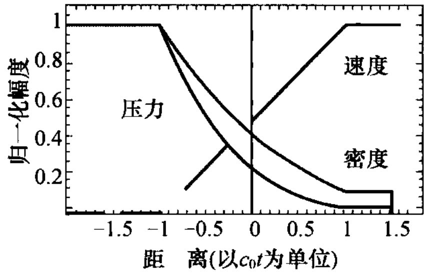


图 4.16　平面一维绝热稀疏过程中的流场量剖面

密度(灰线)、压力(实线)和粒子速度(虚线)，它们已分别用 ρ_0、p_0 和 U 作归一化处理，该图计算中取 $\gamma=5/3$，$c_0t=1$，$U=1.5c_0$。

如果流体初始界面的右边不是活塞，而是一个压力为零、密度较低的物质，其初始密度为 ρ_r，多方指数为 γ_r。在这种情况下，记进入低密度物质的强冲击波速度为 u_s，其波后粒子速度为 u_r，则该物质中波后压力为 $p_r=(\gamma_r-1)\rho_r u_r^2/2$，驱动流体与低密度物质之间的界面运动起着类似于活塞的作用，如前所述同时有一个反射稀疏波在驱动流体中传播。只要取 $U=u_r$，就可以与前面的讨论相符，p_r 相当于前述活塞界面上的压力。

当冲击波到达一个密度陡降的物质界面时，往往引起绝热稀疏过程。星球爆炸过程中，这种情况可能发生若干次，而且由于冲击波是爆炸波(详见下节)，使得情况更加复杂。实验中也常遇到稀疏过程。4.4.1 节中研究冲击波在密度陡降界面处的行为时，将应用本节得到的有关方程组。

4.3　爆炸波

一个均匀传播的台阶形冲击波可能以两种方式结束。上节讨论了一种方式：冲击波遇到一个低密度介质，在界面上产生的稀疏波在已受冲击的驱动介质中反向传播。本节讨论另一种方式：驱动冲击波的压力源如果终止，也会产生一个前向传播的稀疏波赶上冲击波，使之衰减，这种过程形成的波形结构如图 4.17 所示。图 4.17 中左起头两条波形表示由激光烧蚀压力驱动的接近定常状态的冲击波(见第 8 章)，这些波形的顶部并不完全平坦，因为无论数值模拟或真实系统中激光烧蚀产生的压力总是随时间变化的。图右面的三条波形都产生在激光脉冲终止之后，表示该体系左边发展起来的稀疏波逐步赶上冲击波，使之成为爆炸波的过程。“爆炸波”这个名词的语义在这里是合适的，天体物理文献中常见到的当稀疏波赶上冲击波时形成的一种波系结构，可定义为爆炸波，也就是这里使用的定义。在冲击波物理的文献中，“爆

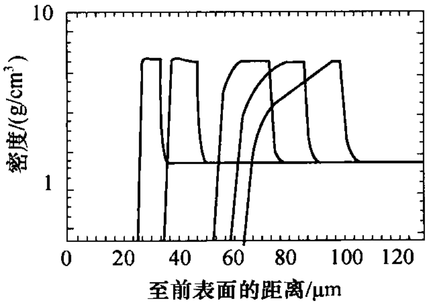


图 4.17　冲击演变为爆炸波过程的数值模拟结果

激光辐照从左边(前表面)驱动的一个宽度 1ns 的接近定常的冲击波，随后前表面发生的稀疏波赶上冲击波，形成爆炸波。诸曲线从左至右依次表示激光脉冲开始后 0.6ns、0.8ns、1.2ns、1.4ns 和 1.6ns 时的密度剖面。

炸波”的术语通常更严格地限制于由点爆炸形成的球面膨胀冲击波的结构，其他情形则被描述为“脉冲载荷产生的波”，或许可以称为“平面爆炸波”。

由于能量释放在时间上都是有限的，所以爆炸波是非常普通的现象，如小尺度范围的太阳耀斑释放能量过程所引起的爆炸波形成了太阳风。在一些体系中氢积聚于中子星的表面，导致偶尔发生的称为“天体物理闪光”的核爆炸，这样的闪光将驱动周围物质中的爆炸波。

天体爆炸首先驱动冲击波而不是爆炸波，但是天体内部的压力逐渐大大降低，积聚的星际物质超过了该天体的质量，超新星遗迹演变出了一种爆炸波结构，在其演化的大部分进程中均维持着这种结构。还可以想到许多其他情形，诸如喷流与云团的相互作用，云团中开始时产生冲击波，逐渐演变为爆炸波。地球环境中见到的大多数普通的爆炸波是由雷击产生的，雷击时能量首先于短暂时间内沉积于雷闪通道之中，然后引起以后的一系列现象。

高能密度物理实验中平面爆炸波的概念很有用处，可以用来驱动界面处的瑞利－泰勒不稳定性（见第 5 章），还可用来作为时间尺度的转换器。例如，有一台激光器能够很有效地提供约 1ns 时间的动力（Z 箍缩等离子体大约可以提供 10ns 时间的辐射），但是需要经过较长的时间才能把能量传送到某个物体中。由于爆炸波在介质中形成并传播，构成了一种临时的储能手段，能够以较低速度驱动更多的质量、渡越较大尺度的时间和距离。如果此后这些能量被释放出来，例如爆炸波遇上了另一个密度较低的介质，就能够进一步驱动时间尺度比初始能源长得多的流体动力学过程。

4.3.1 爆炸波中的能量守恒

由于爆炸波中大部分物质位于冲击波阵面附近，从能量守恒和动量守恒关系中能得到什么推论呢？考虑这个问题十分有用而且富于启发性。再次考察图 4.17，但考虑的是球面情形。球面爆炸波通常称为谢多夫－泰勒爆炸波（Sedov－Taylor Blast Wave），因为谢多夫、泰勒以及冯·诺伊曼等首先研究了这种爆炸波的性态。这种波的前沿是一个初始的冲击波转变区，后面跟着稀疏区，冲击波差不多一直处于强冲击波状态，因此冲击波把来流的一半能量（实验室坐标系中考察）转变为波后流动的动能，另一半则转化为流动的热能。但是，这里所研究问题中的能源是初始冲击波后的能量。爆炸波中总的物质量是被冲击波掠过区域中物质的累计质量。如果外部介质的原始密度 ρ 为常数，冲击波阵面的即时半径为 R，则该球形爆炸波后物质的总质量 $M = 4\pi\rho R^3/3$。若辐射或热传导引起的能量损失非常小，则爆炸波中的总能量近似为

$$E = M\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^2 \dot{R}^2 \tag{4.87}$$

式中 $\dot{R} = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$。

这里我们已假定物质是多方气体，在爆炸波后获得了以冲击波速度 $\dot{R}$ 表示的（平均）粒子速度。下面的重要结果与这个假定无关，尽管在稀疏过程中热能转变为动能，式（4.87）仍然成立，但这里的确假定所有物质被具有即时速度的冲击波所加速。换言之，假定冲击波速度的变化比较缓慢，根据能量守恒关系（$\dot{M}R^2/2$）= const.，可以得到爆炸波阵面推进时应

满足的关系式为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\dot{R}^2 = -2M\dot{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.88}$$

式中 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = 4\pi\rho R^2\dot{R}$。因此有

$$3(\dot{R})^2 = -2R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.89}$$

假如企图寻求的解具有指数形式 $R = R_0t^\alpha$（其中 R_0 和 α 为常数），从上式即可得出 $\alpha = 2/5$，说明谢多夫 - 泰勒爆炸波半径的增长与 $t^{2/5}$ 成正比。

习题 4.16

试用上述分析方法证明，柱面和平面爆炸波解的时间因子分别具有指数 $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 2/3$。

如果一个能量守恒的爆炸波能够传播得相当远，如雷击形成的爆炸波，则其冲击波逐渐变为弱冲击波，最后成为以当地声速传播的一种扰动。这种情形在泽尔道维奇和莱伊捷尔的书中有详细讨论。令初始时单位体积介质中的爆炸能量 E_x 相等于其中的热能，相当于此时的粒子动能已趋于零，就可估算出发生上述转变时爆炸波的半径。例如球面爆炸波，这种转变发生在 $R \approx (3E_x/8p_0)^{1/3}$ 处，这里 p_0 是介质的初始压力。对于通常的超新星，爆炸时天体物质中沉积的能量约为 10^{51}erg，星际介质的初始压力一般为 1.6×10^{-12}dyne（粒子数密度和温度分别为 $1\mathrm{cm}^{-3}$、1eV），可算出上述转变半径为 6×10^{20}cm，约为 600 光年。对于柱面爆炸波，E_x 是单位长度介质中的爆炸能量，可以计算出转变半径 $r \approx \sqrt{E_x/(9p_0)}$。又如雷击情形，$E_x \approx 10^5\mathrm{J/m} = 10^{10}\mathrm{erg/cm}$，计算得到 $r \approx 33$cm。由此可见，处于雷闪通道安全距离之外的人们不可能亲身经历雷闪产生的冲击波。

为了考察爆炸波中的动量守恒关系，可以尝试与上面同样的方法，并令 $M\dot{R}$ 的导数为零，但这并不总是有效的。当稀疏区中热能向动能的转变不影响总的能量平衡时，稀疏区中产生的动量也不影响总的动量平衡。当被冲击波掠入的新物质增加了向外的动量时，由于稀疏作用同时也产生了向内的动量增量。由此可知，动量守恒更难以计算，而且这种计算不会对能量守恒型爆炸波的全局性演化得出更多的看法。

但是动量守恒有时颇为重要，因为辐射能的损失并不总是可以忽略的，有些场合中爆炸波进入了强辐射的阶段，爆炸波中的能量不再守恒。所有超新星遗迹最后都会进入这个阶段，此时超新星遗迹的运动变得相当缓慢，以致波后物质因辐射而快速冷却（见第 7 章）。冲击波产生的热能被辐射出去，系统内剩余的能量不断减少，同时几乎没有热能可用来驱动稀疏波，因而已受到冲击的物质趋向于成为随着冲击波一起运动的稠密壳层，其中的压力必然等于来流物质的头部压力。在等离子体因辐射损失能量而变得越来越稠密和寒冷的同时，其速度趋近于未受冲击物质参考系中的冲击波速度（在冲击波标架中，已受冲击然后冷却的很稠密的物质只能以很慢的速度运动，离开冲击波阵面）。这样的系统通常可以用动量守恒的雪耙模型来描述。

一个动量守恒的雪耙系统的时间演化规律，可以从动量 $M\dot{R}$ 的时间导数为零的方程式中得到，其解法相同于能量守恒问题中采用的方法。球面爆炸波情形，动量守恒的雪耙模型给出 $\alpha=1/4$，也就是说这种模型中雪耙半径的膨胀规律为 $R\propto t^{1/4}$。

习题 4.17

试求柱面和平面情形动量守恒雪耙模型解的指数 α。

4.3.2 自相似运动的一般讨论

本章前面几节中已经认识了两类稀疏过程，它们都是自相似的。等温稀疏情形中，找出了一个相似自变量，然后对方程组进行了显而易见的简单变换，得到了解析解。绝热稀疏情形中，利用黎曼不变量求解流场的性态，再考虑这些解就可看出，它们是相似自变量 x/c_0t 的自相似解。一般说来，自相似解的空间波形形状不随时间变化，而由一个与时间无关的空间形状函数乘上一个时间函数因子 $R(t)$ 所组成，R 具有空间尺度量纲。通常采用的相似自变量 $\xi=r/R$，用 ξ 的函数形式可以画出各流场量的空间波形。

考虑一维平面、柱面和球面对称系统中发生自相似运动的可能性，这类运动可以由基本方程组式(2.1)、式(2.2)和式(2.14)描述，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nu}{r}\right)=0 \tag{4.90}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{4.91}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial r}-c_s^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)=0 \tag{4.92}$$

式中几何指数 N 为 0、1、2，分别对应于平面、柱面和球面对称情形。至今所考察的把声速与密度和压力关联起来的物态方程，是两个热力学自变量和一些数值参数（如多方指数 γ）的函数，此时上述方程组可以化约为只有一个相似组合自变量的形式，从而可以变为常微分方程组处理。采用多方气体的物态方程，实际上式(4.92)已包含了这个假设。在边界条件和初始条件中还会出现带有物理量纲的参数（如密度为 $1\mathrm{g/cm^3}$），这些定解条件是在具体情况下求解运动方程组所必需的。对一些变量进行无量纲处理，使得同一个方程组变换为使用无量纲变量的形式，称为相似变换。相似变换问题的一般性讨论见第 10 章，更详细的讨论可参见泽尔道维奇和莱伊捷尔的书。这里我们所关心的是找到自相似解，即存在单一的无量纲自变量 ξ，其函数可以描述流体动力学基本方程组在流场时、空范围中解的形状。

寻找基本方程组自相似解的关键，在于把它们变换为以 ξ 为自变量的无量纲未知函数的常微分方程组，这些函数表示各流场物理量时空分布的形状。以密度 ρ、粒子速度 u 和压力 p 为未知函数，也可以换个方法以声速 c_s 代替压力。为了把式(4.90)～式(4.92)化为自相似形式，必须把 ρ、u、p 每个函数都表示为 ξ 的相应的无量纲函数、具有长度量纲的函数 R 以及其他一些重要的无量纲常值参数的乘积，而且对以密度或压力形式给定的初始（边界）条件也要进行相应变换。最普通的情形中，可认为以密度表达的初始条件 $\rho_0(r,t)$ 为已知。

至此，可以假定自相似解有如下形式：

$$u = \dot{R}U(\xi), \quad \rho = \rho_0(r,t)\Omega(\xi), \quad p = \rho_0(r,t)\dot{R}^2 P(\xi) \tag{4.93}$$

式中 R 上部的点号表示时间导数，初始密度 ρ_0 一般是 r 的函数，还可以是初始时间的函数。

注意到下面计算偏导数的关系式（这里 h 为 ξ 的任意函数）：

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial t} = -\xi\frac{\dot{R}}{R}h'(\xi), \quad \frac{\partial h(\xi)}{\partial r} = \frac{1}{R}h'(\xi) \tag{4.94}$$

式中撇号“′”表示对 ξ 的导数。

经过一些运算，可以得到如下方程组：

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0}\frac{R}{\dot{R}}\Omega(\xi) + \frac{\rho_0' R}{\rho_0}U(\xi)\Omega(\xi) + [U(\xi) - \xi]\Omega'(\xi) + \Omega(\xi)U'(\xi) + \frac{NU(\xi)\Omega(\xi)}{\xi} = 0 \tag{4.95}$$

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0}RP(\xi) + \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}U(\xi)\Omega(\xi) + [U(\xi) - \xi]U'(\xi)\Omega(\xi) + P'(\xi) = 0 \tag{4.96}$$

$$\frac{\rho_0' R}{\rho_0}(1-\gamma)P(\xi)\left(\frac{1}{\dot{R}} + U(\xi)\right) + 2\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}P(\xi) + [U(\xi) - \xi]\left(P'(\xi) - \gamma P(\xi)\frac{\Omega'(\xi)}{\Omega(\xi)}\right) = 0 \tag{4.97}$$

式中 ρ'_0 为 ρ_0 对 r 的偏导数。

习题 4.18

推导式(4.95)~式(4.97)。

注意到把自变量从(r,t)变为(ξ,t')时（见 4.2.1 节），上述方程组变换中函数 u、ρ 和 p 已不再具有对时间的显式依赖关系，这就对问题的定解条件（如边界条件和初始条件）加上了相应的限制，即变换后这些条件中只能出现与 ξ 和其他无量纲常数（译注：否则自相似分析不能适用）。

方程组由式(4.95)~式(4.97)三个常微分方程式组成，但有些项还存在显式的时、空依赖关系，如果方程组的解是自相似的，这些项势必应成为常数。首先考察式(4.96)，它只能与时间和 ξ 有关，如果 R 是时间的幂函数或指数函数（其变元可以是时间的线性函数），则与时间有关的项($\ddot{R}R/\dot{R}^2$)就可化约为常数。这里只考虑幂函数的情形，可设

$$R = R_0 t^{\alpha} \tag{4.98}$$

式中 R_0 为 $t=1$ 时 R 的位置（半径）。

有些具体应用中存在指定的起始时间 t_0，此时可以 t/t_0 代替 t，同样得到上述形式的初始条件。采用式(4.98)的假设后，方程式(4.95)~式(4.97)中除了密度项(ρ'_0/ρ_0)外，其余的时间有关项都已化解。如果密度 ρ_0 与（初始）时间有关，则可看出仅当 ρ_0 和 R 两者是同样类型的时间函数，方程组才可能存在自相似解（即解的形状（各未知函数）不随时间变化）。例如 ρ_0 和 R 都是时间的幂函数，即使两者的幂指数不同，有关的项也只会在方程中形

成相应的常数因子。

为了把空间依赖关系从式(4.95)中消去，项(ρ'_0R/ρ_0)只能包含相似自变量ξ和无量纲的常数，如果ρ_0是r的幂函数就可满足这个要求，设

$$\rho_0(r) = \hat{\rho}r^\delta = \hat{\rho}\xi^\delta R^\delta \tag{4.99}$$

则有

$$\frac{\rho'_0(r)R}{\rho_0} = \frac{\rho'_0(\xi)}{\rho_0 R}R = \frac{\delta}{\xi} \tag{4.100}$$

因此，ρ_0如果是r和t的任何幂次函数，则与自相似运动的要求是相容的，这里的长度尺度R也必须是t的幂函数。但是R的时间关系又应相同于ρ_0的时间函数类型，如果总的说来有$\rho_0 \propto t^\beta$，则必须要求$\hat{\rho} \propto t^{(\beta-\alpha\delta)}$。有时在两个邻接的时空区域中都存在自相似解，$\rho_0$在这两个区域中可能有不同的时空依赖关系，则还需要给定连接这两个区域的边界条件。这种情形的一个例子是Chevalier(1982)对年轻的超新星遗迹结构的处理。

下面研究如何识别一个流体动力学系统是否存在自相似演化运动的条件。自相似演化运动的观念在数学上十分优美，但面向实际需求的读者也许会怀疑我们到底在关心什么？这样的解是否真正有用？怎样知道什么情况下这种解能够发挥作用？我们关心自相似解，是因为许多问题到头来都满足或者近似满足自相似演化的条件，这意味着自相似运动模型在近似描述一个系统如何演化方面常常是十分有用的。例如，良好的实验设计经常建立在简单物理推理的基础之上，自相似运动模型就是实验设计者的重要工具，并且这种模型还提供了一个很有用的概念框架，可用来讨论（或估算）一个系统将如何演化。根据上述可知，了解什么情况下这种模型能够发挥作用是很有意义的，这就是下面讨论的内容。

为了使方程式(4.95)~式(4.97)变为自相似形式，前面已经指出必须给定初始密度（或压力）的分布，它们的时、空依赖关系必须限制于一定的函数形式，这相当于指定了具有物理量纲的单一参数。如果需要的条件都已指定，则该方程组就成为自相似运动问题。例如冲击波在流体中的传播，该流体的初始密度随空间距离按幂次律减小，具有指定的初始分布形状。星球中出现冲击波时就是如此。这种特殊情况已在泽尔道维奇和莱伊捷尔书里对自相似运动问题的讨论中解决了，此时还需要进行自相似方程组的数值求解，以确定指数α的值。奇怪的是，那本书中充分讨论的“脉冲载荷”问题（即平面爆炸波问题），属于第二类自相似运动。虽然看起来这类问题也具有两个参数，在习题4.16中已经证明平面爆炸波中$\alpha=2/3$，但只是上限值。那里的假设是，所有的波后介质质量都在冲击波阵面附近（雪耙模型）。实际上质量分布一直延伸到空间坐标负无穷处（该指数的下限值为$\alpha=1/2$；当$\gamma=5/3$时，$\alpha=0.611$）。这种开放边界带来了特殊的问题，在该区域外面加速度将足够大，以至于自相似解中的能量积分不能收敛。对于这类问题的解答是，在不为自相似运动所波及的充分远的区域中总存在少量的初始质量，这些质量只含有有限的能量。

如果系统的另一个指定参数是具有物理量纲的常数（如爆炸的总能量），则可得到谢多夫所研究的自相似运动类型，这里ξ的定义必定涉及系统的已知性质，因为这些性质确定了真实物理系统中r和t之间的关系。例如，爆炸能量越大导致运动越快，相应的$\dot{R}$值越高，

因此如果问题中爆炸能量已经给定,则必定出现于 R 以及 ξ 的定义式之中。把已知的各个物理量和 r、t 进行各种可能的无量纲组合,就可在相差一个常数因子的意义下得到 R 的定义式。对于特征位置(如波阵面等)$r=\xi R$,ξ 必须是常数,从而可以解出这个位置坐标 R 对 t(也就是确定 α)以及给定物理量的依赖关系。根据自相似方程组解的存在并且唯一条件,能够定出有关常数或未知的系数。下节将以球面爆炸波为例,说明这类自相似运动的求解方法。

如果系统的确定还需要第三个带有物理量纲的参数,如爆炸波问题中某个界面的初始位置等,则该系统的演化不可能是自相似运动。方程式(4.95)~式(4.97)的解只允许添加一个待确定的参数,无论出现于边界条件、初始条件或者系统某个整体性质之中。一旦加上这种限制条件之后,就不能再有更多的待定参数。因为再加上一个限制条件,自相似问题即变成超定问题而无解。此时该系统也许仍然以固定的时、空波形演变,但这里的 r 和 t 将具有不同的参考尺度,第 10 章中将给出这样的例子。

从上述讨论可知,判断一个给定的系统是否具有自相似解是十分容易的。如果系统只存在一个或两个有量纲的确定物理参数,即使它们在空间或时间上的变化服从简单的幂次律(也许还可以是指数律),都可以存在自相似解。如果系统的确定需要多于两个的量纲相异的物理参数,则不存在自相似解。

4.3.3　谢多夫－泰勒球面爆炸波

给定球面爆炸波的数学问题,并寻求球面爆炸波流场量的剖面。这个问题通常称为“点爆炸问题”,需要给定在初始点上(柱面和平面爆炸波情形则分别是初始轴线或平面处)爆发的能量,才能得到自相似解。在此假定下得出的解只适用于爆炸波阵面远离爆心(原点)的场合,此时上述假定比较准确。谢多夫给出了这个问题的解析解,泰勒首先报告了这个问题的数值解,冯·诺伊曼则较早提出了一个特解。下面将指出如何得到以恰当的相似自变量表述的自相似常微分方程组,使用计算机数学编码可对该方程组进行快速数值积分。

点爆炸问题具有两个有量纲的确定物理参数,即 $t=0$ 时的爆炸总能量 E_x 和周围介质的初始密度 ρ_0(都假定为常值)。原始的自变量为空间坐标 r 和时间 t。按照上节叙述的步骤,E_x 与 ρ_0 的比值具有长度 5 次方除以时间平方的量纲,因此从这些参数和 r、t 可以组合得到所需要的自相似运动的无量纲参数, 即有

$$\frac{E_x t^2}{\rho_0 r^5} = \text{const.} \tag{4.101}$$

上式的意义是任何特征界面(点)运动迹线的表征,在这些迹线上该无量纲参数等于相应的常数。对于点爆炸问题,此特征界面通常取为冲击波的阵面 $R(t)$,由此得出其迹线为

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{E_x}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{4.102}$$

式中 Q 为待定常数。

采用 $\xi = r/R$ 为相似自变量,可以看出 $\alpha = 2/5$。与 4.3.1 节中的能量论证方法比较,十分容易准确地得出波阵面半径与时间之间的标度关系。这是令人惊讶的,因为这里所需要的只是简单的几步推演而已。还可指出,冲击波速度为 $2R/5t$。可以采用上节所述的一般

变换关系,但为方便起见下面采用专门针对点爆炸问题的变换方法,构成对运动方程组进行变换的基础。首先把流场量表示为

$$u = \frac{2R}{5t}U(\xi), \qquad \rho = \rho_0\Omega(\xi), \qquad p = \left(\frac{2R}{5t}\right)^2\rho_0P(\xi) \tag{4.103}$$

式中 U、Ω 和 P 都为 ξ 的无量纲函数,表示相应流场量的剖面形状。

对于任意函数 $h(\xi)$,各偏导数之间的关系为

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial t} = h'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\left(\frac{2\xi}{5t}\right)h'(\xi) \tag{4.104}$$

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial r} = h'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial r} = \left(\frac{\xi}{r}\right)h'(\xi) \tag{4.105}$$

式中撇号“′”表示函数对自变量的导数。假定介质是多方气体,利用式(4.103)~式(4.105),经过一些演算可把运动方程组变为

$$[U(\xi)-\xi]\xi\Omega'(\xi) + [\xi U'(\xi) + NU(\xi)]\Omega(\xi) = 0 \tag{4.106}$$

$$-\frac{3}{2}\Omega(\xi)U(\xi) + [U(\xi)-\xi]\Omega(\xi)U'(\xi) + P'(\xi) = 0 \tag{4.107}$$

$$-3\Omega(\xi)P(\xi) + [U(\xi)-\xi][\Omega(\xi)P'(\xi) - \gamma P(\xi)\Omega'(\xi)] = 0 \tag{4.108}$$

对于球面情形,式中取 $N=2$。式(4.106)~式(4.108)即是所得出的自相似常微分方程组,γ 是明显出现于方程组中的无量纲常数,因此这个方程组的解与物态方程有关。数值系数作为问题的参数出现于无量纲的标度关系之中,因而这些关系是该问题所特有的。

习题 4.19

推导式(4.106)~式(4.108)。

积分上述方程组所需的边界(“初始”)条件如下:

在强冲击波阵面处为

$$U(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \qquad \Omega(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad P(1) = \frac{2}{\gamma+1} \tag{4.109}$$

数值积分式(4.106)~式(4.108),就可计算由上述三个无量纲函数表示的流场剖面,结果示于图4.18(球面情形,$N=2$,$\gamma=5/3$)。这个 γ 值对于绝大部分天体物理系统和部分实验室模拟实验都是合理的,对于空中爆炸取 $\gamma=1.4$ 更好些,很多实验室实验中 γ 值可能低至 4/3 甚至更低,这些情况已在第3章中讨论。从图4.18还可看出,差不多所有的波后质量都集中在波阵面附近(如果考虑到单位半径上的质量正比于 $r^2\Omega$,则这种集中程度要比图中看到的还要显著)。

上面的方程组足以给出各流场量的剖面,但无法确定参数 Q,此量值可用来定出给定时刻 t 时冲击波半径 R 的绝对大小。此时必须利用该问题的第二个具有物理量纲的确定参数——爆炸能量 E_x。利用得到的自相似运动各流场量的剖面函数,计算冲击波阵面后区域中的总能量,它必须相等于爆炸能量 E_x,此条件用如下积分式表示,即

$$E_x = \int_0^R \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2} \right) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \tag{4.110}$$

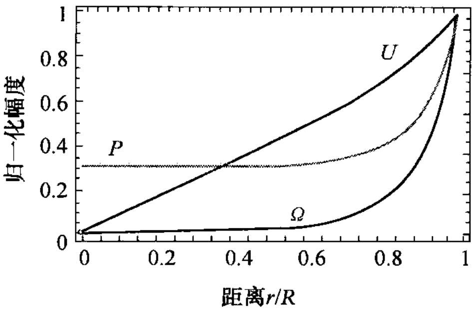


图 4.18　谢多夫－泰勒球面爆炸波的无量纲剖面，即 U（虚线）、Ω（实线）和 P（灰线）与半径 r/R 的函数关系（各流场量的幅度已用冲击波阵面半径 $r=R$ 处的相应值进行归一化处理）

从式(4.110)即可得出

$$Q^5 = \frac{16\pi}{25} \int_0^1 \left(\frac{P(\xi)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\Omega(\xi) U^2(\xi) \right) \xi^2 \mathrm{d}\xi \tag{4.111}$$

使用图4.18所示剖面函数计算上式的积分，取 $\gamma = 5/3$，得到 $Q = 0.868$，这样就能从式(4.102)中得到真实尺度的半径 $R(t)$ 关系。对于向周围密度为 $10^{-23}\mathrm{g/cm^3}$ 的介质释放 10^{51} erg 而形成的超新星遗迹，得出其爆炸波半径 $R = 1.2t^{2/5}$，其中 R 和 t 的单位分别为光年和年。事实上，只有经过千百年的传播，冲击波才能扫过足够多的星际介质质量，才能达到点爆炸模型适宜应用的场景。另一个例子是，实验室实验在密度为 $10\mathrm{mg/cm^3}$ 的气体介质中释放 100J 能量引发爆炸波，可以得出 $R = 11.1t^{2/5}$，这里 R 和 t 的单位分别为 mm 和 μs。

习题 4.20

使用计算机数学编码，数值积分柱面情形的自相似运动常微分方程组式(4.106)～式(4.108)($N=1$)，画出波后各流场量的剖面图，并计算 Q 值。应用这些结果给出沉积能量为 10^{10}erg/cm 的雷电通道发生爆炸的动力学行为。

4.4　流体动力学界面现象

除了对反射冲击波的讨论外，上面所有的讨论只涉及无界介质中孤立的流体动力学现象的性态。这是必要的起点，但是大多数待研究的物理系统的特色，在于流体动力学现象与介质结构的相互作用或波与波之间的相互作用。为了更好地设计实验，也必须了解这些相互作用的效果。

4.4.1　冲击波在界面处的行为及其影响

4.1.5 节中讨论了当冲击波传播到一个密度陡增界面处产生反射和透射冲击波的问题，还讨论了可以用同样的数学公式描述的平面飞片撞击现象，即一个运动的冷物质薄板撞

击另一个靶物质板的问题。一般而言,设入射冲击波所在的或者界面原边的介质中波后粒子速度为 u_1、压力为 p_1,压力 p_1 的范围则从 $0 \sim (\gamma-1)\rho_1 u_1^2/2$,后者对应于强入射冲击波产生的冲击压力的极限,若 $\gamma=5/3$,此极限压力为 $\rho_1 u_1^2/3$。考察更加普遍的情形,即冲击波或者运动的物质薄板(飞片)撞击一个界面,界面另一边是密度任意的物质,采用 4.1.5 中的记号该密度可记为 ρ_4。

这种更为普遍的情形,对于实验室实验和天体物理系统很有意义。实验室中利用辐射源除了对靶物质进行冲击实验外,还可用来使其加速(见第 9 章有关讨论)。如果实验目的是获得更多的能量用于系统后期的演化运动,上述得到被冲击并且被加速的薄片的方法将十分有用。这样的物体可以描述为"等离子体平面飞片"。天体物理学中持久的辐射源,同样能够冲击和加速它们所辐照的物体,例如在含有鹰状星云的产星区域中就是如此,明亮的年轻恒星已经发出冲击并正在加速其附近的分子云。当被加速的物体撞上另一个静止的物体(可以是密度较高的块状物质,或是密度较低的云团),此后本节下面讨论的全尺度的各种相互作用将接着而来。

如果 ρ_4 相当低,则冲击波到达界面后可能发生绝热稀疏过程,图 4.19 说明了在实验室参考系中观察到的这种情形。应用 4.2.3 节中的理论进行分析,有所新意在于采取冲击波下游介质为静止的参考系,在这种下游标架中进行数学处理最为方便。考察冲击波正好到达密度陡降界面时系统的情况。下游标架中受冲击物质的膨胀仍然遵循同样的方程组式(4.81)~式(4.86),只有正确设定上游介质的性质之后,才看得出本节问题新的特点是什么。

冲击波到达界面时,下游标架中新的上游物质(密度为 ρ_4)以速度 u_1 朝着已受冲击的物质运动,稀疏波推动已受冲击物质以速度 U 向前运动,在实验室标架中其速度则为 $(U+u_1)$。因此,$(U+u_1)$ 也是实验室标架内上游物质的冲击波后的粒子速度,这就意味着在此参考系中透射冲击波的速度为 $(\gamma_4+1)(U+u_1)/2$。在拉格朗日表述(质量坐标)的意义下,中心稀疏波的头部反向朝物质内部运动。然而在实验室参考系中,稀疏波的头部以速度 u_{rw} 朝前运动,即有

$$u_{rw} = u_1\left(1-\sqrt{\frac{\gamma_1(\gamma_1-1)}{2}}\right) \tag{4.112}$$

注意到 u_1 也可写成 $2u_{s1}/(\gamma+1)$,基于式(4.18),得到已受冲击的上游物质中压力为

$$p_3 = \frac{\gamma_4+1}{2}\rho_4(U+u_1)^2 \tag{4.113}$$

p_3 应与界面上的压力 p_i 匹配。根据式(4.83),可用活塞界面压力计算 p_i,用本节的记号表示为

$$p_i = p_1\left(1-\frac{\gamma_1-1}{2}\frac{U}{c_{s1}}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{4.114}$$

式中 c_{s1} 为初始时已受冲击介质中的声速。

令 $p_i=p_3$ 就可以确定 U。对于 γ 的任何具体值,得到的方程都可转化为关于 U 的多项式代数方程。图 4.20 表示 $\gamma_4=5/3$ 以及两个 γ_1 值条件下,计算得到的 U/u_{s1} 与初始密度比

ρ_4/ρ_0 的关系曲线。应当牢记这是下游标架中的结果，在实验室参考系中 U 还要添加一项 $2u_{s1}/(\gamma_1+1)$。

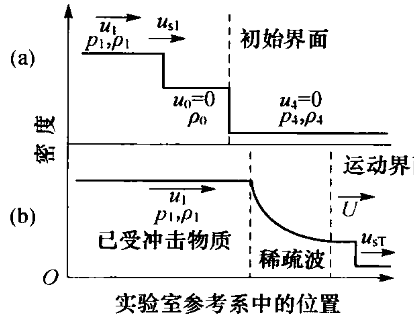


图 4.19　冲击波到达密度陡降的界面时可能发生的稀疏过程

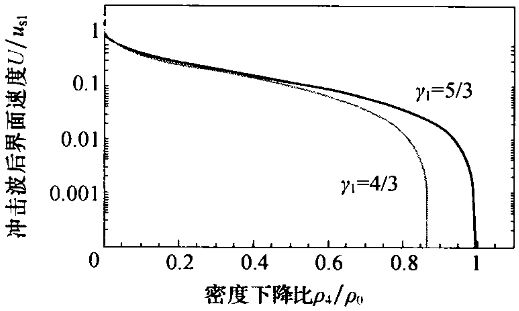


图 4.20　冲击波到达密度陡降界面时下游标架中归一化界面速度与上、下游物质密度比 ρ_4/ρ_0 的关系

（黑曲线表示 $\gamma_1=5/3$，灰曲线表示 $\gamma_1=4/3$，这两种情形中 γ_4 都是 5/3）

习题 4.21

假定一个强冲击波到达一个密度陡降的界面，其右边物质的密度 ρ_4 只是界面左边已受冲击物质密度 ρ_1 的 1/10，试计算此后形成的稀疏过程中各流场量的剖面。

从图 4.20 中可看到 ρ_4/ρ_0 有极限值，在此值以外范围中 U 曲线消失，从数学上看此时 U 应成为负值，但这样的解在所考察情形中没有物理意义。事实上这种状况表明，系统对入射冲击波的响应是产生一个反射冲击波，而不是稀疏波。即使 $\rho_4<\rho_1$，也有可能产生反射冲击波，如图 4.20 中灰曲线表示的情形。为了理解这种状况是如何发生的，可以想像一旦受冲击的低密度物质中压力 p_4 超过了 p_1，就会形成反射冲击波。还可以考虑到当 ρ_4 增大时，低密度物质中冲击波后的粒子速度下降，而且在由稀疏波向反射冲击波的转变中有一个 u_1 的极限值。假设低密度物质中的冲击波是强冲击波，式(4.13)可以适用，预期这个转变将发生在 $p_1=(\gamma_4+1)\rho_4u_1^2/2$ 时。在 p_1 由静止物质中强冲击波所产生的特殊情况下（然后该物质朝一个静止界面运动），$p_1=(\gamma_1-1)\rho_1u_1^2/2$，根据此式可得到产生反射冲击波所要求的低密度物质的阈值密度为

$$\rho_4=\frac{\gamma_1-1}{\gamma_4+1}\rho_1=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_4+1}\rho_0 \tag{4.115}$$

此式表明，当 $\gamma_4=\gamma_1$ 时上述转变发生在界面密度比 $\rho_4/\rho_0>1$ 的场合，换言之即界面处于从低密度变化为高密度的情况，这样的结果是预料之中的。但是如果 $\gamma_4>\gamma_1$，这种转变就可能发生于从较高密度变化为较低密度的界面处。

再考虑更普遍的等离子体平面飞片情形。这里有一个已受冲击或已被加热的片状物质，在其撞击另一物质之前被加速到较高速度（成为飞片），被撞击物质的表面则构成本问题中的界面。此时，$p_1<(\gamma_1-1)\rho_1u_1^2/2$，如果记 $p_1=f\rho_1u_1^2$，正如前述 $\gamma=5/3$ 时，有 $0<f<1/3$。这样，产生反射冲击波的条件成为

$$\rho_4 = \frac{2f}{\gamma_4 + 1}\rho_1 \tag{4.116}$$

可以看出,从稀疏波向反射冲击波的转变可以发生在界面后为任意低密度物质的情形,并与其性质和动力学历史有关。

习题 4.22

假定 $\gamma_4 = \gamma_1$(也可以选择两者不相等),令 p_3 趋近于 p_1 作为转变为稀疏波过程的定义,试从式(4.44)~式(4.52)推导出式(4.116)。提示:这道习题比较困难,需要考虑取极限的运算,采取怎样的解法甚为重要。

4.4.2 追赶冲击波

无论是太阳表面一系列能量的释放或者实验室中产生的一系列辐照脉冲,都能够引发相继的一系列冲击波,这些现象并不特殊。如果第二个冲击波强于第一个冲击波,它将走得更快并赶上第一个冲击波。通过本章前面所作的讨论,已可对这种系统的定性性态了解得相当清楚,下面作一简短评述。

当较强的第二个冲击波赶上第一个冲击波,在很短暂时间内两者合并为一个波。图4.21中左面一组曲线表示强波未赶上弱波之前的两个冲击波。中间一组曲线表示它们合并时刻的形状,这一瞬间总的密度跃变是两个冲击波各自产生的密度跃变的乘积。然而,除非这两个冲击波都很弱,这个总密度跃变不可能由一个单一冲击波保持下去,例如,一个较强的冲击波产生的密度跃变是4:1,赶上了另一个密度跃变为3:1的较弱冲击波,造成的瞬间密度跃变为12:1,这么高的密度压缩几乎没有物质能够长久承受。那么这个系统将怎样变化呢?

把两波合并的时刻看作初始条件,就可看出以后会发生什么情况。这个时刻波后物质具有一定的密度、压力和粒子速度。以后所遇到的问题,完全相同于一个等离子体平面飞片的问题,该飞片撞击物体时刻所形成的界面后方为低密度的物质。受到两次冲击压缩物质的密度达ρ_1,这个事实确认了未受冲击物质的密度ρ_4将低于式(4.116)给定的值,因而导致已受冲击物质发生的是稀疏过程,同时有一个强冲击波向未受冲击的物质中传播。图4.21最右面一组曲线表示上述的冲击波和稀疏波。在稀疏波的形成时刻,其头部立即朝向入射冲击波的驱动面,即驱动冲击波的压力加载面。下面讨论在这之后又将发生什么现象。

4.4.3 稀疏过程中产生的二次冲击波

受冲击物质层的长期行为一般与所研究系统的性质有关。冲击波或稀疏波经过一个系统时,会遇到各个界面或其他波,彼此间发生相互作用。任何系统中对后一个界面情况的了解十分重要,这是使问题复杂化的因素。如果几个波先后到达这个界面,其行为将更为复杂。有人试图提出这样的结论:每一个波总会导致下一个波的出现,但这是不正确的。尤其是稀疏波通过一个系统时,可以产生也可以不产生后续的波。如4.1节所述,设想有一个压力源驱动一个物质层中的冲击波,此冲击波到达该物质层后表面时形成4.2节和4.4.1节

所述的稀疏波，其波头部反向传播穿过已受冲击的物质，最终到达原始的加载面。图 4.22 说明以后发生的现象。

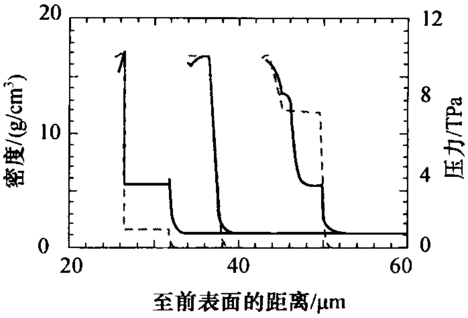


图 4.21　追赶冲击波的动力学过程

密度 1.4g/cm³ 的聚酰亚胺先被历时 1ns 的加载压力脉冲 1TPa 所冲击，然后驱动压力提高到 10TPa(黑线)，三组曲线分别表示 10.5ns、12ns 和 13.5ns 的情形，灰色虚线为压力波形。

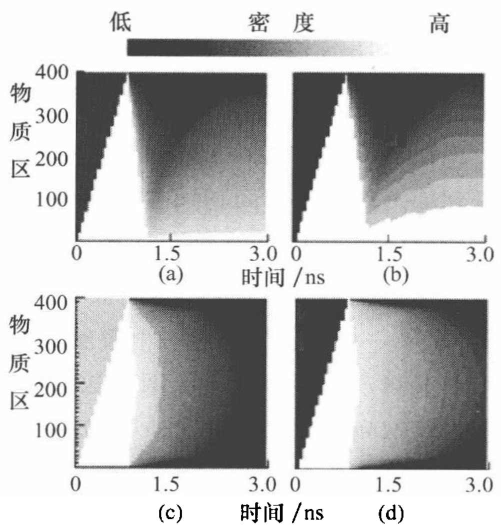


图 4.22　拉格朗日坐标和时间平面上流体动力学系统中波运动的灰度云图

3TPa 持续压力源作用于初始密度为 1g/cm³ 的 CH 材料产生稀疏波和二次冲击波的情形：图(a)密度图，图(b)压力图；稀疏波返回到加载面之前驱动压力终止、不产生二次冲击波的情形，图(c)密度图，图(d)压力图。左边锯齿形边界是数值模拟中网格尺寸较大和经历一定时间循环次数所造成的。

在图 4.22 表示的数值模拟算例中，3TPa 压力源驱动初始密度 1g/cm³ 的 CH 材料层中的入射冲击波，向右传播通过这个物质层。一旦该冲击波到达第 400 个格点(物质层的后自由面)，即形成一个稀疏波反向朝加载面传播。考察图 4.22(a)和(b)，这里给出的驱动压力是持续的，从灰度变化的阴影可清楚地看到稀疏波的结构，即稀疏波头和图像顶部之间的密度变动。当稀疏波到达加载面时，即产生一个新的二次冲击波再回过来朝等离子体中传播。如下所述，很容易理解这种现象。

稀疏波使已受冲击物质中的压力下降，但是加载面上的压力按所做假设不发生变化，一旦加载面前方物质中的压力因稀疏波到达而下降时，加载面的反应就是向前加速，从而再次向其前方物质中发出声波或者二次冲击波。应用简单的推理无法判别究竟产生哪一种波，但是在这个具体情形中，对第一个返回稀疏波的响应是产生一个二次冲击波。在所讨论的具体系统中，这个二次冲击波传播通过密度变化的区域，到达膨胀等离子体的右沿后便消失了，没有再产生后续的波。如果系统中还有更多的物质层，则二次冲击波可能产生后续的冲击波或稀疏波，再反向朝等离子体中传播。如此发生的这种后续波相继形成和传播的现象，称为**回射**(来回反射或混响)。

习题 4.23

上述问题的一个有趣之处在于:这种情形中,传统理论模型处理运动活塞驱动的冲击波问题,但未得出性态正确的解。考虑一个稀疏波趋近于一个等速推进的活塞表面,试问可能发生什么现象?

现在考察图 4.22(c)和(d),这里的数值模拟中令驱动压力在 0.8ns 后终止,从图中可以看到冲击波以及反向朝加载面传播的稀疏波的开始,但是由于加载面处介质不再受到压力而发生反向膨胀,出现第二个稀疏波从已卸压的加载面向前传播。这两个稀疏波相遇后并未产生后续的波,因为此时已没有压力源可用来在任何一个稀疏波中产生二次冲击波。这样,如果一个稀疏波趋近一个曾经被驱动但已停止的表面时(例如由于辐射源关闭的原因),不会再产生后续的波。图 4.22 表示这种情形中随着等离子体的膨胀和冷却,其密度和压力在空间和时间上光滑地下降。

4.4.4 爆炸波在界面处的行为

前面已经论述的爆炸波现象在天体物理学中是十分普通的。因为冲击波存在时间较长,与之相比,产生冲击波的起源性事件往往是短寿命的,结果导致从已终止的驱动源发出的稀疏波赶上前面的冲击波,形成爆炸波。之后,爆炸波可能遇到密度变化的界面,在与爆炸波的相互作用下界面发生演变。这类问题的一个十分重要的应用是理解第二类超新星中发生的现象,这里爆炸波产生于星球的芯核附近,在 C－O 层与 He 层之间的界面处遇到密度的陡降,在 He 层和 H 层之间再次遇到这种界面。当星球半径增大时,各层内物质的密度都随之下降,但是这种降低对于爆炸波在界面处的行为并不重要。

图 4.23 说明上述爆炸波的行为。当爆炸波到达界面时,该处的密度陡降无法由一个单一冲击波来维持。此时如同绝热稀疏和追赶冲击波过程那样,在低密度物质中将产生一个前向的冲击波,但是令人惊奇的是竟然又出现一个冲击波在高密度物质中反向传播,尽管此时并不满足式(4.115)中产生反射冲击波的条件。对于此现象是什么和为什么的问题,我们的解释是与绝热稀疏过程相反的**返回冲击波**。绝热稀疏过程中,界面后方(指密度较高的一边)对介质密度和压力的支撑(剖面向右延伸)是无限的,随着至界面距离的增大,介质的密度和压力上升,直至延伸至无限远处逐渐达到它们的初始值。相比之下,在爆炸波情形中,稀疏波向前传播引起界面后方的等离子体加速,但是爆炸波头部的压力也很快降到低于界面前方已受冲击的低密度物质中的压力。也就是说,一个膨胀加速的物质流动在界面原始位置附近遇到较慢的、压力较高的物质,一个返回冲击波就此形成。这类似

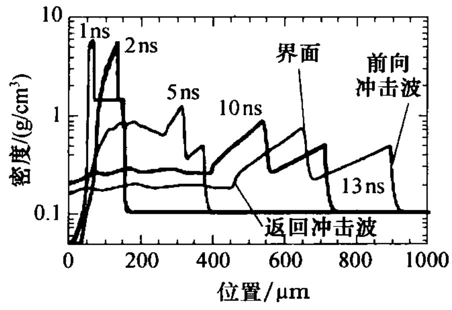


图 4.23　爆炸波通过界面时形成的返回冲击波的发展

(此图是辐照度 $4.2\times10^{14}\,W/cm^2$ 的激光束辐照厚度 150μm 的聚酰亚胺层、后面紧贴低密度碳层的复合靶情形的数值模拟结果)

于自由膨胀的等离子体遇到障碍物时产生的冲击波，但这种返回冲击波不同于冲击波遇到界面时产生的反射冲击波。这里考察的爆炸波情形中，通过爆炸波与界面相互作用形成的压力差，创造了它自身的“障碍物”。

从图 4.23 中还可以看出，前向冲击波后方以及界面后方介质的密度下降，反映了两个冲击波之间的区域在逐渐地膨胀，这是对系统速度减缓所形成的压力梯度的响应。还有另外一个后果是，前向冲击波很快发展成爆炸波结构，然而这个爆炸波结构的形状也许与初始爆炸波的形状显著不同。由于到界面的距离给问题添加了一个新的物理尺度，这个波系也许不会很快地演化为自相似结构。

爆炸波与界面相互作用的系统，在实验室天体物理学发展的早期就已成为一个活跃的重要研究领域。这个问题的研究动机来自Ⅱ型超新星中的不稳定性，将在下一章中进一步讨论，而且还将讨论这类天体非线性演化计算中的误差能否解释计算结果与观察数据的某些分歧。图 4.24 表示一个Ⅱ型超新星(SN1987A)爆炸的计算结果，可清楚看到前向的和返回的冲击波。图 4.25 表示从具有上述两个特点的一个实验中获得的数据，该实验是基于第 10 章中论述的原因而进行的，在适当缩比条件下再现了超新星的爆炸。进行这个具体实验确认了该系统具有正确的一维动力学性态。这里没有加入初始扰动，否则还可以产生不稳定的波系结构。

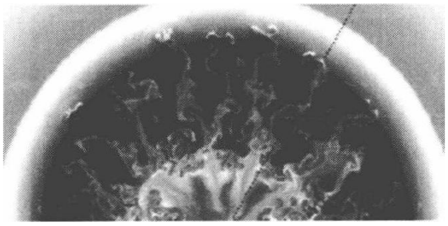


图 4.24　超新星 SN1987A 爆炸的数值模拟结果
在外边缘附近清楚地看到前向的和
返回的冲击波，这种奇妙的结构将在第 5 章中讨论。
本图引自 Kifonidis 等的论文(2003)。

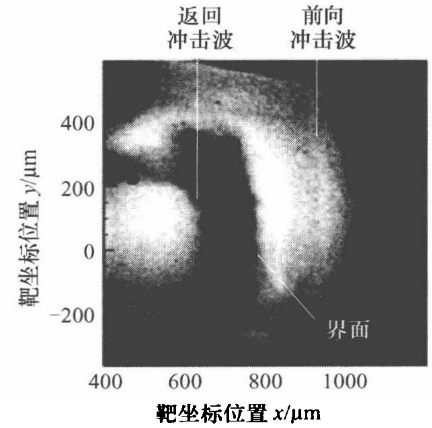


图 4.25　发出爆炸波并通过界面的实验结果
激光束辐照于 150μm 厚的密实塑料片(初始密度 $1.41\mathrm{g/cm^3}$)产生冲击波，激光终止时形成爆炸波。
在照相时刻，塑料片与其后方初始密度 $50\mathrm{mg/cm^3}$
泡沫材料之间的界面已移动了 650μm 距离，
边缘处弯曲及卷起等二维效应正变得越来越重要。

4.4.5　稀疏波在界面处的行为

稀疏波不会一直不受阻碍地永久传播。天体物理中无论何时形成了稀疏波，无论是从星球中透出的爆炸波在超新星边缘引起的，或是从星球中透出的冲击波在分子云团边缘处引起的，还是其他情形中产生的，这些稀疏波至少会遇到星际介质，而且在传播中还可能遇到其他物体。这种场合下，一个流动的膨胀中的冷等离子体通过与某一物质的相互作用，就形成了一个界面。学习了上一节就可知道，等离子体与界面的相互作用可以产生一个前向

冲击波和一个返回冲击波。

利用实验能够产生类似的现象,即形成稀疏波并与物质层相互作用。一般说来,这可能是一种获得高马赫数流动,然后让它与界面相互作用的方法,还可以得到把短暂的能源转变成持续时间大大增长的低压力源的效果。这种技术近来已应用于物态方程的研究(见第3章)、与超新星遗迹有关的实验(详见下述)、产生喷流的实验以及冲击波与物质团块长期相互作用的实验设计。

稀疏波与界面相互作用的经典例子是年轻的超新星遗迹。我们最多能够在几年的时间内持续地看到一个星球的爆炸,相比之下可观察到近处的超新星遗迹的时间即使达不到上千年,也有好几个世纪。超新星遗迹是由天体爆炸产生的喷射与周围环境(星周物质)相互作用形成的可被观察到的结构,人们普遍认为这类天体产生了辐照地球的大部分宇宙射线。尽管我们已有能力对多个超新星遗迹进行相当详细的观察,但是它们的结构和演化仍然对我们的理解提出许多挑战性问题。

创造超新星遗迹的能量是爆炸中星球的动能,典型值约为10^{51} erg。一个有意义的特点是存在一种界面结构,其两边物质的密度既不陡降也不陡升,而只是密度的空间梯度突然下降。大多数天体爆炸中冒出来的物质,可以被论证为作自相似运动(见泽尔道维奇和莱伊捷尔的书),而且与半径和时间存在反幂次律的依赖关系,指数为8或9的剖面已经相当陡峭。星球的喷射呈现自相似膨胀运动,这里粒子速度u、半径r和时间t都只与变元(r/t)有关。膨胀冷却使得喷射物质温度下降到早先的低温度值,因此喷射的能量差不多全部变成动能。

与此不同,天体周围物质(星周物质)密度的下降相当缓慢。如果膨胀是由前驱的星风所造成,则密度剖面与$1/r^2$成比例;如果星球是一个不活动的白矮星(如Ia型的超新星爆炸),则密度下降还要缓慢得多。当来自星球的快速膨胀喷射物与几乎静止的星周物质相互作用,则产生前向的和返回的冲击波。前向冲击波开始时的速度约为10000km/s的量级。超新星演化的第一阶段是自由膨胀阶段(或"年轻的遗迹"阶段)。忽略聚团和不稳定性作用,上述两个冲击波之间的整个结构则以由喷射物和星周物质性质所决定的速度运动。

上述系统涉及呈幂次律的初始密度分布和规律为$\sim x/t$的膨胀速度,再也没有具有其他物理量纲的问题参数,这意味着该系统的演化运动可能是自相似的。1982年,R. A. Chevalier指出,这种系统的流场由两个自相似运动区域组成,它们之间是一个接触界面。如4.3.2节中所讨论的那样,由三个耦合方程式组成的基本方程组,分别描述了以下两个区域中流场量(密度、粒子速度和声速)的自相似演化,即返回冲击波和接触界面之间的区域,以及前向冲击波与接触界面之间的区域。近代计算机数学编码可以十分简便地对这个方程组进行积分。图4.26表示以超新星SN1987A的相关参数,并设喷射物质密度分布正比于r^{-9}、星周物质密度分布正比于r^{-2}而计算的密度分布图。

把超新星遗迹当作流体动力学问题来处理,初看起来似乎很奇怪,因为该天体周围物质的平均密度已低至1个/cm^3 ~10个/cm^3粒子的量级。允许把这种情况按流体动力学处理的特殊原因是,存在的磁场相当小不至于影响到物质的动力学行为;但该磁场又够大而且构造恰当,足以把粒子约束在从整个超新星遗迹尺度看来为相当小的体积内。上述情形原来恰是如此。流体动力学处理中最原始的不确定性,来自不断增长的宇宙射线粒子数对流体动力学行为可能的影响。

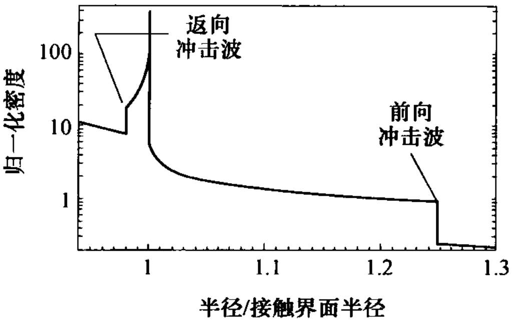


图4.26　一个年轻的超新星遗迹中的密度自相似分布剖面

（图中显示了前向和返回冲击波，超新星喷射物自左面进入）

极其年轻的超新星遗迹的例子，是图4.27所示由超新星SN1987A形成的遗迹（1993年Chevalier对它作了评述）。由于该天体至地球的距离只有15万光年，与当代其他超新星相比，这是十分接近的可以较为充分地诊断的天体。图4.27中的小圆环以及两个大环都是未知的源区，提供了新出现的因素。在该天体发生爆炸后的年代里，从这个天体发出的射频和X射线辐射不断增长，随后由于星球喷射物开始碰撞最里面的圆环，在“热斑”区出现了可见光的发射。

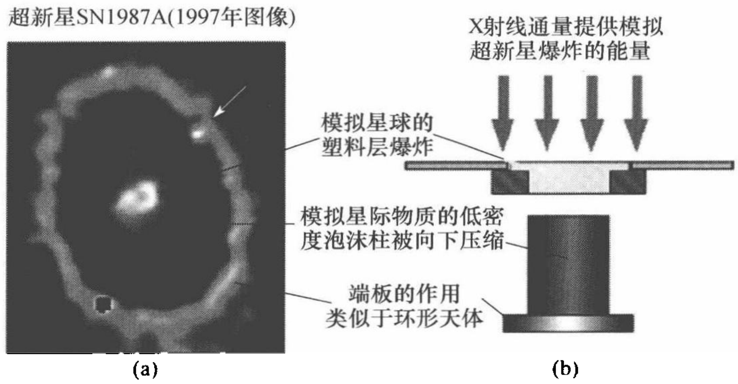


图4.27　超新星SN1987A的遗迹和相关实验

图(a) 1997年SN1987A的照片

图中箭头指向热斑，即受冲击物质与圆环开始相互作用之处。

SN1987A的图像是哈勃空间望远镜拍摄的，是对空间望远镜科学研究所

(Space Telescope Science Institute)工作的支持。该研究所按照合同

NASA coutract NAS5－26555由高校天文研究联合会

(Association of Universities for Research in Astronomy，AURA)管理；

图(b) 相关实验的示意图，塑料片的厚度为200μm，泡沫柱的直径为700μm。

实验有助于我们改进对超新星遗迹中出现的某些现象机制的理解，并且有助于考验我们建立的用于解释这些天体性态的计算模型。第一个这样的实验是本书作者和同事们设计的（Drake等，2000），也已在图4.27中说明。图中多个箭头和标注鉴证了实验现象的特点

与超新星遗迹爆炸特性之间的对应关系。这些实验是平面一维的，其意图只是模拟整个超新星遗迹爆炸中的一小段情形。实验开始时激光束加热的金制黑腔中产生强烈的 X 射线通量（见 8.2 节），辐照并烧蚀厚 200μm 的塑料层，驱动强冲击波在其中传播，冲击压力高达 5TPa，这是对超新星爆炸中产生的初始爆炸波的模仿。该冲击波压缩、加速并加热塑料层，当冲击波从塑料层后表面透出时，喷射物即从此表面膨胀冲出，在 150μm 宽的间隙中加速、冷却并减压。在真实的超新星遗迹中，减压是通过球形爆炸波的膨胀实现的（见 McKee, 1974），这里则是通过间隙距离的飞散起到类似作用。然后喷射物碰撞下面的泡沫柱，产生一个前向冲击波在模拟星球周围物质的泡沫柱中传播，该泡沫物质的密度低于已受压缩的塑料层密度的 1%。喷射物滞止于与泡沫柱的（运动中的）接触界面处，从这里形成的返回冲击波进入喷射物，这正是超新星遗迹中发生的现象。

图 4.28 表示用 X 射线照相技术测量的实验中各区的密度剖面，可以清楚地看出前向和返回冲击波已经形成。这个系统是年轻超新星遗迹基本流体动力学结构的适当缩比模型（参见第 10 章，应注意如何决定实验系统的缩尺比例）。尤其是参考第 2 章中定义的无量纲特征数，对于超新星遗迹和实验室系统分别是雷诺数 Re 为 6×10^8 和 7×10^6，佩克莱特数 Pe 为 10^7 和 10^4。这两个系统中的辐照损失都不重要。因此基本的实验设计可用于研究这些系统中的不稳定性，以及它们与其他波系结构的相互作用。

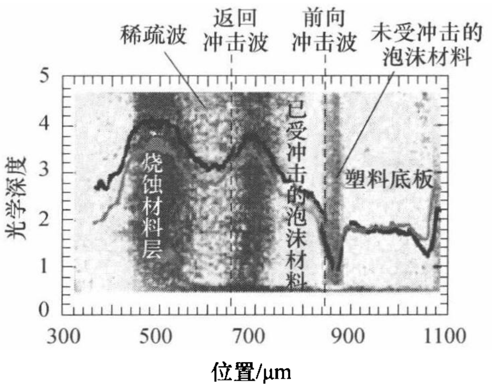


图 4.28 喷射物驱动冲击波实验的结果

图像显示了 X 射线透过实验系统所获得的照片，可清楚地看出前向和返回冲击波。曲线表示计算得到的该系统的光学深度与至初始加载面距离的函数关系。照片的空间分辨率不高，因此光学深度的转变有些过分光滑化。该图引自于 Drake 等的论文（2000）。

超新星遗迹后期的演化与本书的其他论题有联系，星周物体的累积质量最终超过天体喷射物的质量，这种变化一般认为是从渐进转变发展为“谢多夫 - 泰勒”阶段的标志，后面这个阶段开始时返回冲击波到达超新星遗迹中心并且消失，此后可以认为超新星遗迹中形成了具有前面论述的谢多夫 - 泰勒爆炸波特点的结构。在超新星遗迹的全部发展过程中，被冲击压缩的物体一直向外辐射能量。在年轻超新星遗迹阶段，有些情况下辐射损失很重要，但对于 SN1987A 的情形并不重要，在谢多夫 - 泰勒阶段中也不重要。但是该遗迹最终会缓慢下来，并且冷却到足以使辐射损失变得重要的程度（其标志是该遗迹经过 6.2.2 节所讨论的辐射损失“冷却函数”的最小值）。一旦达到了充分的冷却，该遗迹就变成为一个

动量驱动的雪耙(见 4.3.1 节),已经变得很薄的壳层结构也许不再能够抵御薄壳不稳定性,发生失稳。上面讨论的都是一维球面过程的图像,三维效应的影响(如不稳定性或与团块的相互作用)在某种程度上可能会扭曲上述图像,但对于这些问题目前尚全然无知。人们已经观察到,不仅超新星遗迹而且分子云团等其他天体一般都是块丛状的。

4.4.6　斜冲击波在界面处的行为

为了准备下一章中的论述,还需要考察斜冲击波到达密度陡升或陡降界面处发生的行为。本章前面的讨论已经指出,一般说来界面处产生的波系包括一个向界面后方透射的前向冲击波和一个(相对于界面)反向传播的反射冲击波,入射冲击波掠过之后的接触间断面将位于这两个波之间,与这两个波阵面的夹角分别为 α 和 χ(图 4.29),这些夹角的正、负号取决于反射波的类型。界面的性质将决定反射波是冲击波还是稀疏波。只要界面两边介质的物态方程相同,则密度陡增的界面一定反射冲击波,密度陡降的界面一定反射稀疏波。图 4.29 是主要几何关系的示意图,这里已假定系统是平面二维的,即在垂直于纸面的方向上各物理量是均匀而且无限伸展的。密度 ρ 的下标 a、b、c 和 d (均加括号)表示各个已受冲击和未受冲击的区域,(R)表示接触(间断)界面与反射波之间的区域。只要驱动冲击波的压力源维持不变,并且系统各个边缘尚未对内部流场产生影响,波系中各个波都具有定常的速度。因此,各个波的阵面或前沿在图中是从中心点发出的半直线,该中心点是冲击波与界面交会之处(已被取作运动参考系的原点),流体的粒子速度与它至中心点的距离无关。除了经过冲击波阵面的熵发生变化外,在系统各区域中时熵值各自保持不变。

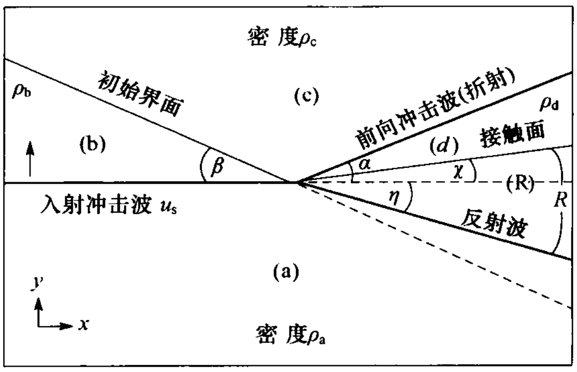


图 4.29　斜冲击波阵面到达界面时的性态示意图
所示各个角度表示反射稀疏波的情形,
为方便起见,所示的 η 和 β 都为正角

按照朗道和栗弗席兹的书 109 节,分析图 4.29 所示系统的合适方法是采用原点位于入射冲击波与界面交点的柱坐标系,其标架随该点一起运动,因此在该参考系中流动是定常的,粒子速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\text{lab}} + \boldsymbol{u}_1$,这里 $\boldsymbol{u}_1 = (u_s/\tan\beta)\hat{\boldsymbol{x}} - u_s\hat{\boldsymbol{y}}$,$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$ 为运动标架的方向矢量,如图 4.29 所示。通常记相对于 $+x$ 轴向的角向坐标为 ϕ。在上述参考系中,冲击波阵面或界面上的点随着时间沿径向朝内运动,而透(折)射冲击波阵面或反射波阵面(前沿)上的点则沿径向朝外运动。二维平面情形中,假定垂直于纸面方向的速度分量 u_z 处处相同,等于一个常数(通常取为零)。根据上节的假设,在所取的参考系中各流场量关于 r 和 z 的偏导数均为零,并且速度分量 u_r 和 u_ϕ 只随角向坐标 ϕ 变化。在这些假定下,两个字向的动量方程成为

$$\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi = 0 \tag{4.117}$$

$$u_\phi \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_r u_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \phi} = -\frac{\partial w}{\partial \phi} \tag{4.118}$$

式中 $\mathrm{d}w = \mathrm{d}p/\rho$ 是等熵条件下焓的微分。

从连续性方程可以得出

$$u_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0 \tag{4.119}$$

习题 4.24

为了得到式(4.117)~式(4.119),必须先推导出柱坐标或极坐标中的流体动力学方程组,试从平面直角坐标系中欧拉方程组的前两个方程出发,推导出式(4.117)和式(4.118)。

把上述三式组合,即可对界面处斜冲击波的行为有所了解。式(4.117)和式(4.118)意味着

$$w + \frac{1}{2}(u_r^2 + u_\phi^2) = \text{const.} \tag{4.120}$$

再引用式(4.119)把上式变换为

$$\left(u_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right)\left(1 - \frac{u_\phi^2}{c_s^2}\right) = 0 \tag{4.121}$$

式(4.120)把穿越流场时粒子速度的变化与焓的变化关联起来,以后我们还要提及此点。式(4.121)明显具有三个解,其中之一出现于左面括号中的项为零时,对应于粒子速度恒等的均匀流动。

习题 4.25

据上所述,均匀流动的性质即是在任何柱极坐标系中有 $u_r = -\partial u_\phi/\partial\phi$,朗道和栗弗席兹书中使用几何方法做出了论证。试用矢量方法进行论证(提示:从推导任一速度矢量与 r 和 ϕ 方向单位矢量的点积开始。)

区域 a、b、c、d 中的流动分别是均匀的,但在区域之间的边界上有些流场量是间断的,描述各区域流动的方程组与反射波的性质无关。为了简化数学推导,假设区域 b 和 c 中介质的初始压力可以忽略不计,整个系统中介质的多方指数都是常数 γ。这样,区域 b 和 c 中介质的粒子速度等于参考系标架的运动速度,即

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{b} = \boldsymbol{u}_\mathrm{c} = \boldsymbol{u}_\mathrm{I} = \frac{u_\mathrm{s}}{\sin\beta}(\cos\beta\hat{x} - \sin\beta\hat{y}) \tag{4.122}$$

同时在区域 a 中有 $\rho_\mathrm{a} = \rho_\mathrm{b}(\gamma+1)/(\gamma-1)$。再使用 4.1.5 节中关于斜冲击波的结果,得到冲击波后的介质粒子速度和压力分别为

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{a} = \frac{u_\mathrm{s}}{\sin\beta}\left[\cos\beta\hat{x} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\sin\beta\hat{y}\right] \tag{4.123}$$

$$p_\mathrm{a} = \frac{\rho_\mathrm{b} u_\mathrm{s}^2}{\gamma+1} \tag{4.124}$$

在区域 d 中有 $\rho_d=\rho_c(\gamma+1)/(\gamma-1)$。在运动标架中折射(前向)冲击波虽然是静止的,但仍然是斜的,可以证明该区域中折射波后介质的粒子速度和压力分别为

$$\boldsymbol{u}_d=\frac{u_s}{\sin\beta}\left[\frac{\gamma\cos\beta+\cos(2\alpha+\beta)}{\gamma+1}\right]\hat{x}-\frac{u_s}{\sin\beta}\left[\frac{\gamma\sin\beta-\sin(2\alpha+\beta)}{\gamma+1}\right]\hat{y} \tag{4.125}$$

$$p_d=\frac{\rho_c u_s^2}{\gamma+1}\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta} \tag{4.126}$$

速度 $\boldsymbol{u}_d$ 的垂直于及平行于前向折射冲击波阵面的两个分量幅度之比为 $\tan(\alpha-\chi)$,折射波后方的流动沿径向离开构成 d 区下游边界的该波阵面,从而给出

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha-\chi) \tag{4.127}$$

无论出现反射冲击波或者反射稀疏波,上述结果总是适用的,下面依次考虑这两种情况。反射冲击波时,其后方的流动仍是均匀的,与 4.4.1 节论述的平面一维情况的差别仅在于,这里折射(透射)冲击波与反射冲击波两者都是斜冲击波,并且图 4.29 中的 α 角和 χ 角都是负的,但是式(4.125)~式(4.127)仍然适用。区域 R 中介质的粒子速度和压力分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_R=\frac{u_s}{(\gamma+1)^2\sin\beta}\{&[\gamma(\gamma+1)\cos\beta+\gamma\cos(\beta-2\eta)+\cos(\beta+2\eta)]\hat{x}+\\&[-\gamma(\gamma-1)\sin\beta+\gamma\sin(\beta-2\eta)+\sin(\beta+2\eta)]\hat{y}\}\end{aligned} \tag{4.128}$$

$$p_R=\frac{\rho_b u_s^2}{\gamma-1}\frac{[\sin(\beta+\eta)-\gamma\sin(\beta-\eta)]^2}{(\gamma+1)^2\sin^2\beta} \tag{4.129}$$

$$\tan(\eta+\chi)=\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\frac{\sin(\beta+\eta)-\gamma\sin(\beta-\eta)}{\cos(\beta+\eta)+\gamma\cos(\beta-\eta)} \tag{4.130}$$

给定已知参数,令 $p_d=p_R$,而且式(4.127)和式(4.130)关于 χ 的解应当一致,在这些条件下就可求得 α 和 η 的数值解。

反射稀疏波时,稀疏波飞散沿至接触界面之间的区域中流动不是均匀的,但在这个称为稀疏区的区域中流动是等熵的,因而 $p/c_s^{2\gamma/(\gamma-1)}$ 和 $\rho/c_s^{2/(\gamma-1)}$ 在该区中分别为常数。研究稀疏区中的流动,只要把式(4.128)~式(4.130)替换为关于稀疏波的相应表达式就行。该区中径向速度分量 u_r 明显是正的,所以式(4.121)可给出 $u_\phi=c_s$ 的解。如果用下标 a 表示稀疏波头部的参数,如 w_a、u_{ra} 和 c_a 等,则可以从式(4.120)得出

$$u_r^2=u_{ra}^2+c_a^2-c_s^2+2(w_a-w) \tag{4.131}$$

把上式和 $u_\phi=c_s$ 这两个结果代入式(4.119),重新排列并进行积分,得

$$\phi+\eta=\int_{\rho_a c_a}^{\rho c_s}\frac{d(\rho c_s)}{\rho\sqrt{u_{ra}^2+c_a^2-c_s^2+2(w_a-w)}} \tag{4.132}$$

式中 η 角已图示于图 4.29 中。如果设稀疏区的张角为 ϕ_0,则 η 相等于 $-\phi_0$。对于多方气体,式(4.132)可化为

$$\phi+\eta=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\int_{c_s/c_a}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{Q^2-\xi^2}} \tag{4.133}$$

式中

$$Q^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{u_{ra}^2}{c_a^2} > 1 \tag{4.134}$$

应注意到 Q 与 η 有关,因为

$$\frac{u_{ra}^2}{c_a^2} = \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma(\gamma - 1)}\frac{\cos^2(\beta - \eta)}{\sin^2\beta} > 1 \tag{4.135}$$

考虑稀疏波的性态就可以求出 η 角。在平面一维系统中,稀疏波以下游介质声速扩展的飞散沿,从被冲击的界面朝下游方向运动。换一种方法考虑,声波从受扰动界面处向所有方向发出,在平面一维几何条件下所有声波相阵面的前沿都引领着稀疏波。根据这样的观点,图 4.29 系统中从冲击波到达界面时刻(取为 $t=0$)开始,从界面迹线上任何一点出发的声波的传播可描述为

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{u}_1 + c_a\boldsymbol{k})t \tag{4.136}$$

这里矢量 $\boldsymbol{k}$ 是任意方向的单位矢量。设 $\boldsymbol{k}$ 与 $+x$ 轴方向的夹角为 ϕ_s,用 u_s 表示 c_a 和 u_1,就可以得到确定稀疏角 η 的如下方程,即

$$-\tan\eta = \min\left[\frac{-\dfrac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\sin\beta + \sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma + 1}}\sin\beta\sin\phi_s}{\cos\beta + \sqrt{\dfrac{\gamma}{\gamma + 1}}\sin\beta\cos\phi_s}\right] \tag{4.137}$$

此式中依靠变动 ϕ_s 角确定方括号项的最小值,通常 ϕ_s 为 180°~250°。图 4.30 表示 η 与 β 的关系。

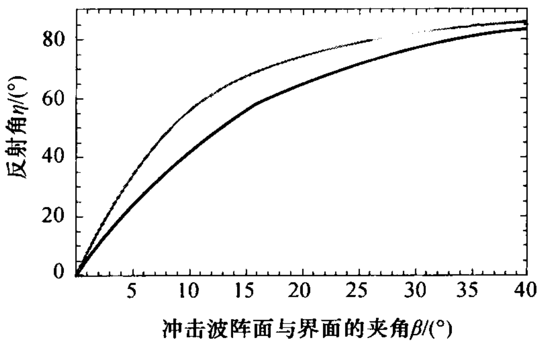


图 4.30 从斜界面产生的稀疏波的最大折转角只与 γ 和 β 有关

实线为 $\gamma=5/3$,灰线为 $\gamma=4/3$。

知道 η 值之后,由式(4.76)计算 c_s,然后再计算其余流场量,它们都是 ϕ 角的函数,即稀疏波和接触面之间变动角度 ϕ 的函数:

$$c_s = c_0 Q\sin\left[\arcsin\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}(\phi + \eta)\right] \tag{4.138}$$

在接触面处式(4.138)给出确定 χ 的方程,用声速 c_{end} 表示即有

$$\chi + \eta = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}\left[\arcsin\frac{1}{Q} - \arcsin\frac{c_{\text{end}}/c_{\text{a}}}{Q}\right] \tag{4.139}$$

由于在接触面处稀疏区的压力等于 p_{d}，这就给出

$$\frac{c_{\text{end}}}{c_{\text{a}}} = \left(\frac{p_{\text{d}}}{p_{\text{a}}}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} = \left(\frac{\rho_{\text{c}}}{\rho_{\text{b}}}\frac{\sin^2(\beta + \alpha)}{\sin^2\beta}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \tag{4.140}$$

这样，式(4.139)给出了 χ 对于 η 和 α 的函数关系（前面论述中早已知道此点）。式(4.127)更加确定了 χ 与 α 的函数关系，从而可以数值求解。

至此，关于冲击波在斜界面处行为的论述已经完成。第 5 章中考虑波纹状界面时，将要用到本节中有关公式在小角度极限下的近似。

第 5 章　流体动力学不稳定性

前面第 4 章中的讨论关注于一维现象,这种物理系统中各变量是至原点的线性距离或径向距离的函数,只依赖于一个空间位置坐标,按假设与其他两个空间维度无关。但是通常的实验表明,一维几何往往不是很恰当的假设。我们在空气中见到湍流云团和旋风,在水中见到复杂的涡旋,知道地球和太阳内部的湍流运动是三维的。如果细心观察,还可在澡盆里看到流体动力学现象。如果人们细心设计,减少耗费于在空气中产生湍流的能量,就能够节省汽车和飞机使用的燃料。事实上,从我们的经验和普通常识可以得出结论,流体动力学运动中的流体不仅是不稳定的,在某种意义上还具有湍流性质。

可以认为我们对上述种种效应已有较好的了解,因为这些现象已被深入研究了一个多世纪。确实,许多掌握了近代数学工具、更掌握了强有力的近代计算机的人们,从事这些很容易在自然界中观察到或在实验室中产生现象的研究,本应当透彻理解这些问题,但是现实并非如此。人们甚至可以把流体动力学不稳定性和湍流研究,列入 20 世纪中基本进展最差的物理领域奖项名单。当然,该领域的研究工作已经得到了一些肯定的结果,很多是已经了解的,还有很多是正在理解中的。已经了解的结果对于实际问题的重要性,远在寻找下一个夸克工作可能产生的任何直接影响之上。不过人们还是要问,为什么这项研究如此困难?

只要思考一下欧拉方程组的第一个方程——连续性方程,就可得到关于这个问题的大部分回答。该方程含有乘积 ρu 的散度,因而成为非线性的方程。人们经常假定一个变量是常数,或者把两个变量都线性化,作为处理物理方程组中非线性项在物理上可行的手段。本章后面可以看到,这些途径确实提供了对于基本流体动力学不稳定性的一些见解。在某些物理系统中,这些非线性项驱动的波自身达到饱和的方式,对于系统的整体动力学行为不发生影响。在流体动力学系统中与初始值相比较,介质密度和粒子速度的变化往往很大,而且具有一定的结构,这样导致的动力学行为是不易处理的。即使进行计算机模拟也不能够追踪所有的行为,因为计算机的存储量和运行时间都是有限的,严重限制了用以检验系统动力学行为的分辨能力。

即便如此,得到关于流体力学不稳定性的一些理解仍然是切实可行的,尤其是确认产生不稳定行为的各种场合,这些不同情况下的各种不稳定性被赋予了众所周知的专业术语。可以使用线性化理论估算当扰动幅度还不太大时不稳定性初始的增长率。对于高能量密度物理较为重要的一些不稳定性,将研究这类问题。我们将考察的情况只涉及二维系统的扰动调制。正是在这种系统中,人们寻找导致引发真实流体中不稳定性结构增长的强烈作用。当预设的扰动增长时,第三维度上的流场结构也在逐步发展,有时这种第三维结构标志着另一种不稳定性的开始,与系统在三维空间中的扰动调制有关。与种类不多但普遍存在的二维不稳定性现象相比较,三维不稳定性现象与系统具体细致的几何情况更加相关,读者可以

参看一些专门的文献了解详情,本书只介绍某些结论,即流体动力学湍流的流体状态情形。

在即将展开本章之际,必须先说明某些不足之处。我们考察的流体通常是可压缩的,它们对压力梯度的部分响应是压缩,因此我们强烈的意愿自然是分析可压缩流体的潜在不稳定性。遗憾的是涉及压缩问题的数学处理过于复杂,甚至连用处有限的解析理论也做不出来。可压缩系统不稳定性的大部分实际研究可采用流体动力学数值模拟的途径,这样可以处理可压缩性,甚至还可能研究不稳定性的非线性演化,实际应用中往往对非线性演化最感兴趣。本章大部分篇幅中,首先考虑不可压缩理论,让读者对不稳定性过程获得一些直观的认识,并对不稳定性增长率做出一次近似估算。幸运的是,不可压缩理论表现得比人们担心的状况要更好一些。可压缩系统的不稳定性行为十分相像于不可压缩理论所预言的情况。可能原因之一是,对流体不产生压缩作用的不稳定脉动(涨落),通常增长得快于起压缩作用的涨落,也许是因为前者不需要耗费能量于压缩方面的缘故。应用不可压缩理论的结果时,应当注意可压缩系统中的稀疏过程能够拉伸不稳定性结构,从而造成不稳定性增长范围较大的错觉。

5.1　瑞利 - 泰勒不稳定性简述

瑞利 - 泰勒(Rayleigh - Taylor,RT)**不稳定性**引起流体内部密度不同区域之间的相互渗透,图 5.1 就是这样的示例。流体各区域可以是由一个界面分开的两种不同的物质,或者是一个界面分开的两部分平均密度不同的同种物质,这两个区域之间存在着密度梯度。这种通常被称为 RT 不稳定性的现象,往往发生于重力场中低密度流体支承高密度流体的情况。这种状况首先的引申是,RT 不稳定性可以发生于密度不同并经受着与密度梯度方向相反的压力梯度的两个流体区域之间。另一种更广泛的推广是熵模式出现的状况(见 5.3 节),也就是熵增梯度与压力梯度方向一致的情况。

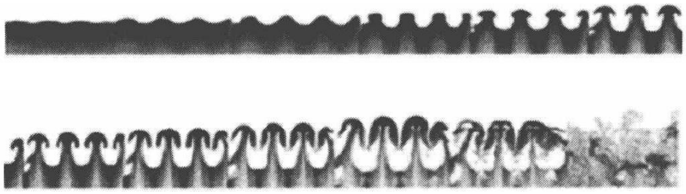


图 5.1　瑞利 - 泰勒不稳定性的增长和饱和,试验设施中两个流体加速过程期间所观察到的图像
(此图引自 Arizona 大学 Jeff Jacobs 的工作)

5.1.1　浮力的驱动作用

首先关注界面两边压力梯度与密度梯度方向相反的情况,或许这种情况过于普遍而难以立即弄明白,但它确实概括了高能量密度物理中大部分有意义的情形,因此有必要深入探讨。当这类不稳定性的条件得到满足,所研究的系统就能通过两个流体区域的相互渗透而降低自己的势能。我们研究这种不稳定性的途径从一些简单的分析开始,这样可以增进读者对于浮力和加速力两个观念的直觉认识。下一节将对不稳定行为进行形式上的推导。

考虑流体中的气泡,我们知道水中的空气泡向上升起,在其他流体中也有类似现象。正

如阿基米德那样,考虑作用于气泡向上的力应等于把该气泡按入水中相应位置所需的力,也就是把水表面提到相应高度所需的力。但是这种思考并不增进人们对于气泡内究竟发生什么事情的理解,人们自然要问为什么气泡经受的总是一个向上的净力。考察无黏性流体中的动量方程,作为思考上述问题的开始,即

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\nabla p-\nabla\Psi \tag{5.1}$$

式中 Ψ 为势能项,对于重力场即是 $\int\rho g\mathrm{d}z$ 。

这里已忽略表面张力,虽然对于水中的空气泡来说这样做并不合适。定常状态下,流体内的压力梯度与重力势的梯度相互平衡,事实上估算流体中某处的压力时往往想到它等于该处上方流体的重力。如果只考虑垂直方向的情况,似乎流体中任意的密度分布方式都可导致平衡,只要压力等于平衡重力所需的大小就行。如果真是这样就不会有浮力了(从而也不会有瑞利-泰勒不稳定性),实际上并非如此。

重力场中有结构的流体中,不同位置的物体所受的重力不同,如果该力仅取决于当地流体压力,则该流体将存在横向的压力梯度,但是流体不能经受这样的压力梯度。在可压缩流体中,这种横向压力梯度可通过压缩波和声波而缓解。在流体变成不可压缩的极限下,沿着等势面的压力立刻成为常值(即在重力场中处于同样高度处)。这意味着,压力由高于任何这样势曲面的物体的平均重量所决定。用数学语言表达,可记 z 为平行于势能梯度方向的坐标轴,则有

$$p=\frac{1}{A}\int_A\int_z^{z_{\max}}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}A=-\frac{1}{A}\int_A\int_z^{z_{\max}}\rho(z,x,y)g\mathrm{d}z\mathrm{d}A \tag{5.2}$$

式中 A 为流体在(x,y)平面上的投影面积;$z_{\max}$为该问题中考虑的最高高度,在这高度以上的任何情况对所考察位置的流体运动都不产生影响。

式(5.2)最右面的表达式是针对重力场情形的。用式(5.2)计算式(5.1)中的压力梯度项,即有

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{A}\int_A\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathrm{d}A=\frac{1}{A}\int_A\rho(z,x,y)g\mathrm{d}A=\bar{\rho}g \tag{5.3}$$

式中 $\bar{\rho}$ 为面积 A 上方流体柱的平均密度。

对于简单的重力场情形有

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=(\bar{\rho}-\rho)g \tag{5.4}$$

考察气泡的情况显然有 $\rho<\bar{\rho}$,因此气泡经受一个向上的浮力,还可看到与此同时其余流体经受一个向下的力,即对应于气泡向上运动时必然出现的回复力。若流体中有一个密度为 ρ_2 的小气泡,$\bar{\rho}\approx\rho_2$,对该气泡体积 V 作积分就可得出标准结果:上升力为$(\rho_2-\bar{\rho})V$。至此,我们详细理解了气泡为什么会上升。为了理解气泡作为一个实体的动力学行为,本来应考虑移动气泡上方流体时所做的功以及其他一些因素(如表面张力),但是对于论述 RT 不稳定性来说式(5.4)已经足够,所以不必再深究了。

关于 RT 不稳定性的简单范例是,一个处于重力场的系统中,初始时较重的流体(如水)

放于较轻流体(如油)的上面,所谓"上面"是按重力场方向定义的。典型的演示方法可使用装有油和水的罐子,这两种液体的位置很快就无阻力地倒了过来,还可以看到类似的玩具或书桌上小摆设展现的这种动力学行为。作为验证,这里必须注意使两种液体位置颠倒过来的运动不致引起液体状态的变化。例如,黑啤酒的密度略低于琥珀色啤酒,但是若想把原先装着并不混合的这两种啤酒的瓶子倒转过来,它们将完全混为一体,这种结果其实与 RT 不稳定性无关。回到我们考察的情形,首先注意到朝着此流场结构底部方向压力逐渐增大,因为所考察点向下移动时其上方流体的重力逐渐增加,因此压力梯度是向下的。其次根据假定,初始时重流体置于轻流体的上面,两者界面处的密度梯度是向上的。在此界面上任何波纹扰动之内,较轻的流体将受到一个向上的力,同时较重的流体将受到一个向下的力,结果使得波纹扰动幅度增大。例如由于热噪动等因素,界面上这种小波纹扰动总是会出现的。把上述情形与气泡作比较,自然可以把较轻的向上升起的流体区域描述为"气泡",渗入轻流体中的重流体区域则称为"尖刺"。这就是下面讨论 RT 不稳定性的标准术语。

习题 5.1

考虑水置于油上面的上述系统,假设在水/油界面上有一个很小的正弦形波纹扰动,试求重流体区域和轻流体区域中该波纹下界与上界之间的力密度的垂直剖面,并讨论和比较这两种流体区域中力密度剖面的形状。

高能密度物理研究中极少像上述情形那样涉及重力场,往往是以密度较低的流体推动密度较重的流体,使其加速或减速。这样的例子如热空气顶着上面较重的冷空气开始上升;类似的例子还有脉冲星风(一种温度非常高但密度很低的由正、负电子组成的流体)加速其前方的脉冲星周围的较密物质。另一种类似的情形是,激光聚变靶丸周围已被激光加热的低密度晕区等离子体,推动较密的靶丸使其向内加速。所有上述情形中,低密度流体区域压力较高,存在着与密度梯度方向相反的压力梯度。这种状况下,如何直观地理解不稳定性是怎样发生的? 可以设想任何流体的惯性总是使其抵制被加速的运动,较密的流体具有较大的惯性,两个流体的相互渗透中有些较密的流体落在后面,成为尖刺。

然而上述系统行为的一个方面似乎违背直觉的认识,即当较密流体下沉、压力梯度降低时,系统的势能减小。依据流体动力学知识,人们可能想到压力梯度驱使流体沿着其方向加速,对于孤立物体这种认识是正确的,但是这里考察的是每个单独的流体微元相对于所研究的平均状态的行为。考虑一个流体微元相对于作加速运动界面的位置,就可看出为了把该微元推向界面前方,而不是待在界面处,则必须投入较多的能量。但如果让流体微元的运动落在界面后面,则只需投入较少的能量。因此,在具有定常的被强制加速界面的系统场合,势能正比于流体微元运动到界面前方的距离,这就规定了该系统中"上方"的概念。站在界面上观察,较轻流体受到的力沿着加速度的方向,而较重流体受到的力则在相反的方向,从而使其落在后面。

对于密度高低位置倒过来的减速界面情形的解,在数学上完全相同于上述情形。减速界面情形发生在一个具有初始速度的较重流体朝较轻流体区域内运动的时候,较轻流体可

能由于冲击波而受到压缩和加热，由此而形成的压力梯度使得重流体减速，压力梯度的方向恰与密度梯度相反。实验室中可以出现这种状况，如爆炸波把较重流体推向较轻流体区域内，惯性约束聚变靶丸内表面处发生的情形就是这样的例子。再如天体物理中许多这样的情形，一些天体物理喷流头部中较重的物质受到其前方较轻物质的阻挡而减速。这类界面发生减速的情形中，也是落在界面后面的物质需要较少的能量投入，但是此时这些物质减慢的程度比不上界面的状况，这里相对于因界面被强制减速而生成的势能来说，轻、重流体之间的相互渗透减少了这些物体中的势能。

超新星中可以见到另一类减速界面的例子。图 4.25 表示对于一个具体的超新星爆炸(SN1987A)的数值模拟结果，在此过程中该爆炸产生的爆炸波穿越该星体内密度陡降更快的界面，当爆炸波向外运动时该界面速度下降(见 4.4.4 节)，形成了指向外面的压力梯度(此压力剖面本身也是爆炸波的一部分)，与界面处向内的密度梯度方向相反。结果导致各个界面处 RT 不稳定性的发展，发展到非线性阶段时较重物质的"尖刺"穿过星体向外流动。"尖刺"之间的各个区域，是较轻物质向内运动形成的"气泡"。

下一节将从数学上对上述讨论加以概括。我们指出，考察 RT 不稳定性增长最自然的参考标架是与界面固结的参考系。这个参考系相对于实验室惯性参考系通常作加速运动，在实验室参考系中该界面的加速度 $\boldsymbol{a} = -\nabla p/\rho$，在界面参考系中的修正则是在相反方向引入一个平均的"重力"加速度 $\boldsymbol{g} = \nabla p_o/\rho_o$，即应考虑惯性力，这里下标"o"表示整个界面的平均值。至此，关于 RT 不稳定性的导引性讨论已经完成，下面将展开对于 RT 不稳定性线性阶段的数学处理。

5.1.2 流体动力学描述的基础

本节进行 RT 不稳定性的流体动力学描述，这里已假定整个流体的行为是二维的。另一种途径是界面动力学的描述，只分析一个界面的动力学行为，不考虑其他地方的动力学问题。在文献资料中可找到这两种途径的论述。用途较为有限的界面动力学描述的数学公式很容易推导，但这是一条没有发展前景的途径，因为这种方法无法考虑一些重要因素的作用，如黏性、密度梯度等，也不能推广用于研究三维情形中等离子体的变化性质。

因此，只关注流体动力学的描述方法，目标在于找出 *RT* 不稳定性扰动的表面波解。表面波对流体的影响随着流体至表面深度的增大而迅速衰减。应用流体力学的连续性方程和动量方程，可以分析 RT 不稳定性的动力学。采用式(2.27)表示的动量方程，忽略其中的辐射压力、电磁力和其他的力，但保留黏性力项用以考虑黏性的影响。为了与其他文献资料比较，在钱德拉塞卡(Chandrasekhar)书中作为一个例子论述的表面张力的影响，也是式(2.27)中其他类型力的一种。忽略表面张力，是因为它与高能量密度系统无关，这些系统温度很高以至于可忽略形成表面张力的分子间的相互作用。

设定流体系统中未受扰动的初始界面位于 xy 坐标平面，采用流体动力学方程组线性化的方法，把未受扰动时流体的压力和密度分布分别写为 $p = p(z)$ 和 $\rho = \rho(z)$，它们的一阶扰动分别为 $\delta p(x,y,z)$ 和 $\delta\rho(x,y,z)$。采取与界面固结的界面静止标架，因此在该参考系中零阶速度为零，一阶速度记为 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$。再假定不稳定性引起的流场脉动(涨落)是不可压缩

的，上面的讨论已指出，这并不意味着流体（零阶量意义下）一定是不可压缩的。扰动不可压缩的假定可以表示为$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0$，从而连续性方程变为

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p=0 \tag{5.5}$$

根据已做的假定，线性化的动量方程为

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\nabla\delta p+\nabla\cdot\underline{\sigma_\nu}-g\delta\rho\hat{z} \tag{5.6}$$

式中$\hat{z}$为z轴方向的单位矢量；g为在非惯性的界面静止参考系中等效的重力加速度。

界面参考系中惯性力的作用颇为微妙，人们可能倾向于假定g沿着实验室参考系中加速度的方向，但是在界面参考系中g应当指向压力高的区域，其原因已在上面已提及。如同第 2 章中那样，式(5.6)中的黏性应力张量记为$\underline{\sigma_\nu}$，其分量为

$$\sigma_{\nu ij}=\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{5.7}$$

式中坐标y和z已分别用x_2和x_3代替，并使用了指标重复表示求和式的规定；δ_{ij}为克罗内克符号；ν为运动黏性系数；ζ为第二黏性系数（在这里并不重要）。

由于扰动不可压缩的假定，$\partial u_i/\partial x_i=0$，黏性应力张量有关的项可得到很大简化，而且包含$\zeta$的项也等于零。与所做的假设相一致，$\nu$的不为零的导数只有$\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}z(=\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}x_3)$。在上述假定和思考下，黏性应力张量散度$\nabla\cdot\underline{\sigma_\nu}$的第$k$个分量为

$$(\nabla\cdot\underline{\sigma_\nu})_k=\rho\nu\nabla^2u_k+\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right) \tag{5.8}$$

本问题中有三个非常重要的方向，即“重力”方向、扰动曲面的波矢量方向以及与这两个方向相垂直的方向。假定扰动界面的平均曲面与压力梯度矢量相垂直，并且面扰动是平面波，从而可以把任何真实的面扰动表示为所有可能的平面波分量之和，因为这些平面波分量构成了完备的基集。我们的目的是找出任意基本平面波分量的演化规律，假定初始时其幅度很小，然后随时间而增长。设$\boldsymbol{u}$在三个坐标轴方向的分量表示为$\boldsymbol{u}=(u,v,w)$，写出式(5.6)、不可压缩条件和式(5.5)的分量形式为

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\delta p+\rho\nu\nabla^2u+\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5.9}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\delta p+\rho\nu\nabla^2v+\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{5.10}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\delta p+\rho\nu\nabla^2w+\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(2\frac{\partial w}{\partial z}\right)-g\delta\rho \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho=-w\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{5.13}$$

这就是描述 RT 不稳定性线性阶段的基本方程组，包括了黏性或密度梯度的影响。我们寻求表示界面扰动增长的波动解，通常该解具有未知的z方向的幅度，在(x,y)和t坐标方面

则正比于 $\exp(\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y+nt)$，$k_x$ 和 k_y 分别为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的 x、y 分量（可以选定它们分别沿着相应的坐标轴），n 为指数增长率，i 为虚数。有了这些准备之后，可把基本方程组变换为如下的新形式：

$$\rho un = -\mathrm{i}k_x\delta p + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)u + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \mathrm{i}k_x w\right) \tag{5.14}$$

$$\rho vn = -\mathrm{i}k_y\delta p + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)v + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \mathrm{i}k_y w\right) \tag{5.15}$$

$$\rho wn = -\frac{\partial}{\partial z}\delta p + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)w + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(2\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) - g\delta\rho \tag{5.16}$$

$$\mathrm{i}k_x u + \mathrm{i}k_y v = -\frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.17}$$

$$n\delta\rho = -w\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{5.18}$$

式中 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$。

通过以下步骤可把上面五个方程式化简为两个方程式：

首先把第一式乘以 $-\mathrm{i}k_x$，把第二式乘以 $-\mathrm{i}k_y$；然后两者相加，再用第四式对其作简化；

其次，用第五式消去第三式中的 $\delta\rho$，这样得到

$$\rho n\frac{\partial w}{\partial z} = -k^2\delta p + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)w \tag{5.19}$$

$$\rho wn = -\frac{\partial}{\partial z}\delta p + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)w + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(2\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) + w\,\frac{g}{n}\,\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{5.20}$$

已经说明 $\nu(z)$ 和 $\rho(z)$ 是作为未受扰动时系统的初始分布而给定的，上面两式中只要再消去 δp 就可导出以 w 为未知函数的单个方程式。这样得到的方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\left[-\rho n\frac{\partial w}{\partial z} + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)w\right]\\ &= k^2\left[-\rho nw + \rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)w + \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial z}\left(2\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) + w\,\frac{g}{n}\,\frac{\partial\rho}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{5.21}$$

在给定的边界条件下，这个方程与前面关于 δp 的方程一起提供了研究线性状况下 RT 不稳定性增长率所需的工具，它们可应用于界面每一边的流体区域。

不稳定性计算中界面处的边界条件起着重要的作用，因此应致力于边界条件的探讨（相比之下，在线性理论中并不特别关心初始条件）。第一个显然的边界条件是，两个流体始终应保持接触，这就要求跨越界面时 w 是连续的。把界面两边有关的基本方程式积分或相减，找出附加的条件。这种积分类似于第 4 章中对于冲击波转变区所做的分析，虽然所涉及的函数要复杂得多。由于后面需要用到这些结果，这个过程值得在这里推导。

考虑位于 $z=0$ 的界面，$z>0$ 的区域以下标 2 表示，$z<0$ 的区域以下标 1 表示。假设 $q(z)$ 是一个处处连续和可微的任意函数。$f(z)$ 和 $h(z)$ 是除了上述界面以外任何地方都连续可微的任意函数。例如，可以把 $f(z)$ 写为

$$f(z) = f_1(z)H(-z) + f_2(z)H(z)$$

式中 $H(z)$ 为赫维赛德(Heavyside)阶跃函数,其定义是 $z<0$ 时为 0,$z>0$ 时为 1;f_1、f_2 为处处连续可微的任意函数。

$g(z)$ 是 $f(z)$ 的导数,$g=\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$,则可以写成

$$g(z) = g_1(z)H(-z) + g_2(z)H(z) + \Delta f\delta(z)$$

式中 $\delta(z)$ 为狄拉克 δ 函数;g_1、g_2 为处处连续可微的任意函数;$\Delta f=f_2(0)-f_1(0)$。

在包含界面的小区域内对每个函数进行积分,然后令该区域的宽度趋于零,取该积分的极限。如果被积分函数中不包含 δ 函数,这样的极限显然为零。具体说来,间断函数 f、h 在 $z=0$ 两边的值若分别以下标 2 和 1 标识,则可导出

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to0}(\varepsilon f_2(\varepsilon/2) - \varepsilon f_1(\varepsilon/2)) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\partial f(z)/\partial z)\,\mathrm{d}z = f_2(0) - f_1(0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 q(z)}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial q_2}{\partial z} - \frac{\partial q_1}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial q_2}{\partial z} - \frac{\partial q_1}{\partial z}\right)_{z=0}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(z)\,\frac{\partial f(z)}{\partial z}\mathrm{d}z = q_s(f_2-f_1)_{z=0} + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varepsilon\,\frac{\partial q}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = q_s(f_2-f_1)_{z=0}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z)\,\frac{\partial q(z)}{\partial z}\mathrm{d}z = q_s(f_2-f_1)_{z=0} - \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(z)\,\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial f(z)}{\partial z}h(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta f\delta(z)(h_1(z)H(-z) + h_2(z)H(z))\,\mathrm{d}z = (f_2(0)-f_1(0))((h_1(0)+h_2(0))/2) \tag{5.22}$$

上面诸式中,下标 $z=0$ 表示该量趋近于界面 $z=0$ 时的极限值。冲击波情形中,其阵面(界面)被处理为数学上的间断面,虽然真实的微观情况是所有物理量及其导数通过该界面连续变化。

习题 5.2

式(5.22)的最后一式对于具体应用颇为重要,该式是在跨越界面的区域上对包含间断函数以及另一间断函数导数的被积式进行积分。试把 δ 函数和阶跃函数 H 作为适当函数的极限处理(可参看有关数学手册),从而证明此式。

把式(5.22)的关系应用于式(5.19)和式(5.20),注意到 w 是通过界面时保持连续的函数,w 的所有导数关于变元 z 也是连续的,而且当 z 趋于界面时都保持有界。由此得出

$$\left[\rho_2\nu_2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)w_2 - \rho_1\nu_1\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)w_1\right]_{z=0} = 0 \tag{5.23}$$

$$-(\delta p_2 - \delta p_1)_{z=0} + \left[2(\rho_2\nu_2 - \rho_1\nu_1)\frac{\partial w_1}{\partial z}\right]_{z=0} + w_0\frac{g}{n}(\rho_2-\rho_1)_{z=0} = 0 \tag{5.24}$$

式中 w_0 表示界面 $z=0$ 处 w 的公共值。

式(5.24)在 RT 不稳定性分析中特别重要,但还需要消去压力差项,得到仅含一个未知函数形式的方程式。为此,把式(5.19)处于界面两边的式子相减,得出

$$k^2(\delta p_1 - \delta p_2) = \rho_2\left[-n + \nu_2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\right]\frac{\partial w_2}{\partial z} + \rho_1\left[n - \nu_1\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\right]\frac{\partial w_1}{\partial z}$$
$$+ \frac{\partial(\rho_2\nu_2)}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)w_2 - \frac{\partial(\rho_1\nu_1)}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)w_1 \tag{5.25}$$

上式与式(5.24)组合,就可消去压力差项。下面将略去下标"$z=0$",因为已经约定在这样的边界条件下,当变元 z 从具有下标的流体区域趋于该界面时所有的流场量都如此计算。应用式(5.23)消去式(5.25)中有关的两项之后,得到虽然复杂但很有用的如下边界条件

$$w_0k^2\frac{g}{n}(\rho_2 - \rho_1) + k^2\left[2(\rho_2\nu_2 - \rho_1\nu_1)\frac{\partial w_1}{\partial z}\right] =$$
$$\rho_2\left[-n + \nu_2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\right]\frac{\partial w_2}{\partial z} - \rho_1\left[-n + \nu_1\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\right]\frac{\partial w_1}{\partial z} \tag{5.26}$$

对于含有有限黏性的问题,最后得到的边界条件是:w 的一阶导数$\partial w/\partial z$ 通过界面时必须保持连续,w 的其他导数也必须如此。与黏性形成有关的粒子微观相互作用保障了这种连续性。相比之下,当流体模型中略去黏性时,就会得到类似冲击波的局部间断解。

在很多流体动力学问题中,越过界面时压力是连续的。定常流动中越过界面的情形确实如此,但是如式(5.24)所示,这也并非必须是不稳定的加速系统。在黏性应力张量的 xz 和 yz 分量为连续的情形,可以得到

$$\begin{cases}\sigma_{xz} = \rho\nu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \rho\nu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \mathrm{i}k_x w\right)\\[2ex] \sigma_{yz} = \rho\nu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \rho\nu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + ik_y w\right)\end{cases} \tag{5.27}$$

此式意味着

$$\mathrm{i}k_x\sigma_{xz} + \mathrm{i}k_y\sigma_{yz} = \rho\nu\left(\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{i}k_x u + \mathrm{i}k_y v) - k^2 w\right) = -\rho\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)w \tag{5.28}$$

从式(5.23)可以看出,通过界面时上式左部是连续的。

总之,用以研究 RT 不稳定性的边界条件是式(5.23)、式(5.26)以及通过界面时 w 保持连续的条件,还有问题的几何情况所赋予的任何附加约束条件。对于黏性流动来说,通过界面时导数$\partial w/\partial x$ 应保持连续。

5.2 瑞利-泰勒不稳定性线性理论的应用

至此,我们已经具备了论述界面不稳定性各种情况的数学工具,现在考虑上节所发展理论的三个基本应用。首先从一个简单情况开始讨论,即两个密度不同的流体区域被一个界面所分开的系统;其次再研究黏性对不稳定性的影响,这对于大气层的问题很重要,然而对于大雷诺数的高能量密度系统似乎关系不大(见第 2 章),但是这种系统中小尺度结构的增长发生变化时,黏性将起到一定作用;最后将探讨密度梯度的影响,许多应用问题中这个因素很重要。

5.2.1 两个均匀流体之间界面的瑞利－泰勒不稳定性

最简单的情形是两个均匀无黏性流体之间的界面位于 $z=0$,式(5.21)成为

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho n\frac{\partial w}{\partial z}\right)=k^2w\left(-\rho n+\frac{g}{n}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) \tag{5.29}$$

每个均匀流体内部有$\partial\rho/\partial z=0$,上式可简化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=k^2w \tag{5.30}$$

当$z\rightarrow\pm\infty$,在足够远距离处的流体应处于未受扰动的状态,因此有

$$\begin{cases}w_1=w_0\mathrm{e}^{kz}, & z<0\\ w_2=w_0\mathrm{e}^{-kz}, & z>0\end{cases} \tag{5.31}$$

这两个解中 w_0 是共同的,因为在界面 $z=0$ 处 w 必须连续,才能避免两个流体之间出现空隙或互相重叠。根据前面的规定,流体 1 是界面下边的区域,流体 2 是界面上边的区域,w 下标的意义也是如此。前面得到的微分方程式(5.30)只给出了 w 的剖面,没有给出增长率 n。利用边界条件式(5.26)寻求不稳定性的增长率,即

$$w_0\frac{g}{n}(\rho_2-\rho_1)=\frac{n}{k^2}(\rho_2+\rho_1)kw_0 \tag{5.32}$$

由此得出

$$n_0=\sqrt{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}kg}=\sqrt{A_nkg} \tag{5.33}$$

上式专门以 n_0 表示上述简单情形的增长率,并记 **Atwood 数**为 $A_n=(\rho_2-\rho_1)/(\rho_2+\rho_1)$,其变化范围为 $-1\sim+1$,其值表示界面两边密度跃变的程度。当 A_n 为负值,意味着较重流体总是处于较轻流体的下面,此时在式(5.33)的简单极限下 n_0 为纯虚数,扰动只是振荡而不增长。如果系统具有有限黏性,这样的扰动将会衰减,钱德拉塞卡书中对此有较长篇幅的讨论。式(5.33)给出了关于 RT 不稳定性增长率的最简单结果,鉴于该原因人们经常把这个 n_0 值称为 RT 不稳定性的**"经典"增长率**(这是"经典"一词在物理学中继续被公然滥用之例)。增长率 n_0 提供了对于更为复杂系统中不稳定性增长的一种参考,增加系统的复杂性则趋向于把增长率降低到 n_0 之下。

习题 5.3

两个均匀的常密度流体被距离界面都为 d 的上、下两个平面表面所覆盖,该系统以常加速度 g 运动。试求该系统流场的粒子速度剖面和 RT 不稳定性的增长率。

在考虑系统的复杂性之前,还应指出 RT 不稳定性怎样为其他更复杂的不稳定性研究提供了基础。假定波矢量指向 x 方向,即 $k=k_x$,根据式(5.31)给出的解,从式(5.17)即得出 $\mathrm{i}u_1=w_0$,$u_2=-u_1$,这里第一式意味着 u 与 w 在空间上不同相,第二式表明界面两边存在剪切流,图 5.2 说明了这个情况。两边的流体必须沿着界面流动,并提供穿过原始界面位置

的质量流。界面两边的流体相应地必须以彼此相反的方向流动,这种剪切流动提供了本章后面将讨论的开尔文-亥姆霍兹(KH)不稳定性增长的潜在可能性。

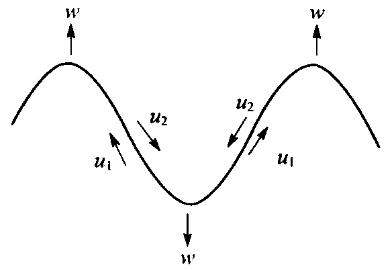


图 5.2 瑞利-泰勒不稳定性引起的剪切流动

箭头表示垂直和沿着界面的最大速度的位置及方向,图中两个速度分量的幅度不成比例地放大了,在线性阶段极限下,u 只是沿水平方向的一阶小量。

5.2.2 黏性对瑞利-泰勒不稳定性的影响

作为系统复杂性导致 RT 不稳定性增长率降低的第一个例子,考虑黏性的影响(引入两两碰撞引起的质量扩散作用完善了对黏性的研究,并且进一步降低了 RT 不稳定性增长率,读者可在专门文献中了解对这类问题的深入讨论)。作为初步探讨,先假定界面两边流体的黏性系数都不为零并且它们的密度不相等,但是各自区域内流体的密度和黏性都是均匀的。此时,式(5.21)成为

$$\left[-n+\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\left[-n+\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\right]k^2 w \tag{5.34}$$

该式具有通解,即

$$w(z)=C_1\mathrm{e}^{s_1 z}+C_2\mathrm{e}^{-s_2 z}+C_3\mathrm{e}^{kz}+C_4\mathrm{e}^{-kz} \tag{5.35}$$

式中

$$s_i=k\sqrt{1+n/(k^2\nu_i)},\quad i=1,2$$

为了保证在 $z\to\pm\infty$ 的无穷远处 w 趋于零,在 $z>0$ 区域中 C_1 和 C_3 必须为零,在 $z<0$ 区域中 C_2 和 C_4 也应为零。注意到这种选择是为了满足问题采用的具体边界条件,同时,意味着 k、s_1 和 s_2 的实部都是正的。在进一步求解中,这是一个重要的约束条件。至此已有了四个边界条件,即关于 $w(z)$ 和 $\partial w/\partial z$ 的连续性条件以及式(5.23)和式(5.26)。这些条件和 s_i 的定义式给出

$$C_1-C_2+C_3-C_4=0 \tag{5.36}$$

$$s_1C_1+s_2C_2+kC_3+kC_4=0 \tag{5.37}$$

$$n(\rho_2C_2-\rho_1C_1)+\rho_2\nu_2k^2(2C_2+2C_4)-\rho_1\nu_1k^2(2C_1+2C_3)=0 \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2A_n gk^2}{n}(C_1+C_3)-kn[C_3(1-A_n)+C_4(1+A_n)]\\&-2k^2(kC_3+s_1C_1)(\nu_1-\nu_2)+2A_nk^2(kC_3+s_1C_1)(\nu_1+\nu_2)=0\end{aligned} \tag{5.39}$$

上面诸式是关于未知幅度 C_1 至 C_4 的四个线性齐次方程,可以写成系数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 乘上未知数矢量(C_1,C_2,C_3,C_4)的形式,然后令 $\boldsymbol{M}$ 的行列式为零,得到这种情形的普遍色散关系为

$$\begin{aligned}&n^2[2A_n^2k-(s_2+s_1)+A_n(s_2-s_1)]+2k^2n[(s_2-s_1)+A_n(2k-(s_2+s_1))][\nu_2(1+A_n)-\nu_1(1-A_n)]\\&+2[k^5-k^4(s_2+s_1)+k^3s_1s_2][\nu_2(1+A_n)-\nu_1(1-A_n)]^2+A_ngk[s_2(1-A_n)+s_1(1+A_n)-2k]=0\end{aligned} \tag{5.40}$$

作为进一步的讨论,先考察 $\nu_1=\nu_2$ 的特殊情况,因此有 $s_1=s_2=s$,并得出此时的色散关系为

$$2n^2(A_n^2k-s)+8nA_n^2k^2\nu(k-s)+8A_n^2k^3\nu^2(k-s)^2-2A_ngk(k-s)=0 \quad (5.41)$$

这个方程式看似简单,其实很复杂,因为 s 与 n 有关。我们可以对各个变元求解,但最有用的还是先求解 s,因为根据约束条件 s 的实部必须为正。根据 s 的定义式把 n 代入式(5.41),得到一个关于 s 的五阶代数方程,即

$$\begin{aligned}&-s^5\nu^2+s^4k\nu^2A_n^2+2s^3k^2\nu^2(1-2A_n^2)+s^2k^3\nu^2(6A_n^2)+\\&s(A_ngk-k^4\nu^2(1+4A_n^2))-A_ngk^2+A_n^2k^5\nu^2=0\end{aligned} \quad (5.42)$$

当黏性系数 ν 趋于零时,从式(5.42)的极限情形看出增长率 n 趋于 $\sqrt{A_nkg}$,与前面经典解一致。使用计算机数学程序,可以简捷地数值求解式(5.42),但是更有用处的还是先把此式化为无量纲形式。比较 s 的系数项可知,g 在量纲上必须对应于 $k^3\nu^2$,这就启发人们采用归一化波数 $\tilde{k}=k/(g/\nu^2)^{1/3}$。应当指出,也可以把该波数写成 $\tilde{k}=[(k^2\nu)/\sqrt{kg}]^{2/3}$,从而看出,$\tilde{k}$ 同扩散与增长之间的竞争有关。尤其若把 $1/k$ 看作空间尺度,$\tilde{k}$ 即成为黏性扩散率与 RT 不稳定性基本增长率 $\sqrt{kg}$ 比值的 2/3 次幂。把式(5.42)右部第三项与第六项作比较,可知 $s^3\nu^2$ 的量纲相当于 g,这就启发我们采用 s 的归一化因子 $\tilde{s}=s/(g/\nu^2)^{1/3}$。相应的归一化增长率 $\tilde{n}=n/(g^2/\nu)^{1/3}$,写成如下形式可使其意义更为直观,即

$$\tilde{n}=(n/\sqrt{kg})(k^2\nu/\sqrt{kg})^{1/3}=(n/\sqrt{kg})\sqrt{\tilde{k}}$$

说明 $\tilde{n}$ 相当于以 RT 不稳定性基本增长率为单位的“无量纲”增长率与$\sqrt{\tilde{k}}$ 的乘积。在这些归一化量的定义下,从式(5.33)可知,零黏性的增长率 $\tilde{n}=\sqrt{A_n\tilde{k}}$,色散关系式(5.42)变成为

$$\begin{aligned}&-\tilde{s}^5+\tilde{s}^4A_n^2\tilde{k}+2\tilde{s}^3\tilde{k}^2(1-2A_n^2)+6\tilde{s}^2A_n^2\tilde{k}^3\\&+\tilde{s}\tilde{k}[A_n-\tilde{k}^3(1+4A_n^2)]-A_n\tilde{k}^2+A_n^2\tilde{k}^5=0\end{aligned} \quad (5.43)$$

这个方程提供了归一化增长率 $\tilde{n}$ 和归一化波数 $\tilde{k}$ 之间的普遍性关系,其系数仅与 Atwood 数有关。这个方程得出的任何实部为正的根 $\tilde{s}$,都对应于不稳定性扰动增长的物理模式,但是只是满足条件 $\mathscr{R}(s)>k$ 的模式才随时间呈指数增长,否则就是衰减模式。任何虚部不为零的根,都对应于振荡模式,原理上也可以是增长的或者衰减的。

图 5.3 表示式(5.43)关于 $\tilde{s}$ 的非平凡解,其中一个根具有总是大于 1 的正实部,即指数式增长的模式。另外两个根总具有负实部,不可能是本问题的解。这两个根具有虚部,另外两个根则为纯实数。最后一个根当 $\tilde{k}$ 很小时为负值(黏性较小情形),当 $\tilde{k}$ 增大时,则变为衰减模式。

图 5.4 表示两个 A_n 值之下,对应于指数增长模式的根给出的归一化增长率 $\tilde{n}$ 值。该图展示的根很容易用计算机数学程序计算得到,但代数求解并不容易。然而,问题的实质是

除了 A_n 非常小情形以外，可用一个较简单的方程式以较高精度反映解的大部分性态，其物理基础是当黏性较小时不稳定性增长率将趋于零黏性的情形，而当高黏性时黏性影响将成为主导因素；寻求的解将是这两种状况的结合，即使处于它们之间的过渡状况也能很好符合。为了得到这样一种解，把式(5.41)中的 s 用高黏性时的展开式 $s\approx k[1+n/(2k^2\nu)]$ 代替。做了这个替换并求解得到方程式，可以导出如下相当简单的色散关系，即

$$n = \sqrt{A_n kg + k^4\nu^2} - k^2\nu \tag{5.44}$$

在上述无量纲表述下成为

$$\tilde{n} = \sqrt{A_n\tilde{k} + \tilde{k}^4} - \tilde{k}^2 \tag{5.45}$$

这个解最先是由 Hurt、Harlow 和 Duff 得到的，在图 5.4 中以灰色虚线表示。

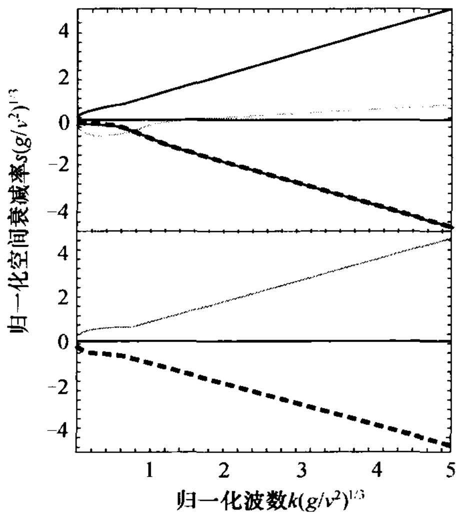


图 5.3　$A_n=0.5$ 的黏性系统中瑞利－泰勒不稳定性空间衰减率 s 的解

每一个根的实部和虚部以同样类型的曲线分别示于图(a)和图(b)。图(a)为根的实部，具有正实部的模式是所考察问题的具有物理意义的解。图(b)为根的虚部。

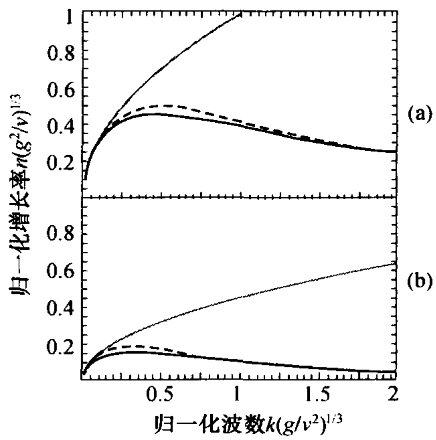


图 5.4　黏性系统瑞利－泰勒不稳定性的增长率

最下面的黑线表示真实的增长率，上面的灰实线表示零黏性系统的结果，$n=\sqrt{A_n kg}$，灰虚线表示式(5.45)的近似结果。图(a)和图(b)分别对应于 $A_n=1$ 和 $A_n=0.2$。

习题 5.4

式(5.43)上方段落的讨论证明了 $\tilde{n}=(n/\sqrt{kg})\sqrt{\tilde{k}}$，这个结果提示着如果更清楚地把变量 $\tilde{\delta}=(n/\sqrt{kg})$ 和 $\tilde{k}=[k^2\nu/\sqrt{kg}]^{2/3}$ 作为意义明确的坐标轴，则可以使 $\tilde{n}$ 显示得更有意义。试用这两个新变量改写式(5.43)，求解并作出 $\tilde{k}=0\sim2$ 范围内实根的曲线，对所得结果进行讨论并与增长率 $n=\sqrt{A_n kg}$ 作比较。

习题 5.5

从式(5.41)推导式(5.44)和式(5.45)。论述在该过程中被略去项的性质。

增长率最高模式的波数的归一化值约为几分之一,这是不足为奇的,因为最大的增长发生于波数正好小于黏性开始对增长率降低具有重要影响的那些值的场合。最大增长率对应的波数可近似地由式(5.44)和式(5.45)给出,$\tilde{k}=A_n^{1/3}/2$。也就是增长最大时有

$$k=\frac{1}{2}\left(\frac{A_n g}{\nu^2}\right)^{1/3} \tag{5.46}$$

在此波数下,增长率的幅度为

$$n=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{(A_n g)^{4/3}}{\nu^{2/3}}-\frac{(A_n g)^{2/3}}{4\nu^{1/3}}} \tag{5.47}$$

从式(5.44)和式(5.45)可看出的另一件事是,虽然黏性的作用是降低增长率,然而单单只有黏性不可能把增长率降为零。这个推论在物理上有意义,因为黏性能够抵制流体的流动,并把一些动能转变为热量,与此同时系统仍在寻找其最小势能状态。回到由式(2.40)表示的真实的黏性系数,进行一粗略的估计,高能量密度实验中其典型值约为 $0.01\text{cm}^2/\text{s}$。g 的典型值约为 $100/10=10^{15}(\text{cm}^2/\text{s})$。在这些约定下,增长率最高的 RT 模式的波数 k 将显著低于 $\sqrt{A_n kg}$。根据式(5.46),$A_n=0.5$ 时,k 约为 10^6cm^{-1} 的量级,波长约为 $0.1\mu\text{m}$ 的量级。某些实验中波长可能大一些,达到 $1\mu\text{m}$ 的量级。波长短于这个估计值的系统中,其 RT 不稳定性增长率将大大降低。这种状况必将限制 RT 不稳定性及其产生短波长湍流相关机制的能力。在天体物理的意境中,可以估计 $\nu\approx10^{20}\text{cm}^2/\text{s}$,$g$ 为$(100\text{km/s})/(100$ 年$)\sim0.003\ \text{cm}^2/\text{s}$,此时最大增长率出现于波数量级(约 10^{-15}cm^{-1})或波长量级($10^{16}\text{cm}\sim0.01$ 光年)的场合。波长大大短于上述值的情形将处于高黏性状况,其不稳定性增长率也将显著降低。

5.2.3　具有密度梯度系统的瑞利 - 泰勒不稳定性和全局模式

有些界面处两边流体密度的变化是陡峭的,而且至少在实验设计中可以使得界面处密度变化在初始时是陡峭的。然而在界面两边流体密度较平缓变化的许多情形中,有时甚至实际上并不存在这样的“界面”,而只是在一定区域中扩展的流体密度梯度与压力梯度的方向相反,也都出现了瑞利 - 泰勒不稳定性。超新星恰好就是后面这种情况。因此,探讨密度梯度对于 RT 不稳定性的影响很有意义。已经知道黏性的影响通常不大,本节计算中令 $\nu=0$ 是合理的。这样,基本微分方程式(5.21)就成为

$$k^2\left(\rho n-\frac{g}{n}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)w-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho n\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{5.48}$$

在进一步具体讨论之前,首先看到相应于增长率 $n=\sqrt{kg}$,对于任意密度剖面该方程具有形状为 $w=w_0\text{e}^{-kz}$ 的解,这个模式称为瑞利 - 泰勒不稳定性的**全局性模式**,其增长率是可能存在的 RT 不稳定性最大增长率(见 Bychkov 等人的论文)。人们也许想到,这是 RT 不稳定性

密度剖面演变的终结，但是这种模式也许因为不满足相关的边界条件而不可能存在。一方面，只要有一个密度可忽略不计的高压区使得与其相邻的某个厚度 L 的流体层加速或减速，则对于所有 $kL\gg1$ 的全局性 RT 模式来说，该流体层是不稳定的。这些模式的最大幅度发生在受高压作用的流体层自由表面上。全局性模式也可以看作 5.2.2 节中 $A_n=1$ 条件下任意密度剖面对应模式的推广。另一方面，如果界面两边有一个流体的密度不能忽略，则界面的边界条件不允许存在全局性模式。

下面将考虑一种情形，这里不稳定性将在扩展的连续密度剖面中的某处发展。作为一种有意义的一般情形，我们假定流体初始密度呈指数分布，$\rho(z)=\rho_0e^{z/L}$，流体密度将随"高度"z 而增大，在界面参考系中已规定"高度"的方向与加速度 g 的方向相反。导数 $\rho'(z)=\rho/L$，在式(5.48)中代入 $\rho=\rho(z)$，得到其解为

$$\begin{aligned} w &= C_1\exp\left[\left(\sqrt{1+4k^2L^2-4gk^2L/n^2}-1\right)\frac{z}{2L}\right] \\ &\quad + C_2\exp\left[-\left(\sqrt{1+4k^2L^2-4gk^2L/n^2}+1\right)\frac{z}{2L}\right] \end{aligned} \tag{5.49}$$

式中 C_1 和 C_2 为待定常数，应由边界条件确定。

若不稳定性区被约束于两个边界之间（如地球大气层的情形），并限制这些边界处扰动的幅度为零（虽然对于线性理论来说，这个要求只与波长为边界之间距离量级的扰动有关）。我们感兴趣的系统中，这样的封闭边界也是不常见到的，因而取 $z<0$ 时 $C_1=0$，$z>0$ 时 $C_2=0$，保证扰动随着距离增大而趋于零。决定常数的其余条件是，界面两边流体运动扰动的幅度相等，以保持 w 在界面处连续。

我们注意到在密度连续分布的场合，所谓界面的观念多少是有些人为的，不稳定性可以在密度剖面中任何地方发展。密度剖面中变动最大的地方，将首先产生最大的扰动。图5.5表明这样的环境中一个单一模式的扰动情况，在某些地方该模式是最强的（约在图中 1/2 之处），并引起物质在横向和垂向流动。物质流入向下运动的"尖刺"和向上运动的"气泡"之中。实际上，整个剖面处处似有发生不稳定性的潜在可能，整个不稳定区域似乎变成为很大的块体。

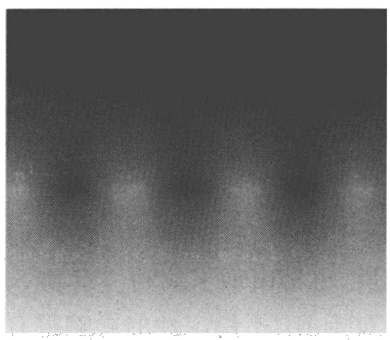


图 5.5 密度梯度分布系统的一种瑞利－泰勒不稳定性模式（灰度等级表示垂直方向的指数型密度分布，其中有一个由单一模式引起的密度扰动）

下面考虑的具有 $\boldsymbol{k}\perp\nabla p$ 性质的局域化模式，实际上是许多可能模式中的一个子集合。在一个密度连续分布的剖面中，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向（也就是所考察的扰动"曲面"的方向）并不被限制于处在垂直于 ∇p 的平面内，但对于给定的 $\boldsymbol{k}$ 的幅度而言，这个方向对应于扰动增长最大的方向。另外，还可找到式(5.48)的平面波解，其中的增长率既有实部又有虚部。这些解对应于在波传播同时增长的模式，其增长率略低于 RT 不稳定性全局性模式的情形。

习题 5.6

试求(x、y、z)坐标系中式(5.48)的平面波解,并讨论这些解的性态。

返回密度连续分布情形的局域化 RT 模式,应用边界条件式(5.26)寻求 RT 不稳定性的增长率。注意到在所选定的界面上 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$,所以该式中含有 g 的项变为零。经过一些简单的代数运算,得到一个关于增长率的方程式,即

$$n^2(1 + 4k^2L^2) - 4gk^2L = 0 \tag{5.50}$$

给出增长率的显然解为

$$n = \sqrt{kg}\sqrt{\frac{4kL}{1 + 4k^2L^2}} \tag{5.51}$$

图5.6中画出了归一化增长率 $n/\sqrt{kg}$ 与 kL 的关系曲线,在 $kL = 1/2$ 处增长率达到全局性模式的值,相应的波长大约为密度剖面长度尺度的10倍。作为比较,图5.5展示了一个波长约为密度剖面长度尺度30%的模式,所以 $kL \approx 20$。归一化增长率是有限的,但在 kL 较小的范围内很快下降,变成与 $\sqrt{2kL}$ 成比例的性态。如果考虑到图5.5中稳定地增大的波长,就可以看出波长增大时有更多的质量必须流过更长的距离。另一方面,在 kL 足够大的范围中,增长率趋于 $\sqrt{g/L}$ 的性态,越来越与 k 无关,可以认为这是与天体物理中许多情形有关的极限性态。如果把加速度写成 $g = |\nabla p|/\rho = p/(\rho L_p)$,这里 L_p 为该压力剖面的长度尺度,则增长率具有天体物理学中所熟悉的形式,即为 $(c_s^2/\gamma)/\sqrt{LL_p}$。在此极限下,压力梯度单独对增长率也有贡献,这将在5.3节中讨论。

有些情形中存在密度梯度,甚至可以是指数分布的,但是只覆盖有限的密度范围。惯性约束聚变中有一个很好的例子,发生在聚变靶丸的内表面。与密度剖面的长度尺度相比,不稳定扰动的波长较短,并受到密度剖面的影响。与此同时,波长与密度剖面长度尺度相当的扰动则受到上、下边界处密度的影响,其行为相像于密度陡变界面的情形。图5.6中的灰曲线表示函数 $\sqrt{1/(1+kL)}$,这是一个合理的折中,可作为上述条件下不稳定性行为的近似。这种近似应用较广,另一类似的近似式 $\sqrt{A_n/(1+A_nkL)}$ 也是如此。

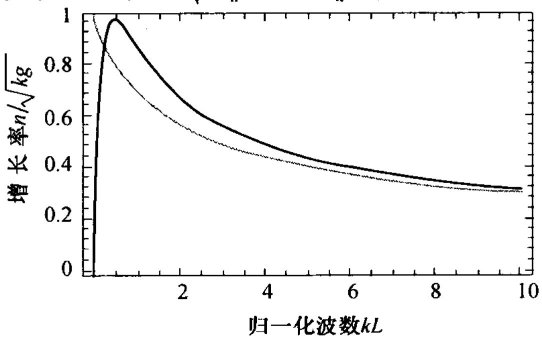


图5.6　密度梯度对瑞利－泰勒不稳定性增长率的影响

黑线表示式(5.51)的计算结果;灰线表示近似关系式 $\sqrt{1/(1+kL)}$。

习题 5.7

考虑指数型的密度剖面,沿加速度 g 的方向密度按 $\rho=\rho_0 e^{-z/L}$ 方式下降,恰与上面分析的情形相反。应用 RT 不稳定性分析方法,寻求该情形的增长率 n,并讨论所得结果。

5.3 对流不稳定性或熵模式

RT 不稳定性虽然非常重要,但实际上只是一种特殊情况。如果考察近地表的地球大气层行为,与温度梯度相比较密度梯度的影响可忽略不计,天热时候近地表处空气最热、压力最高,轻浮上飘的空气泡将发生膨胀以平衡周围压力的下降,从而使得该泡内空气密度降低,可以上浮起来。当空气泡缓慢下落时,则发生相反的过程。总之,对于对流运动来说空气是不稳定的,对流运动产生的净效果是使冷空气下降、热空气上升。积云的形成,常可用来判断空气对流运动是否稳定,因此这种不稳定性自然可称为对流不稳定性。

对流不稳定性和 RT 不稳定性都是一般不稳定性——熵模式的特殊情形。当 $\nabla s\cdot\nabla p>0$时,发生一般的不稳定性,这里 s 是物质的比熵。在西方国家的技术文献中,上述条件称为 Schwarzchild 稳定性判据。当$\nabla s\cdot\nabla p<0$ 时,流体中可以存在稳定的振荡性波动。瑞利-泰勒不稳定性全都处于完全不可压缩的极限范围。比熵 s 可表示为 $s_0+c_V\ln(p/\rho^\gamma)$,并且在不可压缩极限下 $\gamma\to+\infty$,则可以把条件$\nabla s\cdot\nabla p>0$ 化约为$\nabla\rho\cdot\nabla p<0$。这个更加普遍的条件,可以用来描述通过界面时由于总压力梯度使得流体微团发生绝热膨胀或者收缩的可能性。此时如果满足$\nabla s\cdot\nabla p>0$ 的条件,流体之间的相互渗透将导致势能的减少。朗道和栗弗席兹在他们的书中"不可压缩流体中的内部波"小节中讨论了这种不稳定性。下面探讨关于这种不稳定性的线性理论。

采取与 5.1.2 节中相同的约定,记 $s(z)$ 为流体中初始的比熵剖面,δs 是一阶偏离量,再假定初始状态下只有 p、ρ 和 s 的一阶导数不为零。线性化的熵守恒关系式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta s=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla s \tag{5.52}$$

虽然我们考虑的是可压缩介质,但为了简化数学问题,设所研究的扰动运动不涉及压缩性。由于没有能量投入纵向压缩之中,因此就有机会出现最快的增长模式。扰动流场的不可压缩可表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{5.53}$$

如同 RT 不稳定性情形那样,我们考察界面原来所在平面的运动,在界面参考系中动量方程可写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p+\frac{\nabla p}{\rho^2}\delta\rho \tag{5.54}$$

这里已以压力梯度显式地表示了界面加速参考系中的惯性力,也可等价地写出 $\boldsymbol{g}=\nabla p/\rho$。

为了求解上述方程组,采用压力和比熵作为基本的热力学变量,得

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \delta s + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \delta p \tag{5.55}$$

当 $\delta p \ll \rho c_s^2$ 时，式(5.55)右部第二项可以忽略。该条件是线性理论得以成立所必需的，而且此项并不在解中引入新的依赖关系。因此，动量方程变成为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p + \frac{\nabla p}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \delta s \tag{5.56}$$

寻求上式形如 $\exp(nt + ik_x x)$ 的解，该表达式可以表示扰动幅度的指数式增长，以及在某个垂直于 z 轴的方向上扰动的传播，以下记这个方向为 x。$\boldsymbol{u}$ 的 y 轴分量不受 x 方向动力学行为的影响，因为式(5.56)右部没有速度矢量的旋度项。如 5.1.2 节那样，下面推导关于扰动速度 w 的波动方程。把式(5.56)两边都与 ∇s 进行点乘，得出

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta s = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\delta p + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \delta s \tag{5.57}$$

上式中的时间导数用式(5.52)代入，消去公共因子，得到

$$n^2 w = -\frac{n}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\delta p - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p w \tag{5.58}$$

再用式(5.56)和式(5.53)的 x 分量消去 δp，从而有

$$\delta p = -\frac{n\rho}{k_x^2}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.59}$$

上式中 w 和 ρ 关于 z 的导数都是有限的，式(5.58)可变为

$$n^2 w = \frac{n^2}{k_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{n^2}{\rho k_x^2}\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p w \tag{5.60}$$

把上式写成波动方程的形状，即有

$$k_x^2\left(1 + \frac{\omega_s^2}{n^2}\right)w - \frac{1}{L}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \tag{5.61}$$

为方便起见，上式中已定义 $1/L = \partial\ln\rho/\partial z$，并且记

$$\omega_s^2 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \tag{5.62}$$

式(5.61)与前面所述的多种边界条件相结合，就可以概括很大范围内的各种极限情形。例如在 $L\to\infty$ 的极限下，可得到平面波解 $n^2 = -\omega_s^2\sin^2\theta$，这里 θ 为 z 轴与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角。这是在朗道和栗弗席兹的流体力学教科书中可找到的解，该解也适用于稳定的重力波。下面我们简短地推广这个解的应用，但先要指出在以 p 和 ρ 为基本热力学变量时一个有用的关系式，即

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \tag{5.63}$$

利用上式可以把关于 ω_s 的几种有用形式联系起来，即

$$\omega_s^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho c_s^2}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) = -\frac{c_s^2}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma L_p^2} - \frac{1}{L_p L}\right) = -gk_p \tag{5.64}$$

式中第三部分已假定流体为多方气体，$p/L_p=\partial p/\partial z$，$k_p=|\nabla p|/(\rho c_s^2)-(1/L)$。$L$ 和 L_p 两者可以为正或为负。可以看出，压力梯度的作用总是失稳的，从本节开始的讨论中已可感到这点，然而密度梯度必须与压力梯度方向相反，才能起到失稳作用。如果频率 ω_s 是实数，则称为 Brunt - Vaisälä 浮力频率（可参看 Tritton 的书）。

最后得出方程式(5.61)的通解为

$$\begin{aligned} w &= C_1\exp\left[\frac{z}{2L}\left(\sqrt{1+4k_x^2L^2(1-gk_p/n^2)}-1\right)\right] \\ &\quad + C_2\exp\left[\frac{-z}{2L}\left(\sqrt{1+4k_x^2L^2(1-gk_p/n^2)}+1\right)\right] \end{aligned} \tag{5.65}$$

式中 C_1、C_2 为由边界条件决定的常数。

当 $L\to\infty$ 没有压力梯度时，式(5.65)右部的两项分别与 $\exp(\pm k_x z)$ 成比例，这个特殊情形的解本应如此。如上所述，我们还需要使用边界条件求出增长率。对于 $z\to\pm\infty$（无穷远处）：$w\to 0$ 的简单情形，如果在 Atwood 数为 A_n 的界面附近，密度梯度和压力梯度都是有限的，则可得到增长率为

$$n^2 = k_x g\left(\frac{2k_xL}{1+4k_x^2L^2-A_n^2}\right)\left[k_pL-A_n^2+\sqrt{k_p^2L^2+A_n^2(1+4k_x^2L^2-2k_pL)}\right] \tag{5.66}$$

这个式子的适用范围包括了实验室或天体物理中可能遇到的大部分情况，例外的是两个常密度流体层之间的有限距离中存在扩展性密度梯度分布的情形。

习题 5.8

进行上面所述运算，推导式(5.66)，求出极限情形(a) $k_p\to 0$，$k_xL\gg 1$ 和(b) $A_n=0$，$L_p=0$ 的结果，并与本章前面的结果进行比较。

习题 5.9

利用线性理论给出两个常密度流体层之间有限距离内存在扩展性密度梯度分布情形的增长率公式。

5.4 瑞利 - 泰勒不稳定性非线性阶段的浮力 - 阻力模型

一旦单一模式的 RT 不稳定性扰动幅度约达到初始扰动波长的 10%，非线性效应就开始对增长率发生影响。初始扰动为纯正弦波的情形中，当扰动波形扭曲时，最先看到的是开始出现初始扰动设定波长的各次谐波。人们对于非线性阶段的这种发展进行了实验研究，也许与一些具体应用有关。即使如此也同线性阶段一样，此时谐波显得很重要的这种阶段仍然只是一种过渡性阶段。不稳定性渐渐地发展为十分细长的气泡和尖刺。另外，气泡和尖刺端部的开尔文 - 亥姆霍兹不稳定性过程的作用，使得这些端部变宽，直至表达界面形状的函数变成为双值函数，从图 5.1 中可看出这个演化过程。拉长的气泡和尖刺随时间增长，它们的端部变宽，这样的演化阶段可以持续相当长时间。可以设想这个阶段中界面形状的

演化机制是,气泡受浮力驱动而上升,同时在其端面受到阻力的限制,描述这种行为的模型称为**浮力-阻力模型**。下面讨论一个例子,目前有关此例的更多细节可以参看相应的文献资料(如 Oron 等和 Dimonte 的论文,以及这些论文中引用的其他资料)。

浮力-阻力模型采用如下方程描述界面的运动速度 u_i:

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}=(\rho_2-\rho_1)g-\frac{C_{\mathrm{d}}}{\lambda}\rho_2 u_{\mathrm{i}}^2 \tag{5.67}$$

式中密度 $\rho_1<\rho_2$;λ 为相当于气泡宽度的"波长"。

式(5.67)并不是一个简单的牛顿运动方程。人们关注的是气泡的演化过程,对于尖刺也可作类似的考虑。该式左部中 ρ_2 的贡献反映了这样的事实:当气泡上升,较重的流体必须向旁边移动。这个贡献也许达不到式中假定的因子 1 那样的程度。该式右部第一项给出使得气泡上升的浮力,第二项给出阻止气泡上升的阻力。对于三维的气泡,阻力系数 $C_{\mathrm{d}}=2\pi$,该项中因子 $1/\lambda$ 并不真正是波长的倒数,物理上该因子表示气泡体积(此量对其余两项也有影响)与其面积之比值,而气泡面积与其受到的阻力直接有关。

考察式(5.67)可知,气泡向上加速直至该式右部两项达到平衡为止,这样得到的气泡渐近速度为

$$u_{\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{A_{\mathrm{n}}g\lambda}{\pi(1+A_{\mathrm{n}})}} \tag{5.68}$$

式中已使用了 Atwood 数 A_{n}。气泡高度 h 的定义是气泡从原始界面的平均位置移动的距离,其速度 $u_{\mathrm{i}}=\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$。另外,可合理地假设气泡具有一种典型的形状,其特征量 $b=h/\lambda$,这就给出了用来计算 h 的方程式,即

$$h=\alpha_{\mathrm{B}}A_{\mathrm{n}}gt^2 \tag{5.69}$$

式中的参数 α_{B} 或者"α 泡"前面已经引入,在本模型中为 $[2\pi b(1+A_{\mathrm{n}})]^{-1}$。在实验或数值模拟中,人们可以通过观察不稳定结构的增长给出 α_{B} 的值,其典型值为 0.05 的 2 倍左右。给出 α_{B} 的一个确定值将涉及许多物理上的细节,这不是本书关心的问题。

初始状态未设定为特殊扰动模式的界面,其初始模式一般具有较宽的范围,前面关于 RT 不稳定性的讨论使得这类系统的某些特色更加显然。短波长不稳定模式的初始增长最为迅速,其指数增长率正比于 $\sqrt{A_{\mathrm{n}}kg}$。这种模式增长较快,而且根据式(5.68)具有较低的气泡渐近速度,因此它们首先达到自己的最终速度。当时间继续推进,较大的气泡也达到了自身的最终渐近速度,赶上并吞并了较小的气泡。这个过程称为气泡的竞争。该过程作为自相似状况,我们所能知道的是,其净效果是在气泡幅度长大的同时其特征形状保持不变。计算表明,在很宽的初始状态范围内和常加速度的情况下,气泡演变可以达到这种自相似状态。但是实验或者其他物理系统的初始状态范围也许不是很大(初始扰动的频谱不很宽),也许较长时间内停留在一种初始扰动对流场结构有明显影响的状况之中,也许其加速度并不真正守常。总之,气泡竞争的观点和式(5.69)是很有用的模型,但并不是在任何场合都可适用。

5.5 模式耦合

前面已经考察了彼此相互独立的各个 RT 不稳定性模式,甚至在非线性阶段中它们之间仍然相互无关。这种状况与 5.1.2 节中对基本方程组的数学处理是一致的:因为开始时我们就把基本方程组进行了线性化,从而蕴涵了各个模式之间相互独立的结果。线性化包含了各模式之间相互不影响的假定,因为只有非线性项才能产生模式之间相互作用的效果。我们认为,在 RT 不稳定性增长的初始阶段中非线性项很小,将其略去是完全合适的。然而当各个模式增长之后(或者它们的初始幅度较大时),现存的各个模式之间实际上会发生相互耦合,从而产生一些新模式的源项,这些新模式的波矢量是现存各模式波矢量的和或差。通过这样的非线性过程产生(或增强)某些新模式的物理现象,称为模式耦合。下面作进一步探讨。

一般观念认为,两个波的拍频(差拍)能够产生频率为原波频率之和或差的新模式,这是普通物理学中常见的内容,往往放在有关音乐的部分中讨论,只是有时强调所研究方程组中的非线性项创造了这种可能性。一般说来,形成这种模式耦合有两种途径:

一方面,这种耦合可以发生于波存在的整个体积之中,这时连续性方程和动量方程是描述整个空间内这些波相互作用的关键。音乐中谐音的产生、激光散射、电离层中无线电波的耦合以及太阳风中涨落的相互作用等,都是体积模式耦合的例子。但是这种耦合类型对于 RT 不稳定性的重要性比较有限。

另一方面,模式耦合可以发生在一个表面上,表面运动在该处的自洽性要求以及其他边界条件,都可能包含非线性项,从而引入了模式耦合。这样表面通常是(但不总是)两个性质明显不同流体区域的交界面。

先考察上述模式耦合表面的性态,再考虑体积性模式耦合的问题。连续表面上一个点的速度,取决于其在当地的时间变化以及邻近区域中向其传播运动的组合。一个运动中的表面保持自身连续性的要求可表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s) \cdot \nabla \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{u}_s \tag{5.70}$$

式中 $\boldsymbol{x}_s$ 为该表面上一点的位置矢量;$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s)$ 为表面点 $\boldsymbol{x}_s$ 处流体的粒子速度;$\boldsymbol{u}_s$ 为 $\boldsymbol{x}_s$ 处该表面点的运动速度。参考图 5.2 可知,流体粒子速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s)$ 可能明显不同于同一位置该表面点的速度 $\boldsymbol{u}_s$。

式(5.70)的关键所在是,其左部第二项为非线性项。流体粒子速度 $\boldsymbol{u}$ 包含了出现在该表面上的所有模式引起的运动,表面点的位置 $\boldsymbol{x}_s$ 也是如此。它们二者所组成的非线性项内在地引起了出现于该表面上的任意两个模式之间的耦合,从而驱动了其他新的模式。这种现象称为二阶模式耦合。说得更详细一些,$\boldsymbol{u}$ 是在运动表面点位置 $\boldsymbol{x}_s$ 处的流体粒子速度,并不对应于未受扰动的初始平坦界面上的位置,这个事实引起了全部更高阶的有限但较微弱的模式耦合,不过下面不再讨论更高阶的耦合。

下面更细致地考察该表面上的二阶模式耦合是怎样发生的,并对一个可能进行实验的

简单例子进行数学处理。假设有一个界面区分两个密度不同的均匀流体区域，不考虑黏性，初始扰动由一些小幅度模式所组成。这些模式中每一个的幅度都远大于初始时可以忽略的其他模式。至少相对应于表面位置处原子尺度大小的变动来说，这些其他模式都具有有限的初始幅度，但是在这里都已忽略不计。从某个时间 $t=0$ 开始，系统即具有不变的常加速度 g。

根据 5.2.1 节中微分方程式(5.30)得知，任何扰动模式随着朝 $\pm z$ 方向的延伸都以指数方式衰减。设定扰动速度为整个表面上起伏的和数，包括 (x,y) 平面上所有可能的波矢量 $\boldsymbol{k}_m$。研究模式耦合时，不能不假思索地采用通常的复数概念，必须先把物理变量表示为实数量。考虑到这些情况，我们把粒子速度的 z 分量写为

$$w = \sum_m w_m(t)\mathrm{e}^{-sk_m(z-z_s)}\cosh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_m) \tag{5.71}$$

式中 ϕ_m 为模式 m 的相角；指数 s 当 $z>0$ 时为 -1，$z<0$ 时为 $+1$；$w_m(t)$ 是模式 m 与时间有关的幅度；z_s 为表示表面位置的时间函数。

如果把包含 z_s 的项并入与时间有关的函数 $w_m(t)$ 之中，数学运算可能简单一些，但是直观意义较差。另外，式(5.71)的表达方式明显指出了，每个模式的性态通过 z_s 而受到所有其他模式的影响。

根据扰动流场不可压缩的假设，$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0$，可以给出沿着表面的涨落速度 $\boldsymbol{u}_\perp$ 为

$$\boldsymbol{u}_\perp = \sum_m \boldsymbol{u}_{m\perp} = \sum_m w_m(t)\mathrm{e}^{-sk_m(z-z_s)}(-\mathrm{i}s)\sinh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_m)\hat{\boldsymbol{k}}_m \tag{5.72}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{k}}_m$ 是波矢量 $\boldsymbol{k}_m$ 的单位方向矢量。

$\boldsymbol{u}_{m\perp}$ 具有这个明确的方向，然而因为双曲正弦可以改变符号，用以反映单位方向矢量的方向变化，因此与反向波矢量 $-\boldsymbol{k}_m$ 相关的模式成为多余，只需要在半空间上求和，虽然符号的记法也许显得凌乱一些。另一种方法是对所有方向求和，并认识到实验测量探测到的扰动幅度对应于求和式中任何一项幅度的 2 倍。

把表面位置 z_s 表示为同样的那些模式所作贡献之和，即

$$z_s = \sum_m z_m = \sum_m z_m(t)\cosh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_m) \tag{5.73}$$

这里只有一些模式在 $t=0$ 时具有有限的初始幅度。如果认为界面的平均初始位置位于 $z=0$，则在线性阶段中初始幅度相当小的那些模式将按照 $z_m(t) \propto \cosh(n_m t)$ 方式发生演化，这里 n_m 是不稳定性的线性增长率，因而有 $w_m(t)=n_m z_m(0)\sinh(n_m t)$。

关于扰动初始值的问题还需要进一步探讨。我们注意到初始扰动与 $\pm n_m t$ 的函数有关，虽然在 5.2.1 节中寻求扰动增长模式时已取 $n>0$，但可以看出那里建立的关于分隔两个均匀流体区域的界面微分方程组在 $n<0$ 的情形并无变化。$n<0$ 的模式随时间而衰减，因而与经过少许增长时间后的系统行为无关，但是对于初始条件来说它们可能比较重要。检查5.2.1节中的推导就可明白，该节中隐含的初始条件是在平坦的初始界面上给定的初始扰动速度。这样的初始条件在物理上是合理的，实际上也许做得到，但确实不能代表通常的情况。更为典型的初始条件是式(5.73)的情形，这里初始界面是有结构的(存在初始幅度扰动)，但初始速度为零。

在上述初始界面的定义下，用变量上方的点号表示其对时间的偏导数，推导式(5.70)中 z 分量的变化，得出

$$\sum_m [\tilde{z}_m(t) - w_m(t)]\cosh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_m) = \sum_l u_{l\perp}(t, z_s) \cdot \nabla \sum_j z_j = \sum_l \sum_j w_l(t) z_j(t)(\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j) s\sinh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_l)\sinh(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\phi_j) \tag{5.74}$$

展开双曲正弦和双曲余弦函数，式(5.74)变为

$$\sum_m [\dot{z}_m(t) - w_m(t)]\cos(\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{x} - \phi_m) = \frac{s}{2}\sum_l \sum_j k_j w_l(t) z_j(t)(\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j)\{\cos[(\boldsymbol{k}_l + \boldsymbol{k}_j) \cdot \boldsymbol{x} - (\phi_l + \phi_j)] - \cos[(\boldsymbol{k}_l - \boldsymbol{k}_j) \cdot \boldsymbol{x} - (\phi_l - \phi_j)]\} \tag{5.75}$$

需要鉴别求和式中哪些项对应于任何一个具体的模式 m。因为求和是对所有方向进行的，所以两个模式 l 和 j 的每一种可能的组合在求和式中共出现 4 次，具体说来，相加模式的波矢量 $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$ 通过包含每对正、反波矢量项的不同组合，在每个项中出现 2 次。多余的模式 $\boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)$ 同样也出现 4 次。只对两个波矢量之一求和，对任何一个多余模式的结果是引入了一个 2 的因子。这样得到

$$\dot{z}_m(t) - w_m(t) = s\sum_j k_j w_l(t) z_j(t)(\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j)\Big|_{\boldsymbol{k}_m = \boldsymbol{k}_l + \boldsymbol{k}_j; \phi_m = \phi_l + \phi_j} - s\sum_j k_j w_l(t) z_j(t)(\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j)\Big|_{\boldsymbol{k}_m = \boldsymbol{k}_l - \boldsymbol{k}_j; \phi_m = \phi_l - \phi_j} \tag{5.76}$$

这里波矢量和相位的匹配条件已由每个求和式尾部竖线的下标注明，说明了求和式中选取的是怎样的项，被选中的就是对模式 m 有贡献的项，其余的项则不进入求和式中。另外，也可以设计出使用克罗内克符号等更加复杂的表述方法。

现存模式通过拍频产生出新的模式，称前者为驱动模式，拍频模式为被驱动模式。式(5.76)中两个项得出的结果是：任何两个驱动模式产生的被驱动模式所具有的波矢量，是驱动模式波矢量的和或差。任何两个驱动模式将产生一个项，驱动一个具有更大波数的模式(如向高频端偏移的模式)，以及另一个具有较小波数的模式(如向低频端偏移的模式)。

此外，被驱动模式的相角 ϕ_m 由驱动模式的位相决定，一个具体的被驱动模式也许早已以某种幅度出现，但是它如何受到驱动模式的作用则与它们之间相位匹配的情况有关。实验中利用初始模式驱动其他模式，它们的相位都是初始时选定的，然后驱动模式的相位决定了被驱动模式的相位。更普遍的情况下(如激光聚变的靶丸)，被驱动模式的幅度开始时可能增大也可能减小，或者在驱动模式作用下其相位逐渐发生变动。因此，我们将忽略来自相对相位的任何贡献，只假定这些模式的相位是互相匹配的。指明 $\boldsymbol{k}_l$ 的变元为 z_l，把式(5.76)改写为

$$\dot{z}_m(t) - w_m(t) = s\sum_j z_j(t)[(\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j)\, w_l(t, \boldsymbol{k}_l = \boldsymbol{k}_m - \boldsymbol{k}_j) - (\hat{\boldsymbol{k}}_l \cdot \hat{\boldsymbol{k}}_j) w_l(t, \boldsymbol{k}_l = \boldsymbol{k}_j - \boldsymbol{k}_m)] \tag{5.77}$$

我们的目的只是得到关于 w_m 的二阶表达式。认识到在一阶意义下有 $w_m=\dot{z}_m$，把模式幅度展开到二阶量，给出

$$w_m(t)=\dot{z}_m(t)+s\sum_j k_j z_j(t)(\hat{\boldsymbol{k}}_l\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_j)[\dot{z}_l(t,\boldsymbol{k}_l)+\dot{z}_l(t,-\boldsymbol{k}_l)]\Big|_{\boldsymbol{k}_l=\boldsymbol{k}_m-\boldsymbol{k}_j} \tag{5.78}$$

基于前述理由得出 $z_l(\boldsymbol{k}_l)=z_l(-\boldsymbol{k}_l)$，但是把此式区分出来，用以阐明下面的一些步骤。我们将在另外的边界条件下使用这个关系式，寻找关于模式总体行为的方程式。

为了展开下一步的工作，我们必须回到基本微分方程组。对于界面两边都是常密度流体的特殊情形，连续性方程对于模式耦合没有任何贡献（如果存在密度梯度，这个结论不再正确）。在这些假定下，动量方程式成为

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\nabla p-\nabla\Psi \tag{5.79}$$

式中 Ψ 为重力势，由 $\Psi=\int\rho g\mathrm{d}z$ 给出。

注意到根据我们的假定，在界面处 Ψ 的导数是间断的。压力的初始剖面取决于初始的重力势，在动量方程中这些剖面的梯度相互抵消，因此只需要考虑 δp 和 $\delta\Psi$。利用关系式

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\frac{\rho}{2}\nabla u^2-\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$$

把对流（随体）导数展开，再把所得到式子两边取旋度。这样，若 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 初始时为零，则将永远为零。由于选定的初始条件中 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 为零，式(5.79)成为

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\nabla\delta p-\nabla\delta\Psi \tag{5.80}$$

作为题外话，我们注意到许多技术资料中采取另一种方法，充分利用旋量 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 等于零的事实，研究驻定的有结构界面的不稳定性问题。旋量在定性上对应于流体运动中旋涡出现的程度，在流体动力学湍流理论的发展中有着重要作用，5.8 节中将讨论这个问题。后面将证明在无黏性情形中旋量冻结于流体体积内部，也就是说，在无黏性极限下一定流体体积中的旋量不随时间变化，然而一个表面上的旋量并不是固定不变的。因此，若假定流体是无黏性的（即意味着其黏性系数为零），而且还是不可压缩的，则其速度场永远不会有旋量，也没有散度，这进而意味着流体的速度是某个势函数 ϕ_v 的梯度，这个势函数必定满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi_v=0$。这样的模型称为有势流动模型，这种流场可以用势函数来描述。在有势流动模型中，在目前假定下可把动量方程式(2.27)写成一个含有密度、压力梯度、速度势和重力势的方程的梯度，这样得到的方程式属于伯努利方程的一种类型，可以作为研究工作的起点。有势流动方法使人们能够采用较简单的途径进行数值模拟，但是这个方法的一个缺点是不能描述任何含有真实旋量的系统，因而无法探讨湍流发生的问题。

回过来关注式(5.80)。均匀密度的假定意味着该式的第一项不会产生模式耦合，所有模式耦合都是通过含有 u^2 的项产生的。我们再把 $\delta\Psi$ 明确写为

$$\delta\Psi=-(\rho_2-\rho_1)g\{z[H(z)-H(z-z_s)]+z_sH(z-z_s)\} \tag{5.81}$$

式中 H 是赫维赛德阶跃函数。如 5.1.2 节中那样，式(5.80)既有 z 方向的分量，又有 (x,y) 平面上的分量，可以把该式按这两个分量形式写为

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}\delta p-\frac{\partial}{\partial z}\delta\Psi \tag{5.82}$$

$$\rho\frac{\partial u_\perp}{\partial t}+\rho\ \nabla_\perp\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\ \nabla_\perp\delta p \tag{5.83}$$

式中$\nabla_\perp$表示(x,y)平面上的梯度算子。

5.1.2 节中首先的步骤是把基本方程组改写为与具体假定相对应的类型，再化约成为一个单一的微分方程式。这种方程的一般类型留作为习题请读者思考，但其结论是关于 w 的微分方程式中未保留有模式耦合的项。这就是下述论断的依据，即没有密度梯度的情形中不会存在模式的耦合。

习题 5.10

变换式(5.82)和式(5.83)，可得出两个标量微分方程式，把它们相减消去含 p 的项。试把所得的微分方程与式(5.21)进行比较并讨论。

为了进一步得到反映模式耦合行为的解，我们要做的工作类同于前面寻找越过界面的边界条件。在跨越界面的小区域中积分式(5.82)，得

$$(\delta p_2-\delta p_1)_{z_s}=(\rho_2-\rho_1)gz_s \tag{5.84}$$

应用不可压缩条件，对式(5.83)进行$\nabla_\perp$的运算，再把所得的式子在界面两边的表达式相减，即有

$$-\ \nabla_\perp^2\ (\delta p_2-\delta p_1)_{z_s}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial z}-\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)+\rho_2\ \nabla_\perp^2\left(\frac{u_2^2}{2}\right)-\rho_1\ \nabla_\perp^2\left(\frac{u_1^2}{2}\right) \tag{5.85}$$

如前所述，当两边变量都向界面趋近时，式(5.85)成为

$$-\ (\rho_2-\rho_1)g\ \nabla_\perp^2\ z_s=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial z}-\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)+\rho_2\ \nabla_\perp^2\left(\frac{u_2^2}{2}\right)-\rho_1\ \nabla_\perp^2\left(\frac{u_1^2}{2}\right) \tag{5.86}$$

不存在模式耦合时，式(5.86)给出 5.2.1 节中标准的 RT 不稳定性增长率。通过关于 w_m 的式(5.78)和式(5.86)的最后两项（从对流导数中），出现了模式耦合项（直至二阶量），得出

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{2}\ \nabla_\perp^2\ \left(\frac{u^2}{2}\right)\bigg|_m=\frac{\rho_2-\rho_1}{2}k_m^2\sum_j\ (1-\hat{\boldsymbol{k}}_l\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_j)\dot{z}_j[\dot{z}_l(t,\boldsymbol{k}_l)\ +\dot{z}_l(t,\ -\boldsymbol{k}_l)\ ]\Big|_{\boldsymbol{k}_l=\boldsymbol{k}_m-\boldsymbol{k}_j} \tag{5.87}$$

使用式(5.87)以及式(5.78)和式(5.86)，得到一个计算在界面上具有波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的模式演化方程，即

$$\begin{aligned}\ddot{z}_k-A_ngk_mz_k=-A_n\sum_j k_j[\ (\hat{\boldsymbol{k}}_l\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_j)\ z_j(t)\ [\ \ddot{z}_l(t,\boldsymbol{k}_l)\ +\ \ddot{z}_l(t,\ -\boldsymbol{k}_l)\ ]\\ +\ (1+\hat{\boldsymbol{k}}_l\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_j)\ \frac{\dot{z}_j(t)}{2}[\dot{z}_l(t,\boldsymbol{k}_l)\ +\dot{z}_l(t,\ -\boldsymbol{k}_l)\ ]\ ]_{\boldsymbol{k}_l=\boldsymbol{k}_m-\boldsymbol{k}_j}\end{aligned} \tag{5.88}$$

这里再次看到，不存在模式耦合时式(5.88)又回到了通常的 RT 不稳定性增长率情形。模式耦合的存在能够增大或减小与此相关模式的增长率，这种增减取决于式(5.88)右部的符号（也就是取决于这些模式的相对相位）。为了增大具有设定相位的模式的增长率，上式右

部必须是正的。由于求和是对所有方向进行的，如果项$(1+\hat{\boldsymbol{k}}_l\cdot\hat{\boldsymbol{k}}_j)$为 0，则对于与其相反的模式此项应为2。如果 $k_jz_jz_l/z_k\gg1$，则模式耦合项将趋于主导地位。如果驱动模式呈指数式增长，上式右部将具有正比于 $n_l^2\mathrm{e}^{(n_l+n_j)t}$和 $n_ln_j\mathrm{e}^{(n_l+n_j)t}$的项。在这种极限下，被驱动模式将近似地呈指数方式增长，其增长率约大于驱动模式增长率的 $k_jz_jz_l/z_k$ 倍。因此，模式耦合能够使得相互耦合模式的幅度快速地增长到驱动模式幅度的 kz 倍左右。

如上所述的被驱动模式，转过来又可成为驱动模式。按照这种方式，两个初始模式最后能够产生出一个很宽的模式范围，这些模式的波数组成稀疏的离散谱，可以用最初两个模式的波矢量多次加减而构造出来。实际应用中对于在 RT 不稳定界面上产生十分复杂的结构来说，模式耦合有着重要的作用。

5.6　开尔文 - 亥姆霍兹不稳定性

如同瑞利 - 泰勒不稳定性，开尔文 - 亥姆霍兹(Kelvin - Helmholtz，KH)不稳定性也是许多很不相同的物理系统中的常见现象。只要两个流体区域彼此切向流过，它们之间的共同边界(界面)处的过渡区域相当狭窄，则此边界上扰动的起伏就是不稳定的，将随时间而增长。这种过渡区中流体粒子速度的幅度变化很快，但仍保持沿着同一个方向，这样的区域称为**剪切层**。图 5.7 表示由 KH 不稳定性引起扰动发展的例子。KH 不稳定性驱动的扰动，通常可在云层、流水和沙滩上沙子的波纹中看到，也可以在地磁层中的剪切层处见到。

图 5.7　沿着云层上边沿见到的
结构是由 KH 不稳定性所引起的

整个天体物理学中有许多产生剪切层的系统，任何时候都可看到从一个天体或区域中流出的物质流经或绕流另一个天体或区域的现象。此外，RT 不稳定性中尖刺端部发展所形成的特别的蘑菇形结构，实际上是由尖刺物质与气泡物质之间剪切流动所驱动的 KH 不稳定性产生的，可参看图 4.24 表示的数值模拟结果。这种现象十分普遍，确有必要增进对这种不稳定性的理解。

5.6.1　开尔文 - 亥姆霍兹不稳定性的基本方程组

开尔文 - 亥姆霍兹不稳定性的基本方程组与瑞利 - 泰勒不稳定性情形相仿，差别在于初

始的未受扰动状态存在不为零的速度和速度梯度。如同 RT 不稳定性的情形,根据同样的原因我们将只考虑不可压缩流体的相关理论。KH 不稳定性的存在同样并不要求流体一定是可压缩的,而且可压缩性对这种不稳定行为并无多大影响,虽然本书中并不论证这个断言。

考虑图 5.8 所示的系统,假设剪切层是平面的并处于(x,y)坐标面,z 轴垂直于这个平面。再假设初始流动速度矢量为 $\boldsymbol{U}$,平行于 x 轴,在 z 轴方向存在着速度 $\boldsymbol{U}$ 和密度 ρ 的零阶梯度。如同 5.1.2 节那样,记密度和压力的一阶扰动分别为 $\delta\rho$ 和 δp,粒子速度的一阶扰动量 $\boldsymbol{u}$ 的 x、y、z 分量分别为 u、v、w。

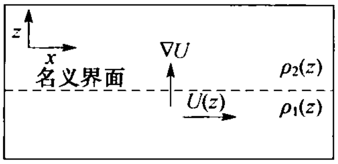


图 5.8　开尔文 - 亥姆霍兹不稳定性

计算的几何条件

流体的密度和粒子速度沿 z 轴变动,剪切层和

速度梯度可以集中于名义界面附近,也可以是扩展的。

在上述假设下,连续性方程和动量方程为

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla\delta\rho + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{5.89}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\boldsymbol{U}\cdot\nabla u + \rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla U = -\nabla\delta p - g\delta\rho\hat{z} \tag{5.90}$$

式中 $\hat{z}$ 表示 z 轴方向的单位矢量。

还有如式(5.70)所表达的重要附加条件,在保留一阶量之下成为

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{x}_s}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla\delta\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{u}_s \tag{5.91}$$

式中 $\delta\boldsymbol{x}_s$ 为界面点的即时位置相对其初始位置的位移矢量;$\boldsymbol{u}_s$ 为该点的速度矢量;$\boldsymbol{x}_s$ 和 $\boldsymbol{u}_s$ 都为一阶量。

式(5.91)表明,界面运动与流体的流动是自洽的。我们不考虑 KH 不稳定性的模式耦合问题,但是依据 RT 不稳定性的同样原因,KH 不稳定性的模式耦合也是存在的。引起模式耦合的一个具体原因在于界面必须保持连续性的要求,即如式(5.70)表示的完全非线性形式那样。

写出式(5.89)~式(5.91),依据 5.1.2 节所述理由我们略去表面张力,同样也忽略黏性,虽然这是更无道理的。黏性对于短波长 KH 不稳定性有很大作用,但是相关的数学处理变得特别艰难。尽管如此,黏性影响的一个方面仍可以用上面的方程组考虑。动量的黏性扩散使得任何初始剖面陡峭的剪切层过渡区的尺度按$\sqrt{\nu t}$的规律增大,这将对短波长 KH 不稳定性起致稳作用,被致稳的最大波长也将随时间而增长。在 5.6.3 节中将讨论扩展剪切层的影响。

把式(5.89)～式(5.91)都表示成分量形式的方程组，并写出不可压缩条件，对于寻求用于求解不稳定行为的方程组很有帮助。这样得到的方程组为

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho U\frac{\partial u}{\partial x}+\rho w\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\partial \delta p}{\partial x} \tag{5.92}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho U\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial \delta p}{\partial y} \tag{5.93}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho U\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial \delta p}{\partial z}-g\delta\rho \tag{5.94}$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+U\frac{\partial \delta\rho}{\partial x}=-w\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{5.95}$$

$$\frac{\partial \delta z_s}{\partial t}+U\frac{\partial \delta z_s}{\partial x}=w_s \tag{5.96}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5.97}$$

在线性化分析中只有式(5.91)的 z 分量式才是重要的，但应注意不像简单的 RT 不稳定性那样，这里三个方向对于 KH 不稳定性全都有关系，因为这三个方向——速度梯度方向、U 的方向和波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向都有各自独立的作用。还应指出，重力的正、负号应与系统中出现向下的加速度相一致。为了寻求随时间指数式增长，还可能具有振荡性分量的表面波，假定所有线性化的幅度都与函数 $\exp\ \mathrm{i}(k_x x+k_y y+nt)$ 成比例。这点与瑞利－泰勒不稳定性问题中的假设有所不同，KH 问题中增长的不稳定性模式应具有负虚数的 n。我们得到如下的线性化方程组：

$$\mathrm{i}\rho(n+k_xU)u+\rho w\frac{\partial U}{\partial z}=-\mathrm{i}k_x\delta p \tag{5.98}$$

$$\mathrm{i}\rho(n+k_xU)v=-\mathrm{i}k_y\delta p \tag{5.99}$$

$$\mathrm{i}\rho(n+k_xU)w=-\frac{\partial \delta p}{\partial z}-g\delta\rho \tag{5.100}$$

$$\mathrm{i}(n+k_xU)\delta\rho=-w\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{5.101}$$

$$\mathrm{i}(n+k_xU)\delta z_s=w_s \tag{5.102}$$

$$\mathrm{i}k_xu+\mathrm{i}k_yv=-\frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.103}$$

上面 6 个式子中 5 个含有项$(n+k_xU)$，均匀流动系统中这种类型的项在波谱中引入了多普勒频移，本问题中更有其附加的复杂性，即 U 随 z 而变化。对上面方程组进行简化，首先由式(5.98)、式(5.99)和式(5.103)得到

$$-\rho(n+k_xU)\frac{\partial w}{\partial z}+\rho k_xw\frac{\partial U}{\partial z}=-\mathrm{i}k^2\delta p \tag{5.104}$$

再从式(5.100)和式(5.101)得出

$$\mathrm{i}\rho(n+k_xU)w=-\frac{\partial \delta p}{\partial z}-\mathrm{i}g\frac{w}{(n+k_xU)}\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{5.105}$$

从上面两式中消去 δp，得到关于 w 的单一微分方程式，其系数都是已知的参数，即

$$-k^2\rho(n+k_xU)w+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(n+k_xU)\frac{\partial w}{\partial z}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho k_x w\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\frac{gwk^2}{(n+k_xU)}\frac{\partial\rho}{\partial z}\qquad(5.106)$$

这是关于 w 的二阶常微分方程式，看来能够求出随着远离界面而衰减的 w 解，或者由这样的一些基本解的组合，得到可以满足给定几何约束条件的解。钱德拉塞卡指出，把上式中有关 ρ 的项单独写出来很有意义，这样可得出

$$\begin{aligned}&-k^2(n+k_xU)w+\frac{\partial}{\partial z}\left[(n+k_xU)\frac{\partial w}{\partial z}-k_xw\frac{\partial U}{\partial z}\right]=\\&\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\left[\frac{gwk^2}{(n+k_xU)}-\left((n+k_xU)\frac{\partial w}{\partial z}-k_xw\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]\end{aligned}\qquad(5.107)$$

只要密度剖面的长度尺度 L 大于我们感兴趣的扰动波长，并且除重力加速度非常大之外 $(g>k_x^2U^2L)$，式(5.107)的右部总可以忽略不计。

为了得到界面扰动运动的解，必须先找到该界面上的边界条件。把式(5.98)～式(5.103)联合起来(除了式(5.102)外)，就能给出这样的边界条件：两边流体运动彼此趋近时所得到界面位置是相同的，这意味着 $w/(n+k_xU)$ 在界面处连续，即

$$\frac{w_2}{n+k_xU_2}=\frac{w_1}{n+k_xU_1}\qquad(5.108)$$

这里和下面，下标 1 和 2 表示从该下标表示的一边向界面趋近时得到的极限值，下标 s 表示界面上连续量的值。为了找到另一个边界条件，仿照 5.1.2 节中所做的运算，首先把式(5.105)进行跨越界面区域的积分，然后把式(5.104)在界面两边的值相减，从这样得到的两式中消去含有 δp 的项，最终得出如下的边界条件：

$$\begin{aligned}gk^2\left(\frac{w}{n+k_xU}\right)_s(\rho_2-\rho_1)&=\rho_2(n+k_xU_2)\frac{\partial w_2}{\partial z}-\\&-\rho_1(n+k_xU_1)\frac{\partial w_1}{\partial z}+k_x\left(-\rho_2w_2\frac{\partial U_2}{\partial z}+\rho_1w_1\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\end{aligned}\qquad(5.109)$$

至此，我们已经完成了进一步研究有意义的具体情形的准备。

5.6.2 具有陡峭变化边界的均匀流体系统

首先考虑最简单的情形，以确定 KH 不稳定性过程的最一般特性。两个各自具有均匀密度 ρ_i 和均匀初始流动速度 $\boldsymbol{U}_i$ 的流体，被一个界面分隔成为流动参数截然不同的区域，并且假定重力加速度可以忽略不计。从式(5.107)得出

$$-k^2w+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}=0\qquad(5.110)$$

上式表明，得到的解是分别与 e^{kz} 和 e^{-kz} 成比例的两项的线性组合，它们的系数应由几何边界条件确定。运用一些代数运算，就可从这样的通解中找到远离界面时扰动逐渐消失的解：

$$w=\begin{cases}A_2e^{-kz}, & z>0\\A_1e^{kz}, & z<0\end{cases}\qquad(5.111)$$

根据式(5.108)即有

$$A_2 = A_1 \frac{n + k_x U_2}{n + k_x U_1} \tag{5.112}$$

在以两个流体区域的平均速度移动的参考系中考虑问题将十分方便,因为该参考系中的速度差就是驱动 KH 不稳定性的原因,并且往往是实际应用问题中人们所了解的参数。在这种参考系中,$U_2 = \Delta U/2$,$U_1 = -\Delta U/2$,式(5.109)成为

$$\rho_2(n + k_x U_2)^2 + \rho_1(n + k_x U_1)^2 = 0 \tag{5.113}$$

解出增长率为

$$n = -k_x \frac{A_n}{2}\Delta U \pm \mathrm{i}k_x \Delta U \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)} \tag{5.114}$$

如果 $A_n \neq 0$,n 的实部不为零,此时在上述参考系中波将沿着界面传播。n 的负虚部描述指数型的增长,给出了扰动发展的特性。两个区域中流体密度相等的情形,则有非常简单的标准结果:指数增长率为 $k_x\Delta U/2$,这里因子 2 与前面 ΔU 的定义有关,是随参考系而变化的。

关于式(5.114)的结果还应注意:这种不稳定性过程没有最小波数,任何波长的扰动都是不稳定性的,直至波长趋近于系统的尺度为止,当然此时的计算也不再有效。较短波长的扰动具有较快的增长率。一方面,如果在陡峭变化界面处出现的初始起伏对应于宽带噪声,则可预期首先看到的是小尺度毛发形结构的发展,然后是较大尺度结构的演化。另一方面,人们通常见不到大尺度的扰动结构,这种结构的出现也许是由于如下原因:要么在某些特殊波长下初始起伏比较大,或者剪切层流场不能无限期地维持着陡然的变化。虽然波矢量 $\boldsymbol{k}$ 沿 $\boldsymbol{U}$ 方向的分量决定了扰动的增长率,但对于 $\boldsymbol{k}$ 的 y 分量并无任何限制。波矢量与 $\boldsymbol{U}$ 成一定角度的初始扰动仍可以自由地增长,虽然其增长速度慢于波长相同但方向平行于 $\boldsymbol{U}$ 的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 对应的初始扰动。

习题 5.11

如果认为我们感兴趣的初始扰动与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 成比例,为了使扰动随时间不是衰减而是增长,必须寻求 n 为负虚数的条件。使用复数表示方法仅仅是为了数学上的便利,物理量本身应是实数量。试说明考虑实数物理量时,寻求其正虚数或负虚数 n 的意义是什么?杰克逊的《经典电动力学》书中有一章介绍波的方法,在理解实物理量与其复数表达式的联系方面对读者也许有所帮助。

我们不改变其他假设,在系统中再引入重力,则式(5.110)~式(5.112)仍然是正确的,但是消去因子$[kw/(n+k_xU)]_s$之后,式(5.109)成为

$$-gk(\rho_2 - \rho_1) = \rho_2(n + k_x U_2)^2 + \rho_1(n + k_x U_1)^2 \tag{5.115}$$

解出增长率为

$$n = -k_x \frac{A_n}{2}\Delta U \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{k_x^2\Delta U^2\rho_1\rho_2 + gk(\rho_2^2 - \rho_1^2)}}{\rho_1 + \rho_2} \tag{5.116}$$

如果式(5.116)右部根号内的项是正的,则存在不稳定的增长解。在我们关于系统的约

定中,相对于重力加速度而言,ρ_2 是"上部"区域流体的密度。由此可见,如果上部密度 ρ_2 高于下部密度 ρ_1,则不稳定性总会出现,此时 KH 不稳定性和 RT 不稳定性一起发挥作用,形成更高的增长率。相比之下,当下部密度高于上部密度时,不稳定性的出现必须满足以下条件:

$$k > \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\Delta U^2 \rho_1 \rho_2 \cos^2\theta} \tag{5.117}$$

式中 θ 角的定义为 $\cos\theta = k_x/k$。

因此,在给定的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 之下,RT 不稳定性的动力学行为与 KH 不稳定性所引起的扰动增长相反;但若波数 k 足够大,KH 不稳定性将成为主导,从而出现正的增长率。当重力变得很大并且 $\rho_1 > \rho_2$ 时,式(5.116)中根号内的项可能变为负值,则界面处任何初始扰动持续振荡,但不会发生增长。

5.6.3 具有扩展的速度剪切层、其余区域均匀的流体系统

流体系统复杂性的下一个层次是,假设剪切层中速度不发生突然变化(任何情况下在微观层面上,这种突然变化总是非物理的)。包含剪切层的现实问题可能十分复杂,作为第一个简单问题,假定在剪切层内速度逐渐变化,在界面两边密度突然变化。与此相关的例子,如两个不可压缩流体区域的分界面上或者它们之间只是密度发生缓慢变化情形中所发生的 KH 不稳定性。发生 RT 不稳定性的界面或者弯曲冲击波的阵面,都可能属于这种类型。前面已经提及,具有运动黏性系数 ν 的系统中,剪切层的最小宽度随时间变化的规律是正比于$\sqrt{\nu t}$。

由于所考察情形中流体密度不变或者缓慢变化,可以假定式(5.107)右部很小。再设速度剖面由表达式 $U_s(1 + z/L)$ 给定,可以看出此式中包含 $\partial U/\partial z$ 的项已消去,得到的数学问题由式(5.110)、式(5.111)和式(5.112)所组成。这里的流场没有边界,L 是 U 的变化达到 U_s 所对应的特征距离。所做的假设意味着该问题的研究处于一个在 $z = -L$ 处 $U = 0$ 的惯性参考系中,并且 $U_1 = U_2 = U_s$,因此有 $w_1 = w_2 = w_s$。于是边界条件式(5.109)便成为

$$A_n g k^2 + \frac{A_n k_x U_s}{L}(n + k_x U_s) + (n + k_x U_s)^2 k = 0 \tag{5.118}$$

解出增长率为

$$n = -k_x U_s\left(1 + \frac{A_n}{2kL}\right) \pm \mathrm{i}\sqrt{A_n k g - \frac{A_n^2 k_x^2 U_s^2}{4k^2 L^2}} \tag{5.119}$$

上式中 n 具有实部,因此这些模式是振荡而且传播的。如果出现不稳定性增长,则上式根号中的项必须为正。尤其是若乘积 $A_n g$ 为零或为负,这种类型的界面总是稳定的(其两边的 U 呈连续的线性变化,但密度 ρ 是间断的)。另一种说法是,能够"察觉"到速度剪切区域范围较大的模式都是被致稳的,而本问题中的剪切区域不一定很大。下节中将看到,剪切区的两个界面无论相距远近如何,都具有致稳波长量级为边界之间距离的扰动模式的作用。相反地,若 $A_n g > 0$,只要下面不等式成立,这样的界面就是不稳定的:

$$kL > \frac{A_n U_s^2 \cos^2\theta}{4Lg} \tag{5.120}$$

这是一个很奇怪的结果，因为这种环境中剪切起到了致稳长波长模式而不是短波长模式的作用。剪切对于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 沿着 $\boldsymbol{U}$ 方向的模式起到致稳作用，对于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{U}$ 的模式则不起作用。如果 $\boldsymbol{k}$ 沿着 $\boldsymbol{U}$ 的方向，界面在某个距离 h 范围内减速，即 $g \approx U_s^2/h$，则波长 $\lambda > 8\pi L^2/(A_n h)$ 的模式是稳定的。

5.6.4　存在过渡区的均匀流体系统

陡峭界面的概念实际上是一种近似，因为分子扩散运动总可使得界面两边的物质在某种程度上相互混合，高能量密度物理问题中尤其如此，因为这里一般不存在表面张力。遗憾的是，当 U 和 ρ 两者都变化时，问题的解将变得极其复杂。这里先按照钱德拉塞卡书中的方法研究一个标准情形，至于更为真实的其他情形读者可参阅专门的文献资料，或者进行数值模拟研究。这个标准问题的几何条件如图 5.9 所示，这里密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 的两层均匀流体被一个宽度为 $2L$ 的过渡区所分隔，两个均匀流动区内粒子速度分别为 $\pm U_s$。过渡区内部速度为线性分布，$U(z) = U_s z/L$，密度为常数，$\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$。这种假定相当于通过早期的不稳定性和湍流作用，过渡区内两种流体已近似为完全混合。再以下标 1 和 2 分别表示过渡区左边和右边的区域，过渡区则以下标 0 表示。

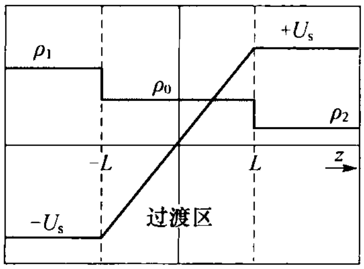


图 5.9　具有均匀密度的速度过渡区的 KH 不稳定性问题的几何情况

对上述问题进行不稳定性的基本分析，问题中包括三个不同的区域和两个界面，再次假定在 $|z|$ 很大的远处扰动趋于零。在上述各个假定条件下，式(5.107)可化约为式(5.110)，即三个区域中的流动都满足波动方程 $\partial^2 w/\partial z^2 = k^2 w$。式(5.107)右部为零，左部的其他导数项已相互抵消。上述波动方程的解可写为 $w(z) = A\mathrm{e}^{\pm kz}$，其系数的选择应使得 w 在远处区域中恰当地趋于零，从而得出

$$w = \begin{cases} A_2 \mathrm{e}^{-kz}, & z > L \\ A_0 \mathrm{e}^{-kz} + B_0 \mathrm{e}^{kz}, & -L < z < L \\ B_1 \mathrm{e}^{kz}, & z < -L \end{cases} \tag{5.121}$$

这样，解中出现四个待定的幅度常数。第一个边界条件式(5.108)说明，$w(z)$ 必须在两个界面处连续，因为按假定 $U(z)$ 在界面处是连续的。这样给出了下面两个式子：

$$A_0 \mathrm{e}^2 + B_0 - B_1 = 0 \tag{5.122}$$

$$A_0 + B_0 \mathrm{e}^2 - A_2 = 0 \tag{5.123}$$

把第二个边界条件式(5.109)应用于各个界面处，得到其余两个式子：

$$B_1 e^{-kL}\left[\frac{gk^2(\rho_1-\rho_0)}{n-k_xU_s}-k\rho_1(n-k_xU_s)\right]+\rho_0B_0e^{-kL}\left[nk-\left(k+\frac{1}{L}\right)k_xU_s\right]-$$
$$\rho_0A_0e^{kL}\left[nk-\left(k-\frac{1}{L}\right)k_xU_s\right]=0 \tag{5.124}$$

$$A_2 e^{-kL}\left[\frac{gk^2(\rho_0-\rho_2)}{n+k_xU_s}-k\rho_2(n+k_xU_s)\right]-\rho_0B_0e^{kL}\left[nk+\left(k-\frac{1}{L}\right)k_xU_s\right]+$$
$$\rho_0A_0e^{-kL}\left[nk+\left(k+\frac{1}{L}\right)k_xU_s\right]=0 \tag{5.125}$$

如前一样，代数方程组(5.122)～式(5.125)可以表示为一个矩阵和系数矢量(B_1、A_0、B_0、A_2)乘积的形式，该矩阵的行列式等于零即给出所求的色散关系，这是一个 n 的四次代数方程式。

把这个代数方程组中某些量自然组合起来，可以简化所得到的表达式。令 $\eta=kL,\nu_g=n/(k_xU_s)$，$\beta=(\rho_1-\rho_2)/\rho_0$，再定义 Richardson 数 J_r 为浮力与惯性力的比值，即

$$J_r=\frac{gk\eta\beta}{2k_x^2U_s^2} \tag{5.126}$$

关于 Richardson 数的深入讨论，可参阅钱德拉塞卡的书。定义了上述记号，并且只考虑 $k=k_x$ 的模式，色散关系成为一个关于归一化增长率 ν_g 的四次代数方程式：

$$\nu_g^4\left[4\eta^2e^{4\eta}+\frac{\beta^2\eta^2}{4}(1-e^{4\eta})\right]+\nu_g^3\beta\eta(1-e^{4\eta})+$$
$$\nu_g^2\left[(1-e^{4\eta})\left(1-\frac{\beta^2\eta^2}{2}\right)+4\eta e^{4\eta}(1-Jr-2\eta)\right]-$$
$$\nu_g[\beta\eta(1-e^{4\eta})(1+2Jr)]-2Jr(1-e^{4\eta}+2\eta e^{4\eta})+$$
$$(1-e^{4\eta})\left[\frac{\beta^2\eta^2}{4}-1-J_r^2\right]+4e^{4\eta}(\eta^2-\eta)=0 \tag{5.127}$$

依靠计算机数学程序计算，容易得到上式的数值解，其中只有一个根具有可能变为负值的虚部，对应于我们定义的不稳定性模式。十分幸运的是，这个增长率基本上与 β 无关。当 $|\beta|$ 增大，此根出现有限的实部，表示当流体之间密度差较大时该增长解将发生振荡。假定 β 很小，该增长率可以从式(5.127)较准确地得到，此时式(5.127)可以简化为 ν_g^2 的二次代数方程式，在以 $\eta(\approx kL)$ 和 Jr(浮力)为坐标轴的平面上可画出增长率 ν_g 的等值线图，如图 5.10 所示。

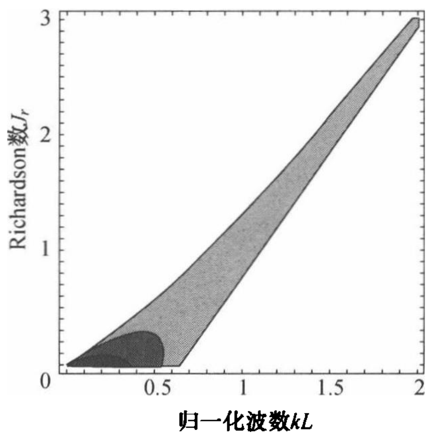


图 5.10　具有线性速度分布剪切流和密度转变层界面上的开尔文－亥姆霍兹不稳定性增长率

从里到外的增长率 ν_g 等值线(以 k_xU_s 为单位)依次为 −0.3、−0.1 和 0。在 $\nu_g=0$ 等值线以外区域中表面扰动衰减。

图 5.10 支持一些实验观察到的事实。首先，如果不存在重力从而也没有浮力，则在 $kL\approx0.65$ 的最大值以下，KH 不稳定性总是不稳的，这种短波长截止效应

是速度梯度产生的作用，也就是说波长短于约 $10L$ 的扰动模式是致稳的。在任何给定系统的演化中，L 随时间近似以 $\sqrt{\nu t}$ 方式增大，因此当波长逐渐增长时 L 可能增长得更快，致使 KH 不稳定性停止增长。

其次在存在重力的情况下，新假设带来了在没有速度剪切的系统中未曾出现的一个另外的特性。存在陡峭界面和重力时，得到式(5.117)，大致表明 $kL > Jr$ 时不稳定性增长。这个条件对应于图 5.10 中的左边界，并确定了不稳定模式的最长波长。图 5.10 中的右边界即是存在可致稳最短波长模式的速度梯度而带来的新特性。正是有限的速度剪切区的作用，使得速度变化显得很陡陏的长波长模式成为不稳定的。浮力与剪切的组合作用可以导致不稳定模式的波长范围变得很狭窄。

习题 5.12

假设 β 相当小，以至于式(5.127)中含有 β 的项可以忽略不计。试确定图5.10 中左、右两条边界是否会相交，从而完全排除发生不稳定的可能性。

最后，把上面两个计算结果进行比较颇有意义。一方面在速度梯度为空间展延、密度只在界面处陡变的情形，仅当存在重力而且该界面发生 RT 不稳定性时（根据以前的定义，即有 $A_n > 0$），KH 不稳定性才能够发生。实际上，速度梯度用以致稳通常描述为 KH 不稳定性模式的所有模式。当仅在过渡层中存在剪切的情形，无论是否存在重力，也无论密度梯度在哪个方向，总会出现不稳定性，但只发生在大于速度剖面长度尺度若干倍的一个波长范围内。另外，剪切对于 RT 不稳定性模式有致稳作用，并产生一个类似于 5.6.2 节中见到的长波极限。

5.7　冲击波稳定性和里希特迈耶 – 缅希柯夫不稳定性

前面考察的两种不稳定性都是在流体系统处于某种持久的状态下发展的。RT 不稳定性需要持续的加速度，KH 不稳定性依赖于持续的剪切，这两种情况下甚至当真实流体为可压缩时，采用不可压缩流体模型仍然可以给出与所观察现象一致的良好的概念性模型。虽然如此，在第 4 章中已经明白，真实的高能量密度系统差不多总要涉及冲击波、稀疏波和界面等一些因素的组合，导致这类系统的结构对于这些现象的稳定性质非常敏感，这就是本节论述的动机。可压缩性的引入，将使得数学问题变得极为复杂。另外，本书编写时人们对于这些现象的理解还只是反映在技术文献资料中。因此，与本书其他章节比较，本节的讨论更多是定性性质的。

5.7.1　冲击波稳定性

首先考察一个具有横向结构的冲击波会发生什么现象？我们把这样的冲击波描述为波纹形状的，并假设波纹幅度（沿 z 方向）正比于 $\cos(kx)$。这种波纹结构是二维的，并与坐标 y 无关。更复杂的结构通常可处理为许多这样的直纹二维波形之和。还要假设波纹的波长相当长，以至于可以用 4.1.5 节中关于斜冲击波的分析工具来研究其作用。用波纹形的活

塞推动流体，或者让平面冲击波与波纹形界面相互作用，就可以得到波纹形冲击波。这里只关心冲击波，后面再考虑界面。再假设波纹的初始幅度为小量 a_0，满足 $a_0k \ll 1$，并且冲击波很强，数学处理可以简化。

图5.11说明经过波纹形冲击波后流动的折转，这里来流沿着 $-z$ 方向趋于冲击波，波阵面的 z 坐标位置由 $a = a_0\cos(kx)$ 给定。通过冲击波后，流动偏离冲击波阵面的法线方向，图中冲击波阵面法线方向由紧接着的箭头表示。流线的折转带来三个后果：首先，物质流动转向波阵面的落后段落，图中下方的箭头表示流动速度水平分量的方向；其次，在已受冲击的物质中产生声波；第三，冲击转变受到折射角随位置而改变的影响。下面依次讨论这些问题。

图5.11中展示了冲击波阵面的法向矢量，在 a_0k 为一阶小量的意义下该矢量可写为

$$\boldsymbol{n} = -\hat{x}(a_0k)\sin(kx) - \hat{z} \tag{5.128}$$

流线的折转角为

$$\tan\phi_1 \approx \phi_1 = (a_0k)\sin(kx) \tag{5.129}$$

根据上式，在小角度假定下可得到波后流线偏离 $-z$ 方向的偏转角 $\psi = \phi_1(\rho_2/\rho_1 - 1)$，即有 $\psi = 2\phi_1/(\gamma - 1)$。4.1.5节中已经指出，流动速度平行于波阵面的当地横向分量经过冲击波后不变化，而其当地法向分量经过冲击波后幅值降低。

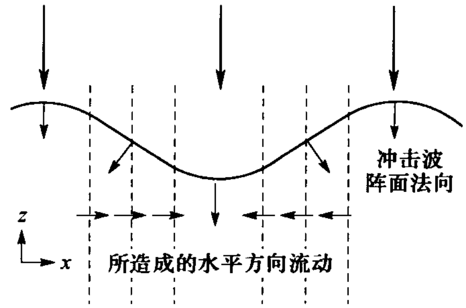


图5.11　通过波纹形冲击波后产生水平方向流动的示意图

习题5.13

分析小幅度波纹形冲击波的跳跃条件，证明由于波纹引起的粒子速度 z 分量相对于平面冲击波情形的差别是波纹幅度的二阶小量。这个工作是下面式(5.130)的推广。

在以 a_0k 为一阶小量的意义下，紧接冲击波后的流体粒子速度可近似写为

$$\boldsymbol{u}_2 = \hat{x}u_s(a_0k)\sin(kx) - \hat{z}u_s\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) \tag{5.130}$$

式中 u_s 为实验室参考系中的冲击波速度；$\boldsymbol{u}_2$ 为冲击波参考系中的波后粒子速度，其横向(x 方向)分量 u_{2x} 正比于 $a_0k\sin(kx)$，在图5.11中用水平方向的小箭头表示。

利用下面方法，可以简单估算这种横向流动的影响。采用过于简单的假设，认为冲击波阵面的形状始终是正弦形的，当物质发生横向流动时，阵面波纹幅度减小。在 $a(x)$ 为最小(记为 $z_{\min}$)的每一边，从波阵面领先段落向落后段落的每单位长度、单位密度的质量流动率，近似为波的幅度与波阵面平均位置处横向速度分量的乘积，也就是 $a_0u_s(a_0k)$，其单位量纲是面积/时间。在 $z_{\min}$ 至 $z=0$ 之间的半个冲击波阵面落后段落范围内，每单位长度、单位密度的质量为 a_0/k，具有面积的单位。如果这种质量流动是唯一需要考虑的因素，则波纹幅度随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t} = -(a_0k)^2u_s \tag{5.131}$$

若初始幅度为 a_{00},从上式可解出

$$\frac{a_0}{a_{00}} = \frac{1}{1+(a_{00}k)(ku_s t)} \tag{5.132}$$

这个解对应于冲击波阵面波纹幅度的定态衰减,其时间尺度由冲击波传播所通过的波纹波长个数给定。这种衰减十分迅速,在冲击波刚走过若干个波纹波长距离之前,其波纹幅度已大大减小。这个结果的趋势(波纹衰减)是正确的,但有两点错误——冲击波的衰减规律是 $1/t^{3/2}$ 而不是 $1/t$;而且衰减之中还应发生振荡。这两个后果都是上面提到的二阶小量所造成的,将在下面讨论。

考察图 5.11 和图 5.12 中的水平箭头,就会注意到它们对应于驻定的声波。在下游物质流动远离冲击波的过程中,直至横向流动相向停滞之前,这种水平流动始终在压缩其前方的物质,在停滞之后被压缩的流体发生反弹。当物质流动离开冲击波时发生一连串横向的滞止,并持续在横向左、右晃动。因此,虽然任何冲击波都是声波的源,但波纹形冲击波发出的声波具有一定结构的辐射图式。流动产生的第一个压力最大点位于图 5.12 所示冲击波阵面落后段落的下方。由于冲击波形状变得平坦,将会导致向上的压力梯度,从而更提高了冲击波展平的速率,同时还会引起冲击波阵面运动的过冲和来回振荡。

如果这种压力最大点的相位关系与冲击波展平运动的相位失配,则可见到冲击波发生永久的振荡。但是在声波的 1/4 周期($\lambda/4c_s$,这里 λ 是波纹的波长)时形成压力最大值。仅仅依靠横向流动,冲击波展平得不会这么快,声波造成的压力梯度作用提高了冲击波展平的速度,但也削弱了已变得较平坦的冲击波继续展平的速度。压力梯度引起冲击波阵面的过冲,但并不是全部初始幅度都是如此。提出这个现象的数学模型十分困难,图 5.13 展示了一个数值模拟结果,表示幅度 $a_0=0.01\lambda$ 的波纹形冲击波的衰减。

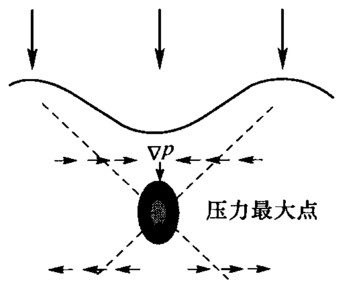


图 5.12　波纹形冲击波后的横向流动引起位于冲击波下游的压力最大点

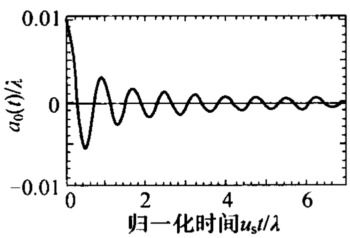


图 5.13　波纹形冲击波的衰减
此图引自 Ishizaki 等人的论文
(Phys. Rev. E. Vol. 53, R5592, 1996)。

上面提到的第三个后果是冲击波性质因波纹而发生变化。在任何位置处,已受冲击的物质总是朝向未受冲击物质的状态转变,但在某种程度上也改变了其相邻物质微元的状态,使其如同受了冲击那样。对于普通物质和多方气体来说,这种效应很微小,但对于很不正常的物质,这种效应可能使得冲击波成为不稳定的。朗道和栗弗席兹的书中讨论了冲击波呈现不稳定性的必要条件。

下面做一个定性的小结。冲击波通常是稳定的,如果其阵面成为波纹形的,在传播过程

中这些波纹会逐渐展平,同时冲击波阵面出现振荡(有时称此为超稳定行为)。冲击波传播中这些波纹逐渐消失。

5.7.2 冲击波与波纹形界面的相互作用

高能量密度实验中,人们常常关心冲击波与界面的相互作用以及这些相互作用导致的波系结构。本节首先考察冲击波与波纹形界面相互作用造成的波系结构。作为物理建模,假定4.4节中关于斜冲击波的分析对于波纹面上一个个点来说可以适用。但是这样得到的结果将更加普遍,因为它们主要与问题中各种波的相对速度有关。在我们感兴趣的界面两边,流体的密度可以是增大的,也可以是减小的。

图5.14表示当波纹形界面处密度为上升时通常会发生的现象。我们预先指出,此时将会出现第4章中讨论过的透射冲击波和反射冲击波。当冲击波越过界面时,反射冲击波将以快于入射冲击波的速度反向传播,导致反射波波纹的位相与界面波纹相同,同时该反射波的初始波纹幅度大于界面波纹的幅度,它们的比值和反射冲击波速度与界面速度的比值相等。对于具有通常物态方程的任何物质,经过冲击波后界面的速度和透射冲击波的速度都低于初始入射冲击波的速度。

通过上面讨论得到的一个初步结论是,这些冲击波阵面出现的波纹与界面波纹的位相是匹配的。第二个结论是,这些波纹扰动的幅度随时间而下降,在本问题中该幅度同冲击波后的界面速度与入射冲击波速度比值成比例。透射冲击波的速度通常略大于界面的速度,因此透射冲击波的初始扰动幅度也略大于界面初始的波纹幅度,而且衰减很快。

冲击波到达密度下降的波纹形界面处发生的响应有所不同,图5.15说明了这种情形。我们假定冲击波入射界面之后将产生透射冲击波并反射稀疏波,4.4.1节中特殊的例外是简单明了的,不去考虑这种由于非常少见的物态方程所导致的其他情况。反射稀疏波的传播速度也快于入射冲击波(虽然快得不多),这是因为该速度是受入射冲击波压缩物质的声速。因此,反射稀疏波的波纹依然与界面波纹同相。Vlikovich 和 Phillips 证明这样的反射稀疏波是弱不稳定的,其尾沿(靠近界面的部分)的扰动幅度随时间线性增长。存在着驻定但衰减的声波,即向下游流场发射的以及在中心稀疏波区中朝着界面传播的声波。

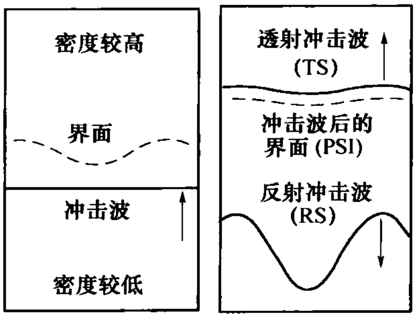


图5.14 冲击波通过密度增大的波纹形界面时的行为

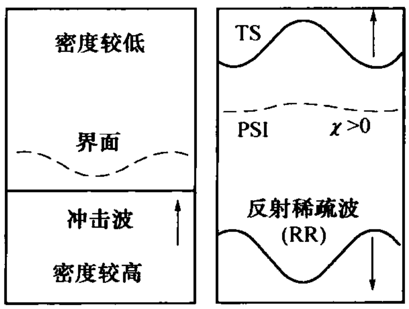


图5.15 冲击波通过密度下降的波纹形界面时的行为

相比之下，透射冲击波的速度差不多总是快于入射冲击波，通常导致其波纹与界面波纹反相，相当于4.4.6 节图 4.29 中 $\alpha>0$ 的情况。但是冲击波经过之后界面的行为，与波后该界面速度是大于还是小于入射冲击波速度的情况有关。$\chi>0$ 对应于波后界面速度较大的情形，如果密度比相当大，强冲击波状态下将发生这种情形。如果密度比很小并且与物态方程有关，最终变为 $\chi<0$ 的状况，则冲击波经过之后界面的相位不会翻转。

对于可以从侧面（即从本书纸面上方）观察波传播行为的实验来说，从上述稀疏流波的动力学行为可以得出有意义的结果。这种实验通常使用 X 射线诊断设备，采用被界面一边的实验物质吸收的适当波长。使用这种方法诊断下游流场，如果沿着 X 射线方向任何视线上物质的面密度（质量/面积）增高，则信号强度呈指数下降。因此，这种诊断对于稀疏波头部附近的高能量密度物质十分灵敏（如果 X 射线透过率较高），或者对于界面附近密度较低的物质十分灵敏（如果探测 X 射线被强烈吸收）。由此可见，当密度比很大时（因而 $\chi>0$），诊断技术所探测的波系结构可能与界面初始扰动同相或异相，也可能图像中的位相关系是变化的。

5.7.3　冲击波经过后界面的演化——里希特迈耶－缅希柯夫不稳定性

至此我们已经了解到对冲击波的扰动一般是衰减的，所以由界面引入的扰动也将随时间而消亡。同时还看到稀疏波头部是稳定的，因而由界面引入的扰动不会进一步增长。理解上述系统时尚未回答的问题是，经过冲击波之后界面将如何演化。冲击波通过之后界面上的结构随时间而增长，从图 5.16 容易看出增长的原因。该图中心是界面初始扰动的凹陷部分，根据上节的讨论可清楚地知道冲击波越过波纹形界面时的行为：反射冲击波使流动折转偏离这个凹部，同时透射冲击波使流动转向这个凹部。冲击波越过界面时，波后粒子速度变慢，引起流动偏离界面法线或者朝向凹部折转。这对应于 4.4.6 节分析中 $\alpha<0$ 的情形。由此可见，冲击波后的物质流动将使界面初始扰动的凹谷加深、凸峰增高。

这个变化过程称为里希特迈耶－缅希柯夫（Richtmyer－Meshkov，RM）不稳定性。这种不稳定性用提出者姓氏缩写词“RM”表示，已在技术资料中广泛采用，但是本书作者总觉得有些问题。因为本书关于不稳定性的定义是“某物理量幅度的增长率随时间增大的过程”，方程 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=\gamma f$ 就是一个典型例子，这里 γ 是量 f 的（指数）增长率。如此定义的不稳定性内在地含有某种反馈机制。例如，瑞利－泰勒不稳定性的反馈机制是，两种流体不断加剧的相互渗透所造成的净浮力。按照这种定义，RM 过程就不是一种不稳定性。RM 过程可以符合一种较弱的不稳定性定义，即“某物理量的幅度随时间增大的过程”。然而，许多并不被认为是不稳定性的过程或现象，也可能满足这个弱定义。我们讨论的要点在于：与本书中被认为是不稳定性的其他过程不同，寻找 RM 不稳定性增长率增高的反馈机制是徒劳的。

还有一个与 RM 过程有关的更深层的概念性困难。人们经常把 RM 不稳定性描述为 RT 不稳定性在脉冲加载下的极限，也就是当系统加速度随时间的变化趋近于 δ 函数时即对应于出现冲击波。这种观点起源于 1960 年 Richtmyer 的原始论文，但是他和其他研究者当时已认识到这种看法存在的问题。冲击波通过之后界面结构发生演化，但并不是加速过程中发生增长的极限状况。相应地，人们也不能通过对 RT 不稳定性理论取极限而得到 RM 不稳定性的理论。另外，如 Velikovich 在 1996 年所述，至少在原理上人们能够在一个具有

两个稀疏波而且界面没有初始加速度的系统中，产生 RM 不稳定性。

且不同论上述历史上的看法，关于 RM 不稳定性过程最好的直观认识，是把它想象为在冲击波所创造的初始状态之后发展起来的流动。对于图 5.16 的情形，使用上述直觉观念和 4.4.6 节中的分析方法，构造出一个关于初始扰动增长的半定量描述，详见下述。

图 5.16 所示四个区从底部到顶部分别对应于 4.4.6 节图 4.29 的(a)、(R)、(d)和(c)区。在小角度极限下，式(4.127)和式(4.130)分别给出

$$\chi = \frac{2\alpha - (\gamma - 1)\beta}{\gamma + 1} \tag{5.133}$$

$$\chi = \frac{2\eta(\gamma + 1) - \beta(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)^2} \tag{5.134}$$

式中 β 为初始冲击波阵面法线与当地界面法线之间的夹角。

令冲击波后两个区域(d 和 R)中的压力相等，在小角度极限下即有

$$\frac{\rho_c}{\rho_b}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{\eta}{\beta}\right)^2 \tag{5.135}$$

式(5.133) ~ 式(5.135)可以把 α、η 和 χ 对于 β 的比值，解为 γ 以及界面处密度比 ρ_c/ρ_b 的函数。我们指出，根据式(5.128)的几何关系，β 很小时可以得到 $\beta = (a_0k)\sin(kx)$。对于任何给定的 γ 值，上述三式的解最终可以画成如图 5.17 所示的图线。

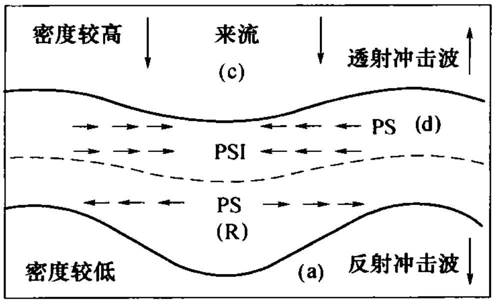


图 5.16 冲击波与密度增大的波纹形界面相互作用之后粒子速度的横向分量

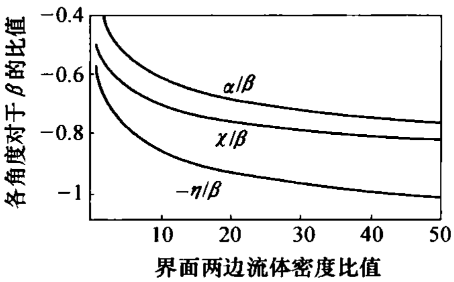


图 5.17 冲击波后流线折转角与密度增大的斜界面(如强冲击波界面)两边流体密度比值的关系(透射冲击波、界面和反射冲击波的角度分别为 α、χ 和 η。η 的定义与 4.4.6 节中方向相反)

习题 5.14

求解式(5.133) ~ 式(5.135)，得到 α、η 和 χ 对于 β 的比值。把所得结果画成以不同 γ 值为参数的曲线图，并进行讨论。

当把参考系变换回到实验室标架，式(4.125)和式(4.128)给出以速度矢量 $\boldsymbol{u}_{\text{dlab}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\text{Rlab}}$ 的 x 分量所表示的流动的横向偏离。在小角度极限下，这两个速度矢量可分别写为

$$\boldsymbol{u}_{\text{dlab}} = \frac{-2\beta}{(\gamma + 1)}u_s\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\hat{x} + \frac{2}{(\gamma + 1)}u_s\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\hat{y} \tag{5.136}$$

$$\boldsymbol{u}_{\text{Rlab}} = \frac{2\beta}{(\gamma+1)^2}u_s\left[\frac{\eta}{\beta}\left((\gamma-1)+\frac{\eta}{\beta}(\gamma+1)\right)\right]\hat{x}+\frac{u_s}{(\gamma+1)^2}\left(4\gamma-2\frac{\eta}{\beta}(\gamma+1)\right)\hat{y} \tag{5.137}$$

把式(5.133)~式(5.135)的解代入式(5.136)和式(5.137),就可得到由冲击波引起的速度偏离量。对于任何给定的密度比 ρ_c/ρ_b,可以如图 5.18 所示画出速度横向偏离量与距离的函数关系曲线。

回到图 5.16,可以看到界面性态与冲击波阵面性态之间有着重大差别,界面两边的流动起着增大(而不是减小)扰动幅度的作用。我们可以进行一个类似于对波纹形冲击波所做的近似计算,估算波纹的幅度将如何快速增大。这里的一个重要差别在于,横向速度分量是由初始扰动幅度所给定的,除了受到冲击波发射的声波的影响外(这种因素这里不作考虑),当波纹变化时该速度分量不再变动。反射冲击波产生的横向速度分量趋向于前面所述的两个量之中的较大者,所以可认为是对于流动的响应,把它记为 u_{perp}。取 $\eta/\beta\approx0.9$ 为典型值,并记小角度下 $\beta=a_{00}k$,就可得出

$$u_\perp \approx \frac{3.4\gamma}{(\gamma+1)^2}(a_{00}k)u_s \tag{5.138}$$

物质从两边向内的流动可使波纹全幅度($2a_0$)相应增大,根据这样的观点,估算波纹幅度的增长率为

$$\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t} = \frac{3.4\gamma}{(\gamma+1)^2}ku_s a_{00} \tag{5.139}$$

上述估算关键的定性特点是,界面波纹幅度随时间线性增大,而且增长率与初始归一化幅度 $a_{00}k$ 成正比。在有关技术资料报道的更成熟的估算中,仍然有着上述特点,如被广泛应用的由 Richtmyer 给出的公式为

$$\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t} = kA^* u_{ps}a_{ps} \tag{5.140}$$

式中 u_{ps} 为实验室参考系中经过冲击波后的界面速度;a_{ps} 为经过冲击波后界面的波纹幅度;A^* 为冲击波经过后界面处的 Atwood 数。

至今尚未有完全普遍适用的这类公式,人们已经鉴别出式(5.140)不能适用的一些情形。

上面已经论述,可把 RM 不稳定性增长看作冲击波引起的横向速度所造成的后果。考察这种增长的另一种方法是采用冲击波产生涡量的概念。流体力学中涡量的定义是 $\nabla\times\boldsymbol{u}$,冲击波后初始的均匀流场中没有涡量,但是当冲击波通过波纹形界面时会产生涡量。冲击波产生的涡管经过具有二维结构的界面时,会改变方向。涡量对应于有旋流动,没有耗散时涡量守恒。因此,另一种考察界面波纹幅度增长的方法是,与涡管反方向的旋转将把流体汇集到波纹的最大处。

我们回到冲击波经过密度下降的波纹形界面时的动力学行为问题。根据 4.4.6 节中关于稀疏波的公式,就可以用类似方法对该问题进行分析。图 5.19 说明密度下降相当大的情形中($\chi>0$),这种动力学行为的定性特点。从图中可以看出,界面的波纹幅度依然随时间增大,其定性行为相同于前面的情形(图 5.16)。较小波纹的幅度随时间线性增长,其增长

率正比于归一化的初始幅度和冲击波速度。用涡量的术语来说，冲击波在界面的两边都沉积了涡量，在这之后透射冲击波继续在新近被冲击压缩的流体中沉积涡量。相反地，稀疏波并不在其作用过的流体中沉积增加的涡量。

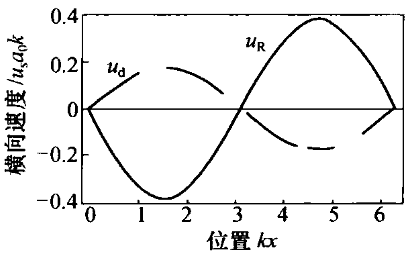


图 5.18　冲击波经过密度增大界面所产生的横向流动速度

此时界面处产生剪切流。

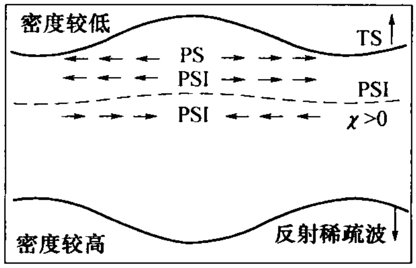


图 5.19　冲击波与密度下降的波纹形界面相互作用之后粒子速度的横向分量

（图中 PSI 和 PS 分别表示冲击波经过后的界面和流场）

如果界面两边密度下降较小，使得 $\chi<0$，则冲击波刚通过时界面仍保持初始波纹的位相，但在波纹还未增长到较大程度之前，流动就已引起界面位相的翻转。对于这种情形，Meyer 和 Blewett 给出一个与 a_{00} 和 a_{ps} 的平均值有关的标准理论估算公式

$$\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t}=kA^* u_{ps}\frac{a_{ps}+a_{00}}{2} \tag{5.141}$$

应当注意该式中 $A^*<0$。

习题 5.15

试推导估算小角度极限下冲击波通过密度下降的斜界面时相互作用的公式，并对此情形画出类似于图 5.19 的图线。

习题 5.16

考察存在稀疏波但 $\chi<0$ 情形中冲击波经过之后界面的行为，对此情形画出类似于图 5.19 的图线并讨论界面的演化情况。

在关于 RM 不稳定性过程更完备的理论处理中，界面扰动幅度的增长可以表示为冲击波在界面附近产生的声波的后果，透射和反射冲击波对这种声波作用也有贡献。但是在反射稀疏波的情形，不会产生影响界面扰动增长的声波。

5.8　流体动力学湍流

我们经常见到被称为湍流的现象。当两个看得见的很不相同流体互相混合时（如云与空气或奶油与咖啡等），这种图景尤为逼真。但是单个流体中的流动在某种意义下也能变为湍流，如同飞机机翼后面或者竞速汽车后面见到的气流图像。湍流有几种可能的定义，而且在等离子体物理或者流体动力学的不同领域中，这个名词有着明显不同的含义。当我们查阅范围

广泛的文献资料时,对该术语的含义应有所辨识。湍流的一种相当普遍的定义是:“空间尺度处于一定范围的流动结构的出现,该范围内的空间尺度均小于提供能源以产生这些结构的运动的空间尺度。”该定义也许不能使得十分坚持流体动力学观点的人感到满意,他们认为一个要进入湍流状态的流体系统本应先演化到一种与其初始情况无关的状态。至于这样的状态实际上能否实现,人们还未弄清楚。这里不再纠缠关于湍流的定义,而是转向考察可以导致小空间尺度范围上结构出现的流体动力学系统性质。Tennekes 和 Lumley 的书对流体动力学湍流作了介绍,他们强调湍流是流体流动的一种性质,而不是被研究流体自身的性质。

在对湍流作定义性描述后面的基本观念是,能量需经过某个过程引入流体系统之中,例如,RT 和 KH 不稳定性能够引发一些产生非常小尺度脉动的过程,这些脉动由于黏性耗散最终丧失其能量。由于一旦生成的涡量依靠黏性扩散而散布,而且只能通过黏性加热而移动,流体运动的旋涡图式通常是湍流系统的表征。事实上,在某个空间尺度范围上涡量变动图案的出现,可认为是流体动力学湍流流动的一个本质属性。

湍流流动的一个简单例子是图 5.20 所示的射流,图(b)的雷诺数 Re 比图(a)的大。在所有类似的情形中,射流首先引起 KH 不稳定性,建立起后续不稳定性和较小尺度流动结构发展的阶段。低雷诺数 Re 之下,流动仍然由大尺度结构为主导。当 Re 增大时,流动中更精细的结构得到发展,而且它们的分布变得更加均匀。

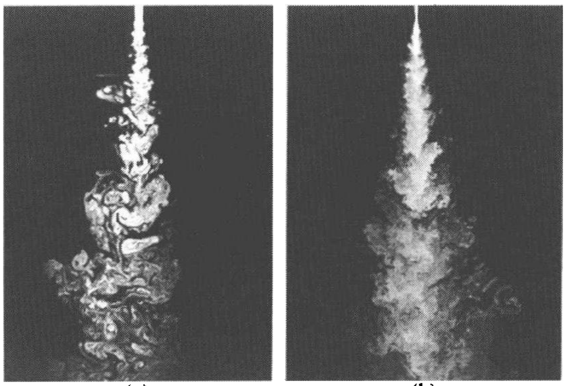


图 5.20　激光束照明之下液体中湍流圆射流的断面图像(引自 Dimotakis,2005)

(a) $Re \approx 2500$;(b) $Re \approx 10000$。

湍流通常是大雷诺数流动的一种性质,初看起来这似乎有些自相矛盾。在第 2 章中已经知道 Re 是对流动量输运与黏性动量输运的比值,并可论证在高能量密度流动中 Re 几乎总是很大的,因此一般说来欧拉方程组可作为很好的分析基础。然而更深入说来,这个论证工作仅仅针对空间尺度不是太小的现象。人们可以根据问题中任何特征长度和特征速度构造流动的雷诺数,使得系统的不同方面具有不同的雷诺数。如果只关注足够小的空间尺度,相应的现象确实经受着强烈的耗散,不能用欧拉方程组描述。这就是湍流流动有可能耗散能量的原因。

在进一步讨论不可压缩的流体动力学湍流之前,先考察湍流动力学如何应用于等离子体系统。在碰撞甚为重要的等离子体中,流体运动服从流体动力学规律,碰撞阻尼是能量耗

散的主要机制。但是当等离子体变成低碰撞的,集体效应开始出现,等离子体中可压缩性脉动开始产生显著的电场。这些电场加速粒子,形成了明显不同于黏性作用的能量耗散机制。在编写本书时,人们尚未充分理解各种耗散机制之间的竞争状况。与纯粹的流体动力学流体比较而言,这种竞争可能改变等离子体中湍流的结构。

回到湍流流动由被称为**涡量**的旋转运动所主导的观点,利用(过分简单的)转动环圈模型,可以把这种流动进行理想化处理。这些面包圈形状的结构绕着自己的轴转动,可以具有任意的长宽比,其结构形状可以是很细的或较粗的环及细长形或接近圆柱形。旋转是最重要的,这是$\nabla\times\boldsymbol{u}$不为零从而存在涡量的根源。这种涡量的尺度分布在一个范围内,但可能的最小涡旋是在大约一个旋转之中就被黏性阻尼了的涡旋。若用w表示旋转速度,λ表示涡旋的直径,则转动的时间尺度为λ/w,而黏性阻尼的时间尺度为λ^2/ν,这里ν是运动黏性系数。令这两个时间尺度相等,给出最小涡旋的参数满足$w\lambda/\nu\sim1$,也就是说,依据最小涡旋特征时空尺度构造的雷诺数大约为1的量级。读者可以回忆起,第2章中描述高能量密度流动的典型雷诺数至少比1高若干个数量级。由此得到的结论是最小涡量的尺度要比整个系统的特征尺度小几个数量级。

下一步考察阻尼耗散能量过程应具有的总速率。系统中产生的最大涡旋称为**涡流**,它们一般伸展至整个湍流区。简单情形中(如KH或者RT不稳定性),在这些不稳定性生成的大结构的演化过程中产生涡流。涡流中物质的特征速度为w_e,涡流的特征直径为l。湍流的一个可观察到的性质以及传统湍流理论中的一个假定是:大的涡流耗散掉其自身能量所需的时间尺度大约是1个环流时间。涡流具有的比能量约为w_e^2的量级,因此其比能量耗散率(单位质量的功率)约为w_e^3/l的量级。下面把这个湍流耗散功率记为P_t。这些结构内在的黏性阻尼很小,为了说明此点,可以注意到涡流的黏性时间尺度为l^2/ν。因此其黏性阻尼率为$w_e^2\nu/l^2$的量级,黏性阻尼率对P_t的比值为$\nu/w_el=1/Re$。综合上面的论述,意味着动力学过程必定会建立小尺度结构,通过系统中的全局性过程(如KH或者RT不稳定性)耗散掉涡流中沉积的能量。

这种最小结构尺寸的量级是科尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov)尺度之一。所谓**科尔莫哥洛夫尺度**,即长度尺度η_k、时间尺度τ_k和速度尺度u_k,可依据比能量耗散率和黏性系数而得出,即为

$$\eta_k=(\nu^3/P_t)^{1/4},\quad \tau_k=(\nu/P_t)^{1/2},\quad u_k=(\nu P_t)^{1/4}\tag{5.142}$$

为了看出这些尺度在物理上非常小,我们把P_t作替换,得到以涡流对应的雷诺数$Re=w_el/\nu$表示的结果,即

$$\eta_k=l/Re^{3/4},\quad \tau_k=(l/w_e)/Re^{1/2},\quad u_k=w_e/Re^{1/4}\tag{5.143}$$

假如$Re=10^5$,最小涡旋尺度的量级大约是最大涡流尺度的1/6000。我们指出,对应于科尔莫哥洛夫尺度的雷诺数满足上面得出的条件,即$\eta_ku_k/\nu=1$。

下面探讨这些结构如何会在这样的尺度上形成。作为准备工作,首先把它们与其他一些特征的量纲进行比较,然后讨论流体的动力学行为。涡流最初可能在流动参数陡峭变化的边缘处形成,如由KH不稳定性产生的翻卷运动,以及图5.1中尖刺端部处和图5.7中剪切层中的情形。当涡流演化时,黏性扩散使得剪切层边缘流动参数的分布光滑化(见5.6.3

节)。扩散产生了层流边界层,其内部速度分布具有有限的横向梯度,该边界层的长度尺度为$\sqrt{\nu t}$。大涡流的时间尺度为 l/w_e,所以该边界层的长度尺度即为 $l/\sqrt{Re}$。把这个结果与式(5.143)比较,可以看出,出现耗散处的科尔莫哥洛夫长度尺度小于边界层的长度尺度,它们之间的差别随 Re 上升而增大。外部驱动的不稳定性不容易在这种边界层中存在的小尺度上出现,这里流动速度分布有着连续的梯度。例如,KH 不稳定性就是被这种梯度所致稳的。因此,边界层内的脉动在因耗散消失之前,应当通过局域的流体动力学行为而演变。在边界层整个厚度范围内速度梯度限制了不稳定性,这个总厚度约为 $l/\sqrt{Re}$的数倍。

为了使论述更加深入,我们需要使用流体动力学方程组。相关的方程组是式(2.27)中的动量方程和机械能量方程,后者是通过动量方程两边对 $\boldsymbol{u}$ 做点乘,保留与黏性有关的项并略去有关辐射和其他力的项而导出。为简单起见,再次假定流动是不可压缩的,并且 ρ、ν 为常数,第二黏性系数为零。这样得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu\, \nabla \cdot \underline{s} \tag{5.144}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{u} \cdot \nabla p + 2\nu\, \nabla\cdot(\boldsymbol{u} \cdot \underline{s}) - 2\nu(\underline{s} \cdot\cdot\, \underline{s}) \tag{5.145}$$

式中已经利用不可压缩条件简化了式(2.36)中的 $\underline{\sigma_\nu}$, $\underline{s}$ 是如下定义的应变率张量,

$$\underline{s} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}) \tag{5.146}$$

$\underline{s}$ 的分量记为 s_{ij},张量双点乘表达式 $\underline{s} \cdot\cdot\, \underline{s}$ 是对双下标 ij 的两重求和,即 $s_{ij}s_{ij}$。

习题 5.17

根据第 2 章中的方程组,推导式(5.144)和式(5.145)。

由于流体中的湍流是在流体流动内部发展出来的,把流场的物理量表示为平均流动项和脉动(湍动、涨落)项之和,有助于对上面方程组的分析。为此,令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{w}$,$p = P + \delta p$,$\underline{s} = \underline{S} + \delta \underline{s}$,这些和式中的第一项用大写字母表示平均流动量,第二项是脉动量。把这些定义式代入式(5.144)和式(5.145),并在比任何涡流耗散时间长得多的时间尺度上取平均。脉动量各自取平均后为零,但是它们的乘积在平均之后一般不为零,其平均值用上杠线表示,与这些量之间的相关程度有关。为简单起见,还要假定整个系统处于定常状态,从而得到平均流动的方程组和湍流脉动的方程组。平均流动的动量和能量方程分别为

$$\rho(\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + 2\nu\, \nabla\cdot \underline{S} - \nabla\cdot(\rho\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}}) \tag{5.147}$$

$$\boldsymbol{U} \cdot \nabla\left(\frac{U^2}{2}\right) = \nabla\cdot\left(-\frac{P}{\rho}\boldsymbol{U} + 2\nu\boldsymbol{U} \cdot \underline{S} - \overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}\right) - 2\nu(\underline{S} \cdot\cdot\, \underline{S}) + (\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} \cdot\cdot\, \underline{S}) \tag{5.148}$$

湍流的能量方程为

$$\boldsymbol{U} \cdot \nabla\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\overline{\boldsymbol{w}\delta p} - 2\nu\,\overline{\boldsymbol{w} \cdot \delta \underline{s}} + \frac{1}{2}\overline{w^2\boldsymbol{w}}\right) - (\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} \cdot\cdot\, \underline{S}) - 2\nu(\overline{\delta \underline{s} \cdot\cdot\, \delta \underline{s}}) \tag{5.149}$$

如果查阅流体力学文献资料就可看到各种中间量,它们都有命名,给出了该领域中一些

专用术语。例如总应力张量，一般为压力张量和黏性应力张量之和。至此，我们已做好更细致地探讨湍流流动动力学行为的准备。

习题 5.18

推导式(5.147) ~式(5.149)。

首先考虑平均动量。应用2.3节中论述的标度分析，可以证明式(5.147)中的黏性项与对流项之比值约为 $1/Re$ 大小，因而通常可以忽略不计。该式中最右边的项是一个张量的散度，描述了脉动对平均流动的作用力。这个项最早是雷诺在1895年得出的，被称为雷诺应力张量，它量化描述了湍流脉动对平均流动的作用。遗憾的是，此项幅度不是明显可知的。湍流速度 w 应小于 U，涡流直径 l 小于流动的全局性长度尺度 L。在真实的湍流运动中经常见到 $w/U \sim l/L$，约为百分之几，这意味着式(5.147)中最后一项大约是此式左部项的百分之几。虽然此项往往比黏性损失项大得多，但仍然相当小，以至于流动在 L 尺度上只是逐渐地变化。

平均流动的能量变化由式(5.148)表示，大致状况与动量相仿。相对于平均流动的能量而言，黏性项约为 $1/Re$，包含湍流速度相关量的项通常大得多，但仍然相当小，以至于平均流动的能量只能逐渐下降。

湍流的能量方程式(5.149)能够告诉我们更多的东西。该式的左部和右部第一项可以重新写成为一个矢量散度的形式，该矢量包括能量通量、$p\mathrm{d}V$ 功和黏性应力的能量输运量。如同在定常湍流的情形，在湍流机械能量不变的任何体积上这些矢量的总和为零。式(5.149)右部后面两项包括了可辨认为是湍流能量的产生项(前一项)和耗散项(后一项)。在粗略的标度意义下 $S \sim U/L \sim w_e/l$，因而上述前一项的大小为 w_e^3/l，从前面一般论证中可以知道此项相等于湍流的比能量耗散率。

式(5.149)中的最后一项表示湍流引起的耗散，这是我们从上面分析中得出的重要的新结果。假设湍流运动是等熵的，经过一些代数运算可以证明

$$2\nu\overline{(\delta \underline{s} \cdot\cdot \delta \underline{s})} = 15\nu\,\overline{(\partial w_1/\partial x_1)^2} \tag{5.150}$$

式中下标1表示第一个矢量分量(湍流方程组的细致研究见 Hinze 的论文)。所有空间尺度上的脉动都对 δs 有贡献，因而 δs 不是由 w/l 给定，而是 δs 对应的长度尺度必定小于 l。记这个长度尺度为 λ_T，当湍流能量的产生与耗散相平衡时，可得到

$$w^3/l = 15\nu w^2/\lambda_T^2 \tag{5.151}$$

因而有

$$\lambda_T/l = \sqrt{15}/Re^{1/2} \tag{5.152}$$

长度尺度 λ_T 称为泰勒微尺度，这是按照首先给出这个定义的 G. I. Taylor 命名的。但是，有关泰勒微尺度的奇怪问题是，它不是一个表征湍流的物理距离，而是其能量能够通过黏性而耗散掉的大涡流的最大尺度(如果这个尺度减小时湍流涨落速度没有发生变化)。Tennekes 和 Lumley 更倾向于认为 λ_T 只是与 w 组合后可以得出耗散率的一种长度尺度，这种尺度的涡旋能够耗散掉涡流中的全部能量。因此，λ_T 是关于该尺度的一个合理估计，在这个尺度

以下流体的行为不再受到驱动涡流的大尺度动力学的影响。但是，在转动速度 w、尺寸尺度 λ_T 的涡流的一个涡旋循环时间尺度之内，这样的耗散并不能实现。因而这样的涡旋不能满足如下的假定：任何湍流的涡旋都在旋转一圈的时间内耗散掉自己的能量。如果这个得到实验支持的假定所预设的湍流性质是正确的，则更小尺度的涡旋还将继续形成，直至达到柯尔莫哥洛夫尺度。

泰勒微尺度的一个明显的特点是，它与在一个上述涡流时间尺度内发展起来的层流边界层的厚度同量级。任何能够持续一个涡流时间尺度的结构，都会发展出这样的边界层。这就为如下的观念增添了一个物理基础：流动的全局性不稳定动力学行为原本可以限制此尺度以下的各种作用。为了强调这种对应关系，Dimotakis 称它为李普曼（Lipman）— 泰勒微尺度。

在上面已得到的物理图像中，流体动力学引起能量向较小尺度涡旋的输运，虽然还未讨论这种输运的动力学，其结果表明全局性不稳定动力学行为产生湍流，而且至少在表面上也产生涡旋，这些涡旋通过黏性扩散而散布。全局性动力学产生的能量被输送至越来越小的涡旋，一旦其尺寸降到泰勒微尺度之下，它们的行为就将与全局性流动过程无关，然后当涡旋尺寸达到柯尔莫哥洛夫尺度时，其能量最终被耗散掉。当 Re 增大，泰勒微尺度和柯尔莫哥洛夫尺度的差距越来越大。

在泰勒微尺度和科尔莫哥洛夫尺度之间的范围内，仅由涡旋动力学控制了能量向更小尺度结构的输运。由于这种动力学方程组基本上与涡旋尺度无关，有望找到当涡流直径减小时关于其性质变化的一个十分简单的标度关系。根据一组很广泛的限制性假定（如 Tennekes 和 Lumley 的书中第 8 章对此有所评述），柯尔莫哥洛夫证明了动能 $E(k)$ 的波数谱与 $k^{-5/3}$ 成比例。这个论断的意义是：$E(k)\mathrm{d}k$ 是特征波数处于 $k \approx 2\pi/\lambda$ 左右宽度为 $\mathrm{d}k/2$ 范围内的涡旋的动能，而且与 $k^{-5/3}$ 成正比。脉动应变率对应的标度关系是 $\delta s \propto k^{2/3}$，所以在最小尺度处脉动应变率最大。指数 5/3 不是一个普适常数，从满足不同于柯尔莫哥洛夫所做假定的系统的理论及观察研究方面，将见到这个指数的另外的值。

图 5.21 说明上面得到的 $E(k)$ 谱的定性构造。在最低波数端该谱由产生湍流能量的驱动过程所决定，把能量输送到更小尺度涡旋的过程也有贡献。因此，这部分能谱的构造将随具体情况而变动，在该图中用平坦的线段表示。当 k 增大致使涡旋尺寸 λ 下降到 λ_T 之下，其能谱变成为具有斜率 $-5/3$ 的**柯尔莫哥洛夫谱**。然后当涡旋尺寸趋近柯尔莫哥洛夫耗散尺度时，能量发生耗散，$E(k)$ 更加快速下降。在资料综述的基础上 Dimotakis 得出结论：耗散作用最初变更的是尺寸 $\lambda \leqslant 50\eta_k$ 的涡旋的能谱。能谱中具有幂次律形状的区域称为惯性范围，该名称反映了这样的观点：流体的惯性动力学行为是产生这部分能谱的主要原因。基于以上论述，一旦 Re 大到足以使 $50\eta_k < \lambda_T$ 时，就应当出现惯性范围。这大约要求 Re 值达到 10^4 以上。

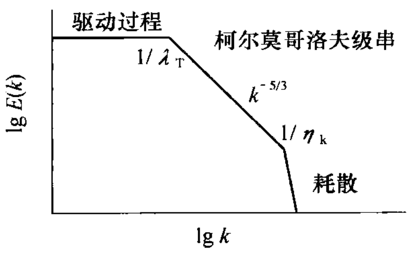


图 5.21　湍流动能谱的构造

湍流系统的一个重要特色是存在或没有湍流混合转变的问题。通常可在某个与流场细

节有关的雷诺数下观察到湍流混合的发生。一旦这种现象出现,湍流即引起两个相互作用流体的快速混合,以及它们之间相互朝对方内部的快速扩散。这种湍流混合转变具有重要的实际意义,如对化学处理器等用于在两种流体的分子间引起大量相互作用的系统。对于高能量密度系统这种现象也可能很重要,如人们在不同场景下希望激起或者抑制这样的混合现象。Dimotakis 的猜测是,湍流混合转变对应于能谱中惯性范围的发展,达到 $Re>10^4$ 是这种发展的一个必要条件。

作为本节的结尾,我们将简短讨论产生从较大涡旋至较小涡旋的能流的动力学。为此,以两种方法改写动量方程式(5.144),并且保持包括不可压缩性在内的同样假设,首先处理对流导数和黏性项,突出涡量 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ 在该式中的作用,得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}-\nu\,\nabla\times\boldsymbol{\omega} \tag{5.153}$$

上式说明了涡量的一个重要作用。如果回想起用旋转面包圈对涡旋的比喻,就容易理解流体的速度为什么沿着 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}$ 的方向。想像一下网球打上旋球、棒球打弧旋球或者高尔夫球打削球的样子,这些情形中转动物体的快速上升,是依靠提高物体一边的流动速度并且降低另一边的流动速度,根据伯努利效应的原理造成压差,从而产生举力而实现的。因此,涡旋使流动改变方向,指向与流体速度矢量和涡旋矢量两者相垂直的方向。

其次把式(5.144)两边取旋度,得到关于涡量自身的动力学方程,即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})+\nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{5.154}$$

此式等同于描述磁场性态的式(2.48)。涡量与磁场之间的类似性,经常用来作物理解释和数学分析。如果不存在净流动或者流场空间尺度相当小,则涡旋发生扩散;否则式(5.154)右部第一项会驱使涡旋随流体运动。在同样意义下,等离子体中的磁场冻结于磁力线上,流体中的涡旋冻结于流线上。另外,这个方程清楚地表明,相对于动量来说黏性的作用是引起扩散,扩散把动量(以及涡量)从受到阻尼的结构中输送到周围流体中。涡旋运动中含有的能量发生耗散再转变为热能,这种作用由能量方程中的黏性加热项描述。

习题 5.19

更准确的说法是,应当认识到随流体一起运动的是通过一个曲面 S 的涡量。试对 $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$在曲面 S 上的积分求时间导数以证明以上断言,这里曲面 S 随流体一起运动,其形状可以随时间变化。讨论此结果与式(5.154)的联系。提示:关键在于把曲面看作围绕其边沿曲线的回路积分,然后求该曲面积分对时间的偏导数。

式(5.153)和式(5.154)一起得出的结论是,涡旋不许可流体不受扰动地流经它们。涡旋使流体流动方向偏转,而且与流体一起运动引起更大的偏转。但是仍然有流动的变化影响到 $\boldsymbol{\omega}$ 当地值的情形,这是由于速度梯度的作用。为了更清楚地了解这种作用,把式(5.154)改写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\,\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{s}+\nu\,\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{5.155}$$

可以看出,仅当应变率张量 $\underline{s}$ 为零(并且还忽略黏性阻尼项)时,当地涡量才会不发生变化而随着流体运动。为了了解可能发生的变化,下面考虑有限应变率对涡量的作用。

首先,容易理解$\underline{s}$的非对角线分量的作用是使涡旋旋转。我们讨论 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 相互作用产生的举力,如果 $\boldsymbol{u}$ 沿着涡旋变化,则举力也沿着涡旋变化,这样将产生扭矩使得涡旋转动。由于通常涡量含有 $\boldsymbol{u}$ 在三个空间方向的导数,当涡旋成为动力学的主导因素时,涡量的分布趋向于各向同性。从而即使在全局性尺度下驱动湍流的不稳定性并不各向同性,小尺度湍流一般仍是各向同性的。

其次,$\underline{s}$的对角线分量导致沿涡量方向的变化,其作用要么是拉伸,要么是压缩涡旋,图 5.22 图示说明了这些作用。如图 5.22 所示,拉伸或压缩改变了涡旋的尺寸,这是流体流动的一个简单后果。例如,当流体在管道中加速通过一个狭窄段落时,一个圆柱形的流体微元在长度方向被拉长,而其直径则缩小。当这情况发生于一个涡旋时,其转动速度必然发生变化以维持角动量守恒。因此,当流体动力学行为使一个涡旋伸长时,其涡量增大。还可注意到,涡量的这种增大是十分迅速的。例如,图 5.22 所示的情形,涡量沿着 x_1 的方向,应变率张量使得涡旋伸长的非零分量为 $s_{11} = \partial\mu_1/\partial x_1$。根据式(5.155),该分量引起涡量的指数式增长(当应变率不变时)。涡量增大就有可能转变为湍流状态,因为指数式增长经常导致幅度变大。但是当流动发展时应变率的任何涨落将趋向于阻止这种后果。

即使如此,通过以下两种作用的组合,湍流系统中的涡量常常爆炸式地增大。第一种作用是刚才讨论过的通过涡旋与应变率相互作用使涡量得到放大;第二种作用是通过一种"次生不稳定性"使应变率得到不稳定增长。如 RT 和 KH 不稳定性那样的简单不稳定性,趋向于产生非常有序的二维或三维流动图式。例如,图 5.22 中的射流,KH 不稳定性产生缠绕在射流杆状体上的卷曲结构,再形成环圈形结构。这些结构的表面上都有涡量,它们很快扩散到这些表面附近的流体中。这些涡量的方向是角向的(即围绕着射流杆体的方向)。初始时流场是柱对称的,角向应变率为零。但是许多二维对称系统对于第三维度的扰动是不稳定的,射流情形中脉动改变了曲面在角向的形状,形成的初始扰动指数式增长。其关键性的后果是,这种增长式的扰动造成了也能够指数式增长的有限角向应变率。到了这个阶段,由于应变率指数式增长,涡量也指数式放大,差不多立即就发展成为很充分的湍流流动。

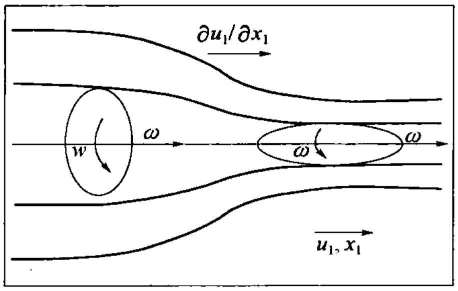


图 5.22 涡旋伸长。流体速度变化引起涡旋伸长或缩短

习题 5.20

根据动量方程,推导式(5.153)~式(5.155)。

上面的讨论使我们懂得了流体的动力学行为如何创造出各种尺度(向下直至柯尔莫哥洛夫尺度)的涡旋分布。大于任何给定尺度的涡旋所产生的应变率,正是较小尺度涡旋所经受的。因此,由于受到较大尺度涡旋的影响,任何给定尺度下的涡旋既被拉长又被旋转。

Tennekes 和 Lumley 证明，任何给定尺度的涡旋所受到的最强烈影响来自于比它略大一些的涡旋。这种情况导致能量和涡量流向较小尺度的涡旋，这种过程可以确切地描述为级串（梯级）过程。柯尔莫哥洛夫首先论述了这种动力学行为。由于这个原因，湍流系统中观察到的能谱 $E(k)$ 通常称为柯尔莫哥洛夫级串。

我们还需要讲得稍为细致些，以便对上述讨论做出归纳。首先注意到涡旋在本质上是三维的事物，在三个空间方向上都有结构，因此涡量及其作用不能为一维或二维的计算和数值模拟所反映，这使得准确的湍流数值模拟成为一个极具挑战性的问题。其次，上面采用了脉动涡量的观念，这可能是一种误导，因为可以看到除了黏性扩散作用较为重要的场合，给定表面上的涡量总是守恒的。涡量在湍流中是脉动的，因为涡旋在运动而且不断改变形状，并不是由于存在涡量振荡的缘故。理解此点的另一种途径是，涡旋运动不是波动运动，因而不涉及物理量的振荡。

最后还有个问题：小尺度涡旋是怎样开始的？人们已经看到给定尺度的涡旋能够影响到尺度比它小的涡旋，但是这里需要先假定这种较小尺度的涡旋已经存在。确实存在某些热机制引起的涡旋，但是它们增长到较大幅度需要很长的过程。全局性不稳定性（如 KH 不稳定性）确实在流体表面上沉积了涡量，这些过程或者其他更复杂的过程也许是初始形成小尺度涡旋的主要原因。人们希望并期待今后的研究将能够阐明向湍流转变的更多细节。

本章关于流体动力学不稳定行为的讨论即将结束，已经知道加速、减速、剪切层和冲击波等现象每种都能引起这样的行为。这并不奇怪，因为流体动力学不稳定性在高能量密度实验中是常见的现象。现在转向关注高能量密度系统的另一个方面，这些系统的温度往往很高，以至于能够向外界充裕地辐射。下一章将开始研究这方面的问题。

第6章 辐射输运

前面已经考察了具有纯粹流体动力学行为的若干基本系统,在这些工作中忽略了许多高能量密度系统的一个主要方面 —— 辐射。容易看到,为什么辐射通常是很关紧要的。在任何给定压力下,物质密度减小则其温度上升。存在某个密度值,低于此值时辐射通量将超过物质的能量通量。若假设 $Z+1=A$,为简单起见,温度,$T=m_p p/(\rho k_B)$。特征辐射通量可写为 σT^4,此时将相当于物质的特征能量通量 $\rho\varepsilon c_s$,真实物质的能量通量也许与此式相差一个因子,然而辐射通量超过热通量时对应的密度阈值只与该因子的 1/4 次幂有关。图6.1 表示 σT^4 等于 $\rho\varepsilon c_s$ 时密度与压力的关系,压力范围为 100GPa ~ 100TPa。气体和泡沫材料中辐射效应较重要的范围位于该状态图的左下端,固态密度材料则对应于该图的上部。第 7 章开始辐射压力就显得较为重要,那时还要进行一些基于温度的其他比较。

为了理解辐射,本章论述的第一个问题是辐射输运,也就是能量和动量依靠辐射(以及辐射与物质的相互作用)在物理系统中的传递。在日常生活中,我们对辐射输运是熟悉的,例如,来自太阳的辐射透过大气层传播过来,加热马路上黑色的沥青,其光谱的峰值位于可见的绿光频段。在炎热的白天,如果在踩上路面之前先用手或脚靠近试试,就会感到黑色路面发出的热辐射。大家经历过的辐射输运的另一方面例子,就是隔着浓雾注视一个亮光时所见到的光散射。

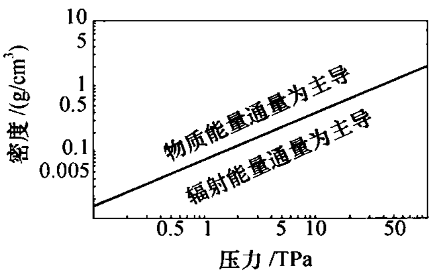


图 6.1 能量通量的状况

(对于任何给定的密度,只要物质压力足够高,辐射能量通量总会超过物质的能量通量)

天体物理学的许多问题中,辐射的发射、吸收和输运占据着中心位置。例如 Shu 写的两卷本《天体物理学》专著中,有一整卷是关于辐射的。又如,星球芯部聚变反应产生的热量,最终必须从其表面发射出来。星球的结构与辐射能的吸收和发射密切有关。在一些变星中,吸收方面的构成引起星球发光的振荡(脉动)。造父变星就是这种现象的例子,为了形成振荡,该变星的发光必定处于一个狭窄而已知的范围内,因此可用作天文学上的距离指示器。图 6.2 表示四个造父变星发光脉动的例子。这种脉动的周期是变动的,基于该周期

和发光度之间的经验关系式，就可以知道星球的绝对（发）光度。光度的脉动是这些星球中辐射吸收长度对温度的依赖关系发生振荡的后果，并且导致星球表面有规则地变热和变冷。辐射吸收长度的倒数就是后面章节中将要讨论的**不透明度**。人们现在已经了解造父变星光度的周期性规律，这是由于掌握了本章将要叙述的更为成熟，并经过不透明度实验室测量校核的计算方法的缘故，其中一些方法将在6.2.3节中说明。

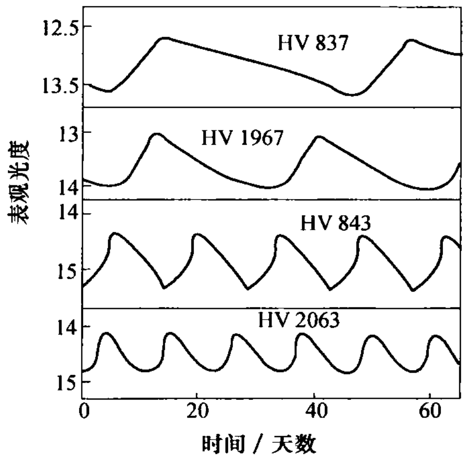


图 6.2　几个造父变星表观（视）光度的变化

（本图引自 Michigan Math. and Science Scholar Summer Program）

6.1　基本概念

为了研究辐射、辐射输运及其对物质的作用，首先必然面临的是如何描述辐射的问题。这项工作的复杂程度至少与如何描述粒子的问题一样。与粒子相像，辐射可以注入空间，随时间变化，并且朝任何方向传播。辐射确有其唯一的速度，这是比粒子的情况较为简单的方面，但是这个特点抵偿不了辐射可以具有任意频率。可以通过几种机制相互作用（有些相互作用在力学中属于“非弹性”的）等事实所带来的复杂性。另外，由于辐射以光速运动，较为容易引起对物质的相对论效应。尽管如此，通过一步步地推进终究能够建立起描述辐射的有效方法，其做法是先引入 Mihalas 和 Mihalas 书中给出的一组概念，在该书中还可见到篇幅更长、更为完备的论述，尤其关于相对论效应方面的问题。

6.1.1　辐射的性质与描述

本节将从基础开始建立对辐射的描述方法，这相当于从玻耳兹曼方程出发建立起流体力学的理论。辐射问题中分布函数的对应物是谱辐射强度 I_ν，其单位是每单位面积、单位时间、单位立体角和单位频率的能量，在 cgs 单位制中即是 erg/(cm^2 · s · sr · Hz)。因此，在垂直于辐射传播方向的面积、时间、立体角和频率各个微分（分别记为 dA、dt、dΩ 和 dν）的乘积内，发出的能量增量为

$$\text{能量增量} = I_\nu \mathrm{d}A\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu \tag{6.1}$$

谱辐射强度显然基本上与坡印亭矢量有关，找出它们之间的关系是一个很有意义的问题，但并不是我们必需在这里做的事。作为辐射的基本而又完备的描述，本来可以一般性地把 I_ν 看作上述所有变量的函数。幸运的是，通过一些不太复杂模型的研究，人们更多地懂得了辐射。将辐射强度 I_R 定义为从单位面积、单位时间和单位立体角中发射的辐射能量，即

$$I_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)\mathrm{d}\nu \tag{6.2}$$

I_R 的 cgs 制单位是 $\mathrm{erg/(cm^2 \cdot s \cdot sr)}$。一个黑体发射的总辐射强度称为热（辐射）强度 $B(T)$，由下式给出，

$$B(T) = \sigma T^4/\pi \ (\mathrm{erg/(cm^2 \cdot s \cdot sr)}) \tag{6.3}$$

式中 σ 为斯忒藩—玻耳兹曼常数，$\sigma = 1.03 \times 10^{12}\mathrm{erg/(cm^2 \cdot s \cdot eV^4)}$，或 $\sigma = 1.03 \times 10^5\mathrm{W/(cm^2 \cdot eV^4)}$。

习题 6.1

在 2π 立体角范围内积分热强度 $B(T)$，找出温度 T 的表面上每单位面积的总辐射功率。

辐射强度在方向上的分布不一定均匀，因为较热的区域通常发射更热一些的辐射（但如下所述，不一定是原子线谱意义下更多的辐射）。事实上，称作平均谱强度 J_ν 和平均强度 J_R 的这两个量十分有用，定义如下：

$$J_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)\mathrm{d}\Omega \tag{6.4}$$

$$J_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega})\mathrm{d}\Omega \tag{6.5}$$

本章后面讨论到辐射能量输运时，就会看到这两个量的重要性。

无论辐射的角分布如何，出现于动力学方程组一些式子中的辐射能量密度始终是其重要的性质。一般说来，某个物理量的密度是其通量与运动速度的比值，但是具体的数学描述与问题的细节有关。当物质粒子向许多方向运动时（如气体中的情形），其总的能量密度要比把气体视为流体定向运动的能量大得多。相仿地，辐射的能量密度并不是净辐射通量与其传播速度的比值，辐射能量密度 E_R 的定义是辐射强度在全部立体角范围的积分与其群速度的比值，即

$$E_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega})\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{c}J_\mathrm{R} \tag{6.6}$$

式中我们做了几乎总是成立的假设：辐射群速度各向同性而且等于光速 c。相应地，自然有谱辐射能量密度的定义，即

$$E_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{c}J_\nu \tag{6.7}$$

以上得出的这些量类似于把粒子分布函数积分求得总密度、速度分布等。同样，辐射和统计物理中使用何种变量来定义分布是可以选择的。粒子数的分布可以由位置空间、方向

和能量确定的能量密度来给定，但是通常更直观的做法是把粒子数密度看作空间位置和速度的函数。相比之下，也可以用数密度的术语来描述光子，即 I_ν 被 $c\hbar\nu$ 除，这样做有时很有用。不过通常更加直观的方法，仍是把光子的能量密度看作为空间位置、方向和能量的函数。继续以粒子分布作类比，讨论光子分布的矩。依据直接的类比，把光子的通量定义为

$$\int_{4\pi}\frac{I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)}{c\hbar\,\nu}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega \tag{6.8}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为光子的速度矢量，$\hbar$ 为普朗克常数。辐射能量通量 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 通常更有用处。已知光速为 c，可以写出

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t) = \int_{4\pi}I_\mathrm{R}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.9}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为立体角 $\boldsymbol{\Omega}$ 对应的传播方向的单位矢量，随 $\boldsymbol{\Omega}$ 而变动，例如在标准的球面坐标系中 $\boldsymbol{n}$ 的 z 分量可写为 $\cos\theta$。辐射能量通量的 cgs 制单位为 erg/(s · cm^2)。下面自然想到的是谱辐射能量通量的定义：

$$\boldsymbol{F}_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \int_{4\pi}I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.10}$$

其 cgs 制单位为 erg/(s · cm^2 · Hz)。由于存在一类广泛而又重要的情况，即使辐射的能量密度和压力都可忽略不计，依靠辐射的能量输运仍然是此时至关紧要的因素。辐射通量与辐射动量密度有关，总辐射动量密度为 F_R/c^2，谱辐射动量密度为 $\boldsymbol{F}_\nu/c^2$，因此通过面元 d$\boldsymbol{A}$ 传播的总辐射动量为 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}/c$。

习题 6.2

利用把辐射作为粒子处理的方法，推导总辐射动量密度的表达式，并证明这个量等于 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}/c^2$。

就像粒子分布的情形那样，可以进一步定义辐射分布函数的各阶矩，其中二阶矩更是一个常用到的量。用并矢记号可以定义**谱辐射压力张量**为

$$\underline{\boldsymbol{P}}_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \frac{1}{c}\int_{4\pi}I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\Omega},\nu)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.11}$$

此量显然是一个对称张量，因为把各个 $\boldsymbol{n}$ 分量的顺序倒过来不会改变上述积分的值。把式(6.11)再在频域上积分，则得到总辐射压力张量$\overline{\boldsymbol{P}}_\mathrm{R}$。没有物质时动量依靠辐射输运，此过程基本上可由下式描述，即

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{F}_\nu}{\partial t} = -\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_\nu \tag{6.12}$$

同样，只要把上式在一个有限体积上积分再应用高斯定理就可明了。应当指出，在同时含有物质和辐射的系统中，式(6.12)左部差不多总可以忽略。在这样的系统中，通常辐射对能量通量的贡献较大，但是物质动量基本上总比辐射动量大得多，占据主导地位。即使如此，辐射动量源(式(6.12)的右部)可能比物质的动量源更有优势。

辐射场往往是对称的，其对称方式有三种，都可以较简单地给出辐射压力。一般说来，

标量谱辐射压力的定义为

$$p_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \frac{2\pi}{c}\int_0^\pi I_\nu(\boldsymbol{x},t,\theta,\nu)\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^1 I_\nu(\boldsymbol{x},t,\mu,\nu)\mu^2\mathrm{d}\nu \tag{6.13}$$

已经计算了$\underline{\boldsymbol{P}}_\nu$ 的 zz 分量,该分量与 xx、yy 分量彼此相等。把式(6.13)在频域上积分,给出标量总辐射压力 p_R。第一种对称情况是辐射场各向同性,则$\underline{\boldsymbol{P}}_\nu$ 显然只有对角线上彼此相等而且不为零的三个分量,得到

$$p_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu) = \frac{2\pi}{c}I_\nu(\boldsymbol{x},t,\nu)\int_{-1}^1\mu^2\mathrm{d}\mu = \frac{1}{3}E_\nu \tag{6.14}$$

这是辐射压力与辐射能量密度之间关系最简单的例子。各向同性情况下如同物质压力的情形一样,动量方程中压力张量散度变成为标量压力的梯度$\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_\nu = \nabla p_\nu$。有人可能会提出异议:真实的各向同性辐射场中不可能存在压力梯度,因为如果没有空间均匀分布的辐射强度,局域性的各向同性不可能维持。这在数学上是正确的,但是实际上对应于可以忽略的各向异性,压力梯度可能较为显著。把辐射场按各向同性处理,是在扩散情况下已得到检验的例子。这种方法很重要,后面还要用较长篇幅讨论。

习题 6.3

推导式(6.14)。

第二种有用的对称情况是平面情形。I_ν 只随相对于一个方向的角度而变化,在与此方向正交的其余两个方向上是各向同性的。可选定物理量变动的这个方向为 z 轴,把谱辐射强度写成 $I_\nu = I_\nu(z,t,\mu,\nu)$,如前所述这里方向余弦为 $\mu=\cos\theta$,此时$\underline{\boldsymbol{P}}_\nu$ 的 zz 分量还是 p_ν,其 xx 与 yy 分量相等,等于 P_{xx}:

$$P_{xx} = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 I_\nu(z,t,\mu,\nu)(1-\mu^2)\mathrm{d}\mu\cos^2\phi\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}E_\nu - \frac{1}{2}p_\nu = p_\nu - \frac{1}{2}(3p_\nu - E_\nu) \tag{6.15}$$

注意到,无论各向同性的或者可得出 $E_\nu = 3p_\nu$ 的任意角分布的辐射强度情形,辐射压力都可化约为标量。平面情形中唯一的非零空间导数是沿 z 方向的导数,即有

$$\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_\nu = (\partial p_\nu/\partial z)\hat{z} \tag{6.16}$$

式中:$\hat{z}$ 为 z 轴的单位方向矢量。

第三种有用的对称情况是球对称情形。$\underline{\boldsymbol{P}}_\nu$ 的极向和角向的对角线分量为 P_{xx},径向的对角线分量仍为 p_ν。此时只有沿径向的空间导数不为零,因而得到

$$\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_\nu = [\partial p_\nu/\partial r + (3p_\nu - E_\nu)/r]\hat{\boldsymbol{r}} \tag{6.17}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为半径方向的单位矢量。

现在以通用的术语讨论 p_ν 对 E_ν 的比值,该比值称为(谱)爱丁顿因子(Eddington Factor),$f_\nu = p_\nu/E_\nu$。如式(6.13)所示,爱丁顿因子 f_ν 与 I_ν 随角度的变化有关。在频率 ν 的平面波极限情形,若辐照度为 I(单位面积上的功率),则有 $E_\nu = I/c$ 以及 $p_\nu = (I/c^2)c = I/c$。因此,在这种情况下 $p_\nu = E_\nu$,即 $f_\nu = 1$。所以,与能束十分相像的辐射强度分布具有 $f_\nu \approx 1$。另一种极限下辐射自由传播,几乎不存在相互作用,称为**自由流极限**。在此极限下当至辐射源

的距离增大，f_ν 趋于 1。从式(6.13)还可明白，当辐射散布在一个角度内时，f_ν 减小；如果再趋于各向同性，则f_ν 趋于 1/3。自然系统中，f_ν 通常处于 1/3 ~ 1 之间。

从数学上看，圆盘式的辐射分布，即大部分辐射能量向对称轴的横向传播情形，爱丁顿因子将低于 1/3。这种方式的辐射在专门设计的实验中可以实现，在自然界中若两个强烈吸收区域之间夹有一个很热的横向展延的辐射源区，则可能出现这种情形。

把上述各个谱物理量在频域上积分，显然可定义出总辐射压力张量$\underline{\boldsymbol{P}}_R$ 和标量辐射压力 p_R，从而可以定义出总爱丁顿因子 p_R/E_R。有些计算辐射输运的方法使用爱丁顿因子写出的公式，能够有效地改善计算精度，而且不必显式处理辐射传播所有可能的方向。

6.1.2 热辐射

热辐射十分重要，即使对于非平衡辐射系统也是如此，其原因是电子承担了发射辐射的工作，而且它们经常处于麦克斯韦分布或分段麦克斯韦分布。这些情形中，在某个频段发出辐射的谱强度正比于承担此发射的电子的温度所对应的平衡谱辐射强度。差不多所有近代物理或统计力学的教科书中都有热平衡(或黑体)辐射性质的推导，本书不再重复。考虑一个状态被占据的相对概率、相空间中的状态密度以及两种可能的极化，就可证明谱热辐射强度为

$$B_\nu(T) = \frac{2\hbar\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\hbar\nu/k_BT}-1} \tag{6.18}$$

式中 $\hbar$ 为普朗克常数；下标“ν”表示 $B_\nu(T)$与频率 ν 有关。

把 $B_\nu(T)$在频域上积分，得到**总热辐射强度**为

$$B(T) = \sigma T^4/\pi \tag{6.19}$$

式中 σ 为斯忒藩—波耳兹曼常数。

热辐射的总能量密度为

$$E_R(T) = \frac{4\pi}{c}B(T) = \frac{4}{c}\sigma T^4 \tag{6.20}$$

热辐射必定是各向同性的，因而其压力是标量，$p(T) = E_R(T)/3$ 。

6.1.3 辐射与物质相互作用的类型

前面已定义了描述孤立辐射所需的变量，现在考察辐射与物质如何相互作用，从而为研究辐射输运的综合问题做好准备。辐射与物质之间的相互作用可分为三种基本类型。

1. 第一种类型的辐射与物质相互作用

这种类型涉及束缚－束缚跃迁，在初等物理学中介绍玻尔原子时我们见到过这种跃迁。玻尔原子中的电子被束缚于该原子中，但可以在被称为“状态”的原子能级之间跃迁。最低的能级是基态，所有能量更高的束缚状态称为激发态。当电子从能量较高状态向能量较低状态“衰退”时，能够发射辐射。这种束缚－束缚发射是构成我们熟悉的赖曼和巴耳末谱线系列的原因。与衰退相反的激发过程则使电子获得能量，从能量较低状态跃迁到能量较高的状态。一般说来，激发和衰退两者都需要至少添加一个粒子作参与，以满足能量和动量守

恒的要求。这个添加的粒子可以是除了该电子、原子或离子本身之外任何类型的粒子，包括光子。实际上，一定的粒子对于相应的衰退或激发过程的发生速率起着主导作用。低密度等离子体中，衰退过程差不多总是产生辐射，而激发过程差不多总是由电子碰撞所引起的；高密度等离子体中，碰撞和辐射衰减都比较重要，碰撞可以使电子从一个激发态转移到另一个激发态。如果辐射与物质处于接近平衡的状况，则辐射激发也很重要。

束缚 - 束缚发射产生**线谱辐射**，其频率 ν 由 $E_{\Delta}=\hbar\nu$ 给定，这里 E_{Δ} 是能级之间的能量差。这种辐射的谱线宽度很窄。一个粒子发射的能量可以被另一个粒子吸收，但仅当从后面这个粒子观察到的辐射频率，覆盖了它自身的一个束缚 - 束缚跃迁能级差时才有可能。由于多普勒频移改变了这个粒子所见到的辐射频率，依靠重复发生涉及束缚 - 束缚跃迁的发射和吸收而进行的能量输运，将变得十分复杂。

习题 6.4

根据不确定性原理，一条发射谱线的频率宽度 $\Delta\nu$ 大约是其衰减时间的倒数。若典型的衰减时间为 1ns，试求在可见光谱段和光子能量为 100eV 的软 X 射线谱段中发射谱线的归一化频率宽度 $\Delta\nu/\nu$。

2. 第二种类型的辐射与物质相互作用

该类型涉及束缚 - 自由跃迁。束缚状态的极限能量是电离能量，由玻尔模型在主量子数趋于无限的极限时给定。第 3 章中已经论述等离子体连续能区的下降可能使得电离能量降低。给予一个电子可以运动到高于电离程度的能量，使其变为**自由电子**，此时可以说该电子状态进入了**连续能谱**区。这样称谓的原因是，这类许可状态的能量可以连续地变化。如同束缚 - 束缚跃迁情形，作为与任何粒子（包括光子）相互作用的结果，电子可以从连续谱状态衰退到束缚状态，或者从束缚状态被激发进入连续谱状态。

据上所述，一个光子可以被一个原子或者离子所吸收，并通过从束缚态到自由态的跃迁释放出一个电子，这是对 X 射线光子被物质吸收所作出的主要贡献。图 6.3 表示一个很薄钛片的透射谱线，在 4.7keV 处有一个陡降段落，与这个最低能量对应的 X 射线光子能够把一个电子从主量子数 $n=1$ 的束缚态（即 **K 壳层**）拉到连续谱中，因此谱线中这个特殊的吸收段也称为 **K 边沿**。当辐射光子的能量增大到 K 边沿以上，任何被吸收的光子都会把电子激发到能量更高的连续谱状态。当这个连续谱状态的能量增大，吸收过程的截面下降，从而导致在 K 边沿以上能区中透射率的上升。物质的原子序数增大，K 边沿的能量也增加。下一个具有较低电离能的边沿是 **L 边沿**，对应于把一个电子从 $n=2$ 的 **L** 壳层拉到自由状态所需的能量。高 Z 物质（如锡和铷）的 L 边沿处于 3keV ~ 4keV 范围。对于光子能量 1keV 以下的 X 射线，所有固体物质都是强烈吸收的，在这个谱段范围中韧致吸收（自由—自由机制）变得很大。

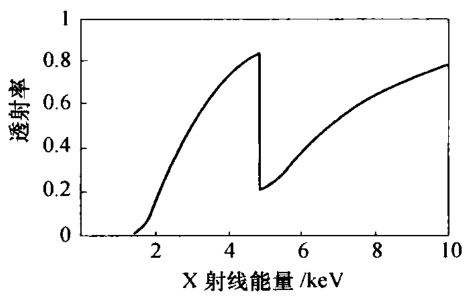


图 6.3　X 射线通过 5μm 厚度钛片的透射谱

另一种过程中处于连续谱状态的电子与离子复合,发出一个光子。这样产生的 X 射线谱线位于 K 边沿附近,因为对于处于接近零能量的连续谱状态的电子来说,这是一个非常强烈的过程。在能量低于此谱线的部分,可以观察到由于与光子复合进入激发态,然后又衰退到基态的电子所造成的结构。在高于这条谱线的能谱范围则可看到连续谱的特色,即从连续谱中能量较高状态进行自由 - 束缚跃迁的电子所造成的结构。这种自由 - 束缚跃迁辐射谱段的能量略高于上述 X 射线谱线,某些情形中可用来对温度进行诊断。

3. 第三种类型的辐射与物质相互作用

最后一种类型涉及自由 - 自由跃迁,这种跃迁把一个电子从一个连续谱状态转移到另一个连续谱状态。自由电子与其他任何粒子(包括光子)相互作用,产生自由 - 自由跃迁,而且这种跃迁常导致光子的发射或吸收。两种最普通而且最重要的自由 - 自由相互作用过程是辐射的轫致发射和逆轫致吸收。轫致发射中,一个粒子(特别是电子)通过与另一个带电粒子(特别是原子核)的相互作用得到加速,导致光子的发射。轫致发射是灼热稠密物质发射连续谱辐射的主要机制。逆轫致吸收中,光子(或光波)驱使一个电子运动经过一个原子核,与原子核的相互作用使得电子运动发生随机化,其作用是从光波中提取能量。逆轫致过程的吸收系数将在 9.2 节中论述。逆轫致过程的高能端极限是康普顿散射,这里光子与粒子的能量交换是量子化的。对于磁化等离子体有重要意义的另一种自由 - 自由发射机制,是同步辐射的发射。

6.1.4 辐射与物质净相互作用的描述

幸运的是,人们并不经常需要明确地考虑每一种独特的辐射与物质相互作用,而只需要考虑辐射被发射、吸收和散射的净总量,给出对许多系统的恰当描述就行。下面给出这样一种描述。

等离子体通过直接和间接两种途径发射辐射,直接途径即是通过粒子之间的相互作用,如轫致辐射;间接途径即由辐射在角度或能量方面的散射所引起。写出**谱发射率**为

$$\eta_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) = \eta_{\nu\mathrm{th}}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) + \eta_{\nu\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) \tag{6.21}$$

其 cgs 制单位为 erg/(cm^3 · s · sr · Hz)。在一些技术著作中,使用的术语是"谱发射系数"而不是"谱发射率"。上式中记 $\eta_{\nu\mathrm{th}}$ 为谱热发射率,这里已做近似,即假定粒子能量具有一个单一的麦克斯韦分布。更普遍完备的表达式应当明确包括系统中全部粒子发射辐射的所有可能过程,例如,应包括碰撞激发产生的线谱发射以及电子分布的高能尾部引起的轫致辐射发射。我们指出,$\eta_{\nu\mathrm{th}}$ 在频域及立体角上的积分,给出了等离子体中由于辐射导致的物质的功率损失率。式(6.21)右部另一项是谱散射发射率 $\eta_{\nu\mathrm{sc}}$,包括了使辐射在角度或能量方面发生散射的所有过程。我们对此项不进行深入讨论,但是指出,给定角度或能量下的谱散射发射率,通常与其他角度或能量范围上辐射强度的一个积分有关。与本节前面讨论的物理量不相同,式(6.21)在频域或角度范围上的积分不能简捷地进行,除非先对散射项做简化近似,或者依据某种理由将其忽略不计。

对于辐射能量的吸收率内在地与该辐射的强度有关,因此被吸收能量的表达式中必然含有辐射的强度。把每单位体积、单位时间、单位立体角和单位频率所吸收的能量记为 $\chi_\nu I_\nu$,这里 χ_ν 是谱总不透明度,单位为 cm^{-1},有时又称为谱消光系数。与发射情况作类比,

这里也有**谱吸收不透明度** κ_ν，表示粒子对辐射的吸收，其贡献是对物质的加热。还有一个参数是**谱散射不透明度** σ_ν，表示粒子导致的辐射散射，这种作用改变辐射的方向（也可能改变其能量）。因此，有

$$\chi_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) = \kappa_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) + \sigma_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) \tag{6.22}$$

这里再次说明，普遍性的辐射与物质相互作用也许极其复杂，原理上还可包括介电张量和光波电场功率等因素。但是对于几乎所有的高能量密度物理问题，只要把能量吸收率取为辐射强度的线性比例关系就行，本书下面就是这样做的。

我们将不依据谱线来具体处理辐射的发射、吸收和散射。某些问题中可采用总体等效发射率和总体等效不透明度作为近似，但在另外一些场合则必须按谱线做明确处理，其方法与前面论述的类似，但需要离散地处理每一条谱线，并把多普勒频移与所有相对于物质的运动联系起来。

基尔霍夫定律认为，平衡态下辐射的发射与吸收必定相等，现在把此定律看作辐射的发射与吸收细致平衡原理的一个应用，数学上可以写为

$$\eta_{\nu th}(\boldsymbol{x},t) = \kappa_\nu(\boldsymbol{x},t)B_\nu(T) \tag{6.23}$$

局域热动力学平衡（LTE）表示等离子体的这样一种状态，其每个组分（包括辐射）具有平衡的能量分布，而且各组分能量分布所对应的温度彼此相等。如果与温度梯度的长度尺度比较，被吸收光子的平均自由程（以及碰撞的平均自由程）非常短，并且各物理量显著变化的时间比电离或激发后平衡分布的建立时间长得多，则可以认为等离子体处于局域热动力学平衡之中。因而，一个系统要达到局域热动力学平衡，必须十分稠密或者尺度很大。一些高能量密度系统的状况，可以用局域热动力学平衡准确描述。例如，在一些实验中，待研究的高 Z 物质外面有一个低 Z 物质的包覆套层，整个样品置于平衡辐射环境之中，保持很长时间以达到均匀加热。这也就是把待研究物质置于局域热动力学平衡之中。

其他场合下式(6.23)很有用。粒子间的碰撞相当快，因而高能量密度系统中电子通常都是麦克斯韦分布的，这些电子发射的热辐射可用式(6.23)准确描述。但是与原子线谱发射有关的情况更为复杂。假定电子为麦克斯韦分布，则线谱发射产生的辐射不会高于$B_\nu(T)$。通过电子碰撞把布居数维持在（萨哈方程确定的）平衡值的任何激发态，其发射率也可以用式(6.23)描述。但是与电子分布尾部相互作用的激发态，以及与具有较长平均自由程的光子相互作用的激发态，通常都不处于上述态分布中，这些不是局域热动力学平衡的，式(6.23)不能准确地描述这些发态的发射，需要使用一种显式的非局域热动力学平衡（NLTE）方法计算它们的布居数，才能准确描述这些激发态。遗憾的是，非局域热动力学平衡计算的成本很高，因此使用式(6.23)仍有其必要性，甚至当该式并不严格适用时也只好如此。最后指出，许多天体物理系统中光子不受约束，这样的系统几乎总是远离局域热动力学平衡的。

6.2　辐射输运

6.2.1　辐射输运方程

辐射输运方程只不过是在相空间具体微元中考虑辐射产生与损失所引起的辐射强度变

化的一个方程式,这里相空间微元包括方向矢量 $\boldsymbol{n}$ 所应的立体角微元 $\mathrm{d}\Omega$、频率 ν 的微元 $\mathrm{d}\nu$ 以及位于 $\boldsymbol{x}$ 并由长度微元 $\mathrm{d}s$ 和截面积微元 $\mathrm{d}A$ 组成的体积微元。在相空间中,该微元发出的辐射加入到某方向上辐射强度之中的净速率,是能量进入位于 $\boldsymbol{x}$、t 微元的速率与能量离开位于$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}\mathrm{d}s)$、$(t+\Delta t)$微元的速率之差值,这里 $\Delta t=\mathrm{d}s/c$。因此,在数学上辐射输运方程可写为

$$\left[I_\nu\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,t+\frac{\mathrm{d}s}{c},\boldsymbol{n},\nu\right)-I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu)\right]\mathrm{d}A\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\frac{\partial I_\nu}{\partial s}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}A\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu \quad (6.24)$$

上式的单位量纲是每单位时间的能量。引起辐射强度增大的原因是,从介质中发射的能量进入相空间中该微元的总速率(包括从相空间其他微元处散射而来的能量),与由于吸收或散射从辐射中移出并进入相空间其他微元的能量的总速率之间的差数。使用谱总发射率 η_ν 和谱总不透明度 χ_ν 的术语,式(6.24)可以写为

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu)=\eta_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu)-\chi_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu)I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu) \quad (6.25)$$

这就是"经典的"辐射输运方程。这也许是把光子作为粒子处理的方程式的最准确想法,对于高温等离子体中携带热能的 X 射线光子是十分良好的近似。包括衍射、折射和极化在内的各种波动效应,在这里都已忽略不计。注意到与前面大部分方程式不一样,如果不对 χ_ν 的频率依赖关系做重大的简化假定,就无法通过积分该方程式得出关于总辐射强度的方程。还应注意到,当散射过程(包括吸收和再发射)不是辐射动力学行为的主要特色时,式(6.25)的形式最为有用。例如,若发射率包括从其他角度(或其他频率)传来的明显的散射部分,则该量应是对 I_ν 与散射系数乘积的一个积分,这样式(6.25)就成为一个积分微分方程式。又如,像超新星中通过一个膨胀外层的辐射输运问题,引入的恰好是上述类型的复杂性。这里出现的问题正是提出各种标准平均不透明度定义的根源,诸如下面将讨论的 Rosseland 平均不透明度、普朗克平均不透明度等。

为了便于应用,把偏导数$\partial/\partial s$ 做些改变,根据导数计算的连锁法则,有

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s}=\frac{\partial I_\nu}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla I_\nu+\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial s}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \boldsymbol{n}} \quad (6.26)$$

式中$\partial/\partial \boldsymbol{x}$ 为梯度算子。

由于沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 j 分量为 $x_j=s\cos\alpha_j$,所以得出式(6.26)的第二个等式,其中 $\cos\alpha_j$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的 j 分量的方向余弦,$\boldsymbol{n}$ 就是这些方向余弦为分量组成的单位方向矢量。在笛卡儿坐标系中 α_j 是固定的,式(6.26)最右部只有第一项不为零。在曲线坐标系中,α_j 沿 s 变化,一般情况下式(6.26)变得十分复杂。在标准的球坐标系中,需要用三个自变量(r,θ,ϕ)分别指定一个点在射线上的径向位置,以及用以指定该射线相对于当地径向方向的两个角度(极角 θ 和角向角 ϕ)。在球对称系统中(例如,星球可看作球对称的物体),位置只需用半径 r 就可完全指定。在任何具体点处,辐射强度随射线的方向而变化,这个量关于当地半径矢量是旋转对称的,因此只需要用一个角度变量 θ 就可指定射线的当地方向。记 $\mu=\cos\theta$,球对称情形中的辐射输运方程式(6.25)的左部可以写为

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right]I_\nu(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n},\nu)=\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial \mu}\right]I_\nu(r,t,\mu,\nu) \quad (6.27)$$

习题 6.5

推导式(6.27)。

6.2.2 辐射输运计算

我们终于到达与辐射输运研究有关的第一项工作的结束部分。前面已经定义了辐射的性质和辐射与物质相互作用的性质,现在面临着如何实际描述这些相互作用,发展适用于各种极限情形的实用输运方程的问题。许多场合下,式(6.25)中的时间导数可以忽略,从而与物质的运动比较而言,相当于把辐射运动等效于瞬时发生的。尤其在这些情形中(甚至是普遍情形中),用不透明度把式(6.25)进行归一化处理十分有用。为了做这件事,先引入称为**光学深度**的新变量 τ_ν,它本质上是一个频率函数。光学深度的无穷小增量定义为

$$d\tau_\nu = \chi_\nu ds \tag{6.28}$$

点 s 至点 s_0 之间频率 ν 处的光学深度为

$$\tau_\nu = \int_s^{s_0} \chi_\nu(s')ds' \tag{6.29}$$

在实际应用中,通常正、负号的约定是按照光学深度为正量来选择的,然而这种约定用起来必须小心。例如,当辐射沿 $-z$ 方向传播,则 $ds = -dz$,τ_ν 成为不透明度从较小 z 到较大 z 范围的积分。如果 $\tau_\nu \gg 1$,则物质层称为(对于某个频率)**光学厚**的;如果 $\tau_\nu \ll 1$,则称为**光学薄**的。如果辐射的波长相当长,则任何物质都是光学厚的;如果辐射的波长足够短,则任何物质都是光学薄的。我们还应提及,在技术文献中对于光学深度及相关术语的使用并不完全一致,可能发生误导。一些实验研究中常把物质层对光线的透过率称为“光学深度”。相比之下,式(6.29)定义的光学深度是透过率的自然对数。我们见到光学滤光片经常标注为“O. D.”,其意思是“Optical Density”(光学密度)而不是“Optical Depth”(光学深度),光学密度的定义与透过率的十进对数相一致。

为了完成对式(6.25)的归一化,定义源函数为

$$S_\nu = \eta_\nu/\chi_\nu \tag{6.30}$$

作为上面讨论过的基尔霍夫定律的一个应用,从电子的麦克斯韦分布导出的源函数为

$$S_\nu = B_\nu(T) \tag{6.31}$$

正是在这种情形中,通过对式(6.25)的归一化处理可以看到,当光学深度变得很大时,谱辐射强度将趋于式(6.31)表示的平衡值。与指定系统处于平衡状况相反,人们常把电子限制为麦克斯韦分布的。应用式(6.31)描述辐射的发射,其必要和充分条件就是电子为麦克斯韦分布的。这种情况经常出现,式(6.31)往往用来描述源函数,甚至用于远离完全平衡系统的情形。

考虑如何计算谱辐射强度的角度依赖关系时,式(6.29)中 τ_ν 的定义变得不切实际,因为对于同样厚度的物质层,如果辐射传播方向不同,则会得到不同的 τ_ν 值。在物理量只沿 z 坐标轴变化的平面系统中,实际上可定义 $d\tau_\nu = -\chi_\nu dz$,因此有 $d\tau_\nu = -\mu\chi_\nu ds$,这里 $\mu = \cos\theta$,θ 是相对于 z 轴的极角。这样,式(6.25)就成为

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{6.32}$$

下面假设热发射的关系由式(6.23)给定，散射各向同性而且是弹性的(或“相干”的)，因此，散射不改变光子的能量。从而得到

$$\eta_\nu = \kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu \tag{6.33}$$

因而有

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \tag{6.34}$$

应用 η_ν 的定义，由式(6.25)可得出

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \kappa_\nu(B_\nu - I_\nu) + \sigma_\nu(J_\nu - I_\nu) \tag{6.35}$$

把上式在频域上积分，得到

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{\mathrm{R}}}{\partial t} + \frac{\partial I_{\mathrm{R}}}{\partial s} = \int \kappa_\nu(B_\nu - I_\nu)\mathrm{d}\nu + \int \sigma_\nu(J_\nu - I_\nu)\mathrm{d}\nu \tag{6.36}$$

略去上式右部的第二项，这常是有意义的近似，其原因是由于辐射强度分布接近各向同性，因而 $J_\nu = I_\nu$；或者由于系统为光学薄的，I_{R} 的改变主要通过辐射发射；再者可能是散射低于吸收的缘故(然而在某些天体物理系统中散射高于吸收，尤其是辐射中以线谱辐射为主的情形)。在静态极限下并做上述近似之后，有

$$\frac{\partial I_{\mathrm{R}}}{\partial s} = \kappa(B(T) - I_{\mathrm{R}}) \tag{6.37}$$

式中 κ 为非线性平均的吸收系数，近似于后面将定义和讨论的普朗克平均不透明度。

为了确定到达应用中感兴趣的某个表面处的辐射强度(或其积分)随角度的变化，可能需要使用式(6.37)。一个重要的例子是，从光学薄物质层中透出时辐射强度的计算。

如果不做上述近似，直接把式(6.36)在全部立体角范围上积分，则其右部第二项恒为零，这相当于把式(6.25)在角度范围内取零阶矩。在笛卡儿坐标系中可得

$$\frac{\partial E_{\mathrm{R}}}{\partial t} + \nabla\cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = 4\pi\int_0^\infty \kappa\nu(B_\nu - J_\nu)\mathrm{d}\nu \equiv 4\pi\kappa(B - J_{\mathrm{R}}) \tag{6.38}$$

上式把对辐射的总体吸收率同辐射通量和辐射能量密度的变化联系起来。还应注意到，$\nabla\cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \int(\partial I_{\mathrm{R}}/\partial s)\mathrm{d}\Omega$。虽然式(6.38)在概念上类似于流体力学中表示质量守恒的连续性方程，后者把密度的时间变化率同质量通量散度和质量源关联起来，但该式实际上是一个关于辐射能量的方程。从这个结果中取消散射项，十分方便且具有直观意义。辐射能量密度往往可以忽略，此时式(6.38)即变为一个关于 $\nabla\cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的相当简单的方程式。还应着重指出，式(6.38)仅对静止介质成立。如第 7 章中所述，运动介质中同时存在对流能量通量和与辐射有关的 $p\mathrm{d}V$ 功。

式(6.38)还定义了一个吸收不透明度 κ，可以看出 κ 又是 κ_ν 在频域上的一个非线性平均量，是简单计算中可以见到的几种相仿的平均量之一。式(6.37)的平均量也记为 κ，虽然

它只表示($B_\nu - I_\nu$)的而不是($B_\nu - J_\nu$)的非线性平均量。为什么在这里不区分这两个量的符号？原因是实际中很少会去计算这些平均量。遗憾的是，人们不能按照其定义式来计算 κ，除非先求解辐射输运问题知道了 I_ν 和 J_ν。为了解决实际问题，必须对 κ 做某种近似。对于可以应用式(6.37)和式(6.38)的系统来说，可表示为

$$\kappa \approx \kappa_{\mathrm{p}} \equiv \frac{1}{B(T)}\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu \mathrm{d}\nu \tag{6.39}$$

式中 κ_{p} 为普朗克平均不透明度，它只与物质的平衡态性质有关，其值通常列为表格，也可以采用近似函数的形式。

当然，也可以对式(6.37)或式(6.38)进行迭代求解，先假定 $\kappa = \kappa_{\mathrm{p}}$ 得到辐射强度的初始解，再由式(6.37)或者式(6.38)求得 κ 的一次近似解，如此循环进行迭代解。如果确实要这样做时，最好开始就采用更先进的辐射输运计算方法。

可以对辐射输运方程取高阶矩，以确定辐射输运的其他特性，但是下面不这样做。作为参考，将概括和讨论作为式(6.25)在角度方面一阶矩的辐射动量输运方程，把式(6.25)在角度和频域上积分，给出

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}}{\partial t} + \nabla\cdot \underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \int_{4\pi}(\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu)\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.40}$$

此式左部第一项仅在相对论运动情形才比较重要，而且辐射发射几乎总是各向同性的，取平均后为零，因此，大多数情况下式(6.40)可以做很大简化。把此式右部第二项积分看作辐射力密度 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}}$，表示辐射给予物质的动量，即有

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \int_{4\pi}(\chi_\nu I_\nu)\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.41}$$

对于各向同性散射在爱丁顿近似下，谱辐射力密度 $\boldsymbol{F}_\nu$ 与谱辐射压力 p_ν 和谱辐射能量密度 E_ν 之间的关系可写成

$$\nabla p_\nu = \nabla(f_\nu E_\nu) = -\frac{\chi_\nu}{c}\boldsymbol{F}_\nu \tag{6.42}$$

这是一个直觉上比较明显的结果。还应指出，上述这组近似假设对应于辐射输运的扩散近似，这种近似可认为辐射能量通量与辐射能量密度的梯度成正比。

习题 6.6

计算辐射输运方程的矩，推导得出式(6.38)和式(6.40)。

辐射方程组是否封闭的情况，等同于粒子方程组的类似状况。本书前面提及，每一个矩方程都会引入下一个高阶矩，因此必须添加一些假设，诸如关于辐射的“物态方程”等，以便使方程组封闭。采用把辐射压力和辐射能量密度关联起来的爱丁顿因子，也是使方程组封闭的一种方法。

寻求辐射输运方程与时间无关的解，既简便又值得去做。首先注意到式(6.25)具有一个积分因子恰好是 $\exp(-\tau_\nu)$，利用它可以积分并简化这个方程，得出

$$I_\nu(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{n}s) = \mathrm{e}^{-\tau_\nu(0,s)}I_\nu(\boldsymbol{x}_0) + \int_0^s S_\nu(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{n}s')\mathrm{e}^{-\tau_\nu(s',s)}\mathrm{d}s' \tag{6.43}$$

式中 $\tau_\nu(a,b)$ 为光学深度，是 χ_ν 沿着 $\boldsymbol{n}$ 从 $s=a$ 到 $s=b$ 的积分。

式(6.43)表明，从初始点 $\boldsymbol{x}_0$（此处 $s=0$）出发经过传播距离 s 后的辐射强度，即是从 $\boldsymbol{x}_0$ 透射过来的强度加上一个积分之和，该积分表示传播途中每个中间点上发射并经过衰减后的辐射贡献。

对于平面系统，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}\tau_\nu=\chi_\nu\mathrm{d}z$，设在指定的 z 坐标处 $\tau_\nu=0$，则可得出

$$I_\nu(\tau_\nu) = \mathrm{e}^{-(|\tau_\nu-\tau_0|/\mu)}I_\nu(\tau_0) + \int_{\tau_\nu}^{\tau^0} S_\nu(\tau')\mathrm{e}^{-(|\tau'-\tau_\nu|/\mu)}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mu} \tag{6.44}$$

此式实质上全同于前面一个方程，只是这里通过引入 $\mu=\cos\theta$，考虑了光学深度随角度的变化。对于与总辐射强度做近似处理相关的许多应用来说，可以定义 $\mathrm{d}\tau=\kappa\mathrm{d}z$，积分式(6.37)，得

$$I_\mathrm{R}(\tau) = \mathrm{e}^{-(|\tau-\tau_0|/\mu)}I_\mathrm{R}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_\nu} B(\tau')\mathrm{e}^{-(|\tau-\tau'|/\mu)}\frac{\mathrm{d}\tau'}{\mu} \tag{6.45}$$

下一章中将用到此式。

6.2.3 天体物理学和实验室研究中使用的不透明度

不透明度数据通常列成比不透明度值的表格，也可以用密度和温度的幂次律公式来近似。在对高能量密度物理有意义的密度范围中，比不透明度对密度的依赖关系通常较弱。图6.4表示铝的普朗克平均比不透明度，数据取自于一个标准的表格式物态方程（即美国洛斯阿拉莫斯国家实验室的SESAME表，Table13710）。这种物态方程表格有许多有意义的特点：

(1) 注意到在对于高能量密度实验具有典型意义的密度范围（$1\mathrm{g/cm^3}\sim100\mathrm{g/cm^3}$）和温度范围（10eV ~ 1keV）中，不透明度对于密度的依赖关系很弱，这是下面给出的标准公式的依据。

(2) 注意到在与二次电离有关的（产生类氖铝）温度30eV附近的吸收峰很强，以至于在这个温度范围中不透明度与密度的依赖关系也很弱，即使在更低密度之下也是如此。

(3) 高温低密度下各曲线分离，不透明度变成与密度平方成正比，这表明二体相互作用是吸收和发射的主导机制。

对于普朗克平均比不透明度 κ_m 还有一些近似公式，这是根据标准的SESAME物态方程表格拟合数据得到的：

$$\begin{cases} K_\mathrm{m} \approx 2\times10^5 T^{-1}\,(\mathrm{eV})\mathrm{cm^2/g} \quad (\mathrm{CH}) \\ K_\mathrm{m} \approx 3\times10^6 T^{-1}(\mathrm{eV})\mathrm{cm^2/g} \quad (\mathrm{Al}) \\ K_\mathrm{m} \approx 3\times10^9 T^{-1}(\mathrm{eV})\mathrm{cm^2/g} \quad (\mathrm{Xe}) \end{cases} \tag{6.46}$$

从上式可知，低密度物质中不透明度的标度关系各不相同，因为这里的吸收和发射是由束缚－束缚跃迁和线谱辐射所主导的。来自低密度天体物理等离子体的净发射通常用**冷却函数**描述，冷却函数 Λ 是每单位体积、单位电子密度和单位离子密度的功率损失，因此单位体积的功率损失可以写成 $n_\mathrm{e}n_\mathrm{i}\Lambda$，$\Lambda$ 具有 $\mathrm{erg\cdot cm^3/s}$ 或等价的单位。7.2.2节中的讨论指出，吸收不透明度 κ 与冷却函数的关系是 $\kappa=n_\mathrm{e}n_\mathrm{i}\Lambda/(2\sigma T^4)$。假设典型数据为 $n_\mathrm{e}\sim n_\mathrm{i}\sim10/$

cm^3，$\Lambda \approx 10^{-22} erg \cdot cm^3/s$ 以及 $T = 10eV$，得出 $\kappa \approx 5 \times 10^{-37} cm^{-1}$，或者约 $10^{-19} parsec^{-1}$（译注：parsec（秒差距）是天体物理的距离单位，即视差为 1″的距离，等于 3.259 光年）。图 6.5 表示典型的天体物理冷却函数（基于 Sutherland 和 Dopita 的研究结果），这些具体结果由假定离子状态分布处于由碰撞确定的平衡中的模型所得出。

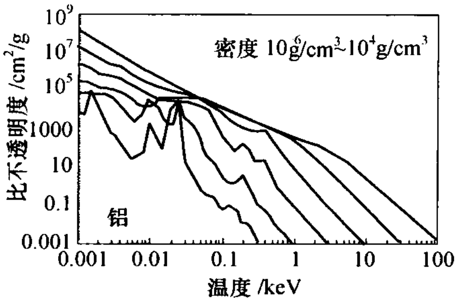


图 6.4 铝的普朗克平均比不透明度与电子温度的关系
从下至上各曲线表示密度值，依次为 $10^{-6}g/cm^3$、$10^{-4}g/cm^3$、$10^{-2}g/cm^3$、$1g/cm^3$、$10^2g/cm^3$ 和 $10^4g/cm^3$
（此图基于 LANL SESAME Table 13710 的数据画出）

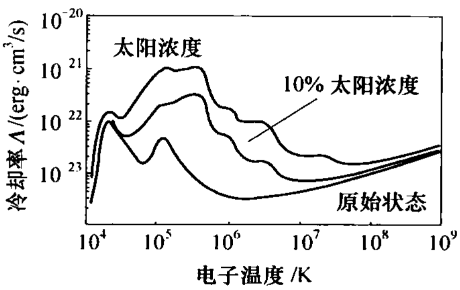


图 6.5 典型的天体物理冷却函数
各条曲线大致形状相近，但最低点位置与 He 以上元素的密度有关。标注"原始状态"的曲线只有 H 和 He，图中已注明其余两条曲线中较重元素分别为太阳浓度或 10 太阳浓度，本图引自 Sutherland and Dopita。

实验室中能够在相同于某些天体物理系统中出现的条件下测量确定物质的不透明度，这些工作对于天体物理研究极为重要。可以看出，对于物态方程而言，能在与天体物理环境相同的条件下进行测量，也就是我们能够冀望的一切了。不透明度的情况要稍好一些，因为不透明度基本上只依赖于原子内部的量子力学过程（相比之下，物态方程还部分地依赖于原子团之间的化学相互作用），而且在计算中量子力学过程中能够可靠地从一种原子到另一种原子进行标度，尤其对于等电子数序列中的各种原子更是如此，在这些原子中附属于原子核的电子个数相同。当各种原子的核电荷差别变得很大时，这种标度可能被破坏，从而应在计算中引入新的因素（如相对论效应）。总的结论是：在确定哪些物质的不透明度可以测定时，实验室的测量技术是最关键的。另外，如果相关计算可以进行缩比实验校核，则这些实验结果可以验证相应的计算方法是否适用于计算其他元素的不透明度。

穿过星球或者超新星的能量辐射输运是三维复杂过程的一类例子，很难对这种过程建模，而且也不能依靠静态实验来估算。爆炸中的星球发生均匀膨胀，其径向速度 v、径向距离 r 和时间 t 之间的关系是 $v = r/t$，导致每个辐射区域都处于某个速度梯度之中，在所有方向上看到的等离子体都是后退的。换言之，相对于发射区域来说吸收区域总是红移的。任何两个位置的相对运动都产生多普勒频移，使得任何具体的发射谱线发生频移，与其原来的频率失谐，但可能与其他谱线形成共振。从一个区域中发射的光子逸出星球时，必须先通过对其吸收概率低的不透明度“窗口”。适用的辐射输运计算，应当包括由于膨胀导致的在不透明度谱线和吸收边沿位置处的多普勒频移效应。由于在整个系统的计算机模拟中加入完

全正确的辐射输运处理方法几乎不可能办到，于是实验室观察就显得具有很大价值，人们需要通过实验例证来确认（或者否认）各种可能的途径。

编写本书时人们已使用激光器或 Z 箍缩装置作为能源进行了很多实验，测量了温度 10eV ~ 75eV，密度 $10\mathrm{mg/cm^3} \sim 50\mathrm{mg/cm^3}$ 范围中局域热动力学平衡状况下一些物质（如 Fe、Ge、Na、Al）的不透明度。前面已论述获得局域热动力学平衡条件的困难所在，这也是所有这类实验的关键问题。最普通的实验途径使用黑腔，提供一个平衡辐射的环境（见 8.2 节），避免高能电子或强烈的非热发射（这两个因素的其中一个都会改变样品的状态）。黑腔温度的测量是很重要的细节。待测样品周围用低 Z 物质包覆，以防止稀疏波到达样品，并约束样品使其密度保持均匀缓慢变化。在选定时刻启动一个产生高能辐射的源，使辐射通过一个小孔进入黑腔辐照样品，再经过另一个小孔传出黑腔。对通过黑腔的和经过样品的辐射能谱进行测量，就能够确定经过样品的透射谱以及总的谱不透明度。

作为一个 1992 年进行的实验例子，图 6.6 表示 $T_e = 59\mathrm{eV}$，$\rho = 11\mathrm{mg/cm^3}$ 条件下铁的不透明度测量结果。这里使用掺杂物钠的谱线测量电子温度，一维 X 射线照相的空间图像给出了铁薄膜样品（两面有包覆层）的密度。在已知电子温度 T_e 和样品密度 ρ 的条件下，测量铁样品的不透明度。图 6.6 所示的实验结果与使用不同近似的若干不同的不透明度计算结果进行了比较。这项研究得出的结论是，毫无疑义地证实了不透明度计算中需要以分裂计算方式加入量子力学项。忽略此点的模型（如 DCA（panel e）），严重低估了不透明度。

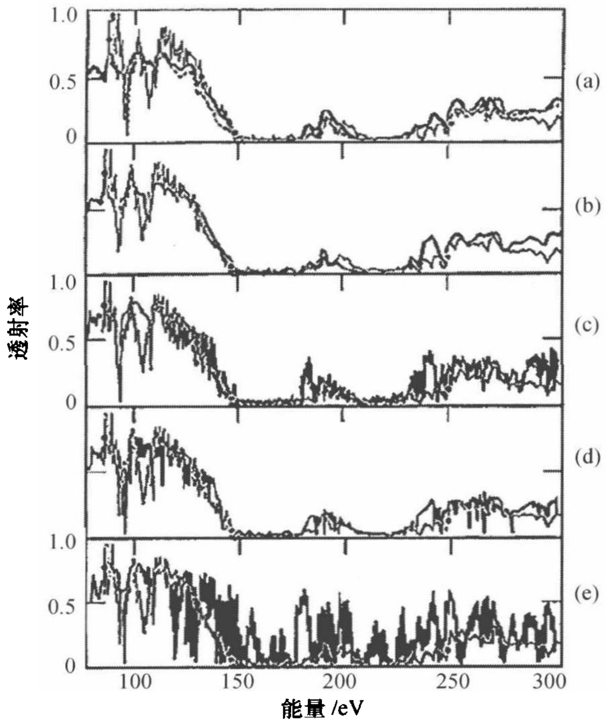


图 6.6　铁样品的透射谱线以及实验数据（灰线）与计算结果的比较

样品为 80.2% 的 Fe 加上掺杂物 NaF 的等离子体，密度为 $0.0113\mathrm{g/cm^3}$，在温度 59eV 下的平均面密度为 $339\mu\mathrm{g/cm^2}$。Springer 等（1992）论文中对各种计算模型已作描述，本图获准复制。

6.2.4　平衡扩散极限下的辐射输运

本节的讨论并不要求假定辐射与物质处于平衡之中，也不需要假定辐射平均自由程较短，这就是说，并未假定系统是局域热动力学平衡的。对于一些系统局域热动力学平衡的描述仍是恰当的，如在星体内部或者在已创建平衡区域的实验中。但是还有许多的情形，这种描述也许是通过实际可行的计算得到近似答案的唯一途径。为了描述这些系统，将把辐射的性质看作光学深度的函数，温度可以缓慢变化，但至少应当慢到在一个辐射平均自由程距离上（即χ_ν^{-1}）温度变化可以忽略的程度。局域热动力学平衡之下，如同电子呈麦克斯韦分布的其他情形那样，辐射源是热源，即 $S_\nu(\tau_\nu)=B_\nu(\tau_\nu)$。如果温度不变化，则式(6.32)的解是 $I_\nu(\tau_\nu)=B_\nu(\tau_\nu)$，导致 $J_\nu(\tau_\nu)=B_\nu(\tau_\nu)$，并且式(6.35)意味着不存在辐射通量。但是如果另做假设认为存在温度梯度，在上述意义下该梯度很小，以至于可以把 S_ν 相对于某个初始值 τ_ν 做泰勒级数展开，即有

$$S_\nu(\tau'_\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^n}\frac{(\tau'_\nu-\tau_\nu)^n}{n!} \tag{6.47}$$

方程式(6.44)因此可以积分，令 $\tau_\nu\to\infty$ 则得到 $I_\nu(\tau,\mu)$，这里再次记 $\mu=\cos\theta$，得出

$$I_\nu(\tau_\nu,\mu)=B_\nu(\tau_\nu)-\mu\frac{\partial B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu}+\mu^2\frac{\partial^2 B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^2}+\cdots \tag{6.48}$$

注意到对于前向传播的辐射（$\mu>0$），如果 $\partial B_\nu/\partial\tau_\nu>0$，则 I_ν 小于 B_ν 的当地值，这个结果理应如此。根据 J_ν、p_ν 和 F_ν 的定义，得到

$$J_\nu(\tau_\nu)=B_\nu(\tau_\nu)+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^2}+\cdots \tag{6.49}$$

$$p_\nu(\tau_\nu)=\frac{4\pi}{3c}B_\nu(\tau_\nu)+\frac{4\pi}{5c}\frac{\partial^2 B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^2}+\cdots \tag{6.50}$$

$$F_\nu(\tau_\nu)=-\frac{4\pi}{3}\frac{\partial B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu}-\frac{4\pi}{5}\frac{\partial^3 B_\nu(\tau_\nu)}{\partial\tau_\nu^3}+\cdots \tag{6.51}$$

习题 6.7

从式(6.47)出发，推导式(6.48)～式(6.51)。

谱辐射通量展开式式(6.51)中首项是 B_ν 的一阶导数，与 B_ν 相比该导数较小。但是辐射通量等于光速 c 乘上辐射压力（或者 $c/3$ 乘上辐射能量密度），物质的能量通量却比物质的能量密度小好多，结果在辐射压力还远未显得重要的温度下，辐射通量就已较为重要了。如果 B_ν 仅是温度 T 的函数，T 随空间位置而变化，在式(6.51)中只保留第一项，则总辐射能量通量为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\frac{4\pi}{3}\left(\int_0^\infty\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\mathrm{d}\nu\right)\nabla T \tag{6.52}$$

此式涉及与前述普朗克平均不透明度和吸收不透明度不同的平均量，尤其是如下定义的 **Rosseland 平均不透明度：**

$$\frac{1}{\chi_{\mathrm{R}}}=\frac{\int_0^{\infty}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\mathrm{d}\nu}{\int_0^{\infty}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\mathrm{d}\nu}=\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)^{-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\mathrm{d}\nu \tag{6.53}$$

由上式可以得出

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\frac{4\pi}{3\chi_{\mathrm{R}}}\frac{\partial B}{\partial T}\nabla T=-\frac{16\sigma T^3}{3\chi_{\mathrm{R}}}\nabla T\equiv-\kappa_{\mathrm{rad}}\nabla T \tag{6.54}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 称为 Rosseland 热通量;κ_{rad}为辐射热输运系数。

此式只适用于平衡扩散的情形。还应指出,Rosseland 热通量是平衡热通量 σT^4 与一个小量的乘积,这个小量是每单位光学深度距离上温度变化的一个分数,这里定义为(3/16)χ_{R} 与距离的乘积。对于接近固体密度的一些物质,χ_{R}/ρ 的典型值(单位为 $\mathrm{cm^2/g}$)为

$$\begin{cases} X_{\mathrm{R}}/\rho\approx 2\times10^6\rho^{1/7}T^{-2}(\mathrm{eV}) & (\mathrm{CH})\\ X_{\mathrm{R}}/\rho\approx 3\times10^6 T^{-4/3}(\mathrm{eV}) & (\mathrm{Al})\\ X_{\mathrm{R}}/\rho\approx 2\times10^8 T^{-2}(\mathrm{eV}) & (\mathrm{Xe})\\ X_{\mathrm{R}}/\rho\approx 6\times10^6\rho^{0.3}T^{-3/2}(\mathrm{eV}) & (\mathrm{Au}) \end{cases} \tag{6.55}$$

上面这些数据引自 SESAME 物态方程表格,Au 的数据取自 Lindl 的文章。根据上面的数据,κ_{rad}对温度的标度关系为 $T^4\sim T^5$。天体物理情形中冷却函数具有负斜率,κ_{rad}的温度标度关系更快一些,为 $T^6\sim T^7$。

热扩散极限实际上受到比从上面推导中看出的更多限制。如果把式(6.49)的 J_ν 代入式(6.38),该式只假定了散射是各向同性的,如果再假设在温度梯度的尺度范围内不透明度的变化可以忽略不计,则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\frac{4\pi}{3}\nabla\cdot\left[\left(\int_0^{\infty}\frac{K_\nu}{X_\nu^2}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\mathrm{d}\nu\right)\nabla T\right] \tag{6.56}$$

如果散射不透明度远低于吸收不透明度,以至于 $\kappa/\chi_\nu\sim1$,则上式只是与式(6.52)一致的结果。这确实是一个奇妙的结果,因为平衡扩散的推导方法似乎十分平常,推导出式(6.56)的演算更为基本,但是仅得到了与散射较小情形一样的结果。对于这个自相矛盾问题的解释:如果散射远低于吸收,在出现温度梯度的情况下只能存在局域热动力学平衡状况;反之,光子将沿着密度梯度方向朝下输送,其速度远快于物质加热情形。这样,光子将驱使辐射"温度"偏离与物质温度相平衡的状况。如果自由-自由跃迁(特别是韧致和逆韧致过程)主导了辐射与物质的相互作用,吸收就会大于散射,高能量密度等离子体中经常这种情况。但是如果束缚-束缚跃迁主导了辐射与物质的相互作用,则散射成为主要过程,局域热动力学平衡很可能不会出现。

习题 6.8

推导式(6.56)并讨论得到的结果。

6.2.5 非平衡扩散和双温模型

上面讨论的结论是,可能存在辐射输运是扩散性的,但辐射与物质不处于平衡中的场

合。实际上，在实验室和天体物理中这种系统十分普通，对这种系统的最简单处理方法是把辐射输运当作扩散性的，但并不假定 $E_R=4\pi B(T)/c$，这里 T 为物质温度。这样，依据式(6.42)得出谱辐射通量为

$$\boldsymbol{F}_\nu=-\frac{c}{3\chi_\nu}\nabla E_\nu \tag{6.57}$$

以及总辐射通量为

$$\boldsymbol{F}_R=-\frac{c}{3}\int_0^\infty\frac{\nabla E_\nu}{\chi_\nu}\mathrm{d}\nu=-\frac{c}{3\bar{\chi}}\nabla E_R \tag{6.58}$$

此式同时定义了**平均不透明度** $\bar{\chi}$，该量也可近似看作 Rosseland 平均不透明度。

这种情形中将采用第 7 章的有关结果，包括流体运动和辐射 - 流体之间的能量交换。为此目的，从关于气体内能和辐射的方程式(7.4)中抽出辐射项，略去热传导，再使用式(6.58)表示辐射通量，取 $p_R=E_R/3$，并加入辐射与物质之间的能量交换项，最后得到

$$\frac{\mathrm{D}E_R}{\mathrm{D}t}-\frac{4E_R}{3\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot\left(\frac{c}{3\bar{\chi}}\nabla E_R\right)+4\kappa_p\sigma T^4-c\kappa_E E_R \tag{6.59}$$

式中 D/Dt 为对流导数算子(或称随体导数，见第 7 章)，并且

$$\kappa_E=\int_0^\infty\kappa_\nu E_\nu\mathrm{d}\nu\bigg/\int_0^\infty E_\nu\mathrm{d}\nu \tag{6.60}$$

是另外一种平均不透明度，其量级可能与 κ_p 相同。通常要给辐射指定一个"温度"，可以定义为 $E_R=4\sigma T_R^4/c$，这样式(6.59)就变成为关于辐射温度 T_R 的方程，即

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{D}(\sigma T_R^4)}{\mathrm{D}t}-\frac{4\sigma T_R^4}{3\rho c}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot\left(\frac{4\sigma T_R^3}{3\bar{\chi}}\nabla T_R\right)+\kappa_p\sigma T^4-\kappa_E\sigma T_R^4 \tag{6.61}$$

还有一个对应于气体内能的联立方程式，即

$$\rho\left(\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t}-\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\right)=4\kappa_E\sigma T_R^4-4\kappa_p\sigma T^4 \tag{6.62}$$

可以把此式看作纯粹流体动力学能量方程的推广，其中包括在与辐射交换中物质能量的产生和损失。

6.3　相对论辐射输运的考察

宇宙中有些系统如脉冲星外层或者辐照度为 10^{21} W/cm^2 的激光实验，显然是相对论的，但是大部分实验室和天体物理系统初看起来似乎明显是非相对论的。不过至少在两重意义下，这种认识往往是不正确的。首先，由于辐射谱线非常窄，归一化谱线宽度的量级一般为 10^{-4}，多普勒频移使得依靠线谱辐射并且速度低至 $10^{-4}c$ 的能量输运问题复杂化；其次，在观察者与流体之间或者同一流体不同部分之间的洛伦兹变换，引进了总量级为 v/c 的项，这里 v 是不同参考系之间的速度差。但是，非相对论输运方程的矩方程早已含有彼此相差为 v/c 的一些项，而且相当于 v/c 的一阶项有时会变成起主导作用的项(如当 $F_R/E_R<$

(v/c)时)。结果导致量级为 v/c 的相对论主项对辐射输运的贡献大小,可能变得与方程中的非相对论项一样。事实上,起到重要作用的项正是那些根据伽利略相对性原理就可看出的项。

在这里并不打算推导出相对论辐射输运方程组之间的所有关系,这是一项在 Mihalas 和 Mihalas 的书中及其所列文献中已完成的很繁重的工作。目的只是介绍相对论效应,并讨论其起因和所得出的关系式。

讨论相对论效应时,写出关联两种参考系中物理量的式子:

第一种参考系以下标 o 表示,是在流体中静止的当地参考系。在这种参考系中,辐射与物质的微观相互作用可以正确地由非相对论方程组描述,有时称这种参考系为本征参考系。例如,只是在这种参考系中由随机过程发射的辐射才是各向同性的。

第二种参考系没有专门的下标,以速度 v 相对于第一种参考系而运动。辐射强度的相空间包括辐射(或光子)的频率 ν 和方向 $\boldsymbol{n}$,多普勒频移和光行差分别为

$$\nu_o = \gamma_r \nu (1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}/c) \tag{6.63}$$

$$\boldsymbol{n}_o = \frac{\nu}{\nu_o}\left[\boldsymbol{n} - \frac{\gamma_r}{c}\left(1 - \frac{\gamma_r \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}}{c(\gamma_r + 1)}\right)\boldsymbol{v}\right] \tag{6.64}$$

式中 γ_r 为相对论收缩因子,$\gamma_r = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$。

从式(6.64)可以反解出 ν 为

$$\nu = \gamma_r \nu_o (1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}/c) \tag{6.65}$$

及

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nu_o}{\nu}\left[\boldsymbol{n}_o + \frac{\gamma_r}{c}\left(1 + \frac{\gamma_r \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}}{c(\gamma_r + 1)}\right)\boldsymbol{v}\right] \tag{6.66}$$

从辐射输运角度来看,上面这些式子有很多方面值得注意。首先,多普勒频移 ν 与方向 $\boldsymbol{n}$ 有关,因此从运动参考系观察,某个频带的当地发射似乎分布在一个频率范围内;其次,被测量到的辐射方向也与参考系有关,因此在当地参考系中为各向同性的发射,在另一个参考系中看来显得不是各向同性的。式(6.66)中出现众所周知的"聚束效应",因为当 γ_r 较大时,运动参考系中所观察到的辐射都处于 $\boldsymbol{v}$ 方向附近的小范围内。

利用相对论系统有助于鉴别哪个物理量是洛伦兹不变的,因为按这种方法进行两个参考系之间的参数转换极为便利。从式(6.65)和式(6.66)还可以证明

$$\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\Omega = \nu_o \mathrm{d}\nu_o \mathrm{d}\Omega_o \tag{6.67}$$

习题 6.9

证明式(6.67)。

另外,给定体积内的光子个数必定与参考系无关,根据这个道理可以得出一些对于辐射输运很有用的关系式:

$$I_\nu(\mu,\nu)/\nu^3 = I_{\nu o}(\mu_o,\nu_o)/\nu_o^3 \tag{6.68}$$

$$\eta(\mu,\nu)/\nu^2 = \eta_o(\mu_o,\nu_o)/\nu_o^2 \tag{6.69}$$

$$\nu\chi(\mu,\nu) = \nu_o\chi_o(\mu_o,\nu_o) \tag{6.70}$$

习题 6.10

根据式(6.68)~式(6.70)，证明辐射输运方程是相对论不变的。

作为参考，这里还应给出平面几何条件下从随同物质一起运动的参考系到相对于该物质以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的观察者所在参考系，关于 I_R 各阶矩洛伦兹变换的结果为

$$\begin{aligned} E_R &= \gamma_r^2\left(E_{Ro} + 2\frac{v}{c}\frac{F_{Ro}}{c} + \frac{v^2}{c^2}p_{Ro}\right) \approx E_{Ro} + 2\frac{v}{c}\frac{F_{Ro}}{c} \\ F_R &= \gamma_r^2\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)F_{Ro} + vE_{Ro} + vp_{Ro}\right] \approx F_{Ro} + vE_{Ro} + vp_{Ro} \\ p_R &= \gamma_r^2\left(p_{Ro} + 2\frac{v}{c}\frac{F_{Ro}}{c} + \frac{v^2}{c^2}E_{Ro}\right) \approx p_{Ro} + 2\frac{v}{c}\frac{F_{Ro}}{c} \end{aligned} \tag{6.71}$$

上面各式最右部的近似式给出了截止于一阶小量 v/c 的结果。

上面讨论的内容中，人们感兴趣的是一阶小量 v/c 意义下的相对论效应。本书不考虑强相对论效应。辐射输运方程式为相对论不变的事实，实际上并不像所希望的那么有用，因为在发射率和不透明度在角度、频率方面不再各向同性的参考系中，考虑问题很不方便，几乎总是把这些量作为当地参考系中物理量的函数来计算。因此，首先是寻求任意惯性坐标系中的谱辐射强度与当地参考系中等离子体性质之间的关系（在一阶小量 v/c 的意义下）。为此，取

$$\nu = \nu_o(1 + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c) \tag{6.72}$$

此式可以把运动坐标系中的发射率或不透明度与当地参考系中相同频率下的相应物理量关联起来，如

$$\chi(\boldsymbol{n},\nu) = \chi_o(\nu) - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)[\chi_o(\nu) + \nu_o(\partial\chi_o/\partial\nu)] \tag{6.73}$$

$$\eta(\boldsymbol{n},\nu) = \eta_o(\nu) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)[2\eta_o(\nu) - \nu_o(\partial\eta_o/\partial\nu)] \tag{6.74}$$

依据上面两式，可以写出惯性参考系中笛卡儿坐标表示的辐射输运方程，即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu(\boldsymbol{n},\nu)}{\partial t} + \boldsymbol{n}\cdot\nabla I_\nu(\boldsymbol{n},\nu) = \eta_o(\nu) - \chi_o(\nu)I_\nu(\boldsymbol{n},\nu) \\ &\quad + \left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)\left[2\eta_o(\nu) - \nu\frac{\partial\eta_o}{\partial\nu} + \left(\chi_o(\nu) + \nu\frac{\partial\chi_o}{\partial\nu}\right)I_\nu(\boldsymbol{n},\nu)\right] \end{aligned} \tag{6.75}$$

习题 6.11

推导式(6.73)、式(6.74)和式(6.75)。假设发射和吸收的主导机制是连续谱发射或线谱发射，试讨论上面一般性的表达式，即式(6.75)以 v/c 为小量时的极限情形。

已得到式(6.75)，实现了把惯性运动参考系中谱辐射强度与当地参考系中等离子体性质联系起来的目的，在当地参考系中，诸物理量在角度方面是对称的。取式(6.75)的各阶矩，如同前述，可以得到关于辐射能量和辐射动量的方程组，即

$$\frac{\partial E_{\mathrm{R}}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\int_0^{\infty}\left[4\pi\eta_o(\nu)-c\chi_o(\nu)E_{\nu}\right]\mathrm{d}\nu+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\int_0^{\infty}\left(\chi_o(\nu)+\nu\frac{\partial\chi_o}{\partial\nu}\right)\boldsymbol{F}_{\nu}\mathrm{d}\nu \tag{6.76}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}}{\partial t}+\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}}=\frac{-1}{c}\int_0^{\infty}\chi_o(\nu)\boldsymbol{F}_{\nu}\mathrm{d}\nu+\frac{4\pi\boldsymbol{v}}{c^2}\int_0^{\infty}\eta_o(\nu)\mathrm{d}\nu+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\int_0^{\infty}\left(\chi_o(\nu)+\nu\frac{\partial\chi_o}{\partial\nu}\right)\underline{\boldsymbol{P}}_{\nu}\mathrm{d}\nu \tag{6.77}$$

与式(6.38)比较,式(6.76)右部第二项是新的但很重要的项。例如,在扩散状况下,该式右部第一项被积式中两个部分近似处于平衡之中,它们之间存在差别仅是由于运动参考系和当地参考系之间存在相对论偏移 E_{ν} 的缘故。第一项中两部分相减后的净余值与第二项同量级。

研究以固定速度相对于等离子体中特定体积运动的惯性参考系中的辐射,这种能力也许是用得到的,但实际上对于解决典型的辐射流体动力学问题来说还不够充分,真正需要的始终是处理当地参考系中辐射的能力。在当地参考系中发射率和不透明度都是各向同性的,即使等离子体速度随着位置变动时也是如此。当辐射在等离子体中传播时,在连续地变换的参考系中进行的分析,称为在**随动坐标系**中的分析。这个名词的确有些误导,因为它并不表示固定的参考系,因为任何给定的参考系可能处于加速之中,因而不是惯性参考系。然而,“随动坐标系”表示一个连续变化的、但在当地等离子体中始终是静止的参考系序列。这样做的效果是,在辐射输运方程中引入了一些与当地流体速度 $\boldsymbol{u}$ 当地流体速度的导数和当地加速度 $\boldsymbol{a}$ 有关的项。这里不做有关的推导(可以参看 Mihalas 和 Mihalas 的书),下面直接写出辐射输运方程的头两个矩方程,即

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{E_{\mathrm{R}o}}{\rho}\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}o}+\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}o}:\nabla\boldsymbol{u}+\frac{2}{c^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}o}=\int_0^{\infty}\left[4\pi\eta_o(\nu_o)-c\chi_o(\nu_o)E_{\nu o}\right]\mathrm{d}\nu_o \tag{6.78}$$

$$\frac{\rho}{c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}o}}{\rho}\right)+\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}o}+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}o}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\frac{1}{c^2}(E_{\mathrm{R}o}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}o})=-\frac{1}{c}\int_0^{\infty}\chi_o(\nu_o)\boldsymbol{F}_{\nu o}\mathrm{d}\nu_o \tag{6.79}$$

上面两式中通过对流导数被 ρ 除和含有张量 $\nabla\boldsymbol{u}$ 的项,已把前述速度项进行了紧凑的表达。$\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}o}:\nabla\boldsymbol{u}$ 是两个张量的双点乘记号,也可以写成 $(\underline{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{R}o}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}$。上面两个方程式只精确到一阶小量($u/c$)的程度。Mihalas 和 Mihalas 书中给出了特殊相对论非加速极限下更加普遍的结果。

把式(6.78)与式(6.38)及其推导进行比较,可以看出式(6.38)是式(6.78)在各向同性散射的静止介质情形中的简化。这两个方程中包含 ρ 和 $\boldsymbol{u}$ 的项,来自由流体运动引起的辐射能量通量以及辐射与流体相互做的绝热功。本来可以从非相对论的推导中得到这些项,但是不能确信这样做的正确性。幸好对于 $u\ll c$ 的系统伽利略变换的直观感觉已充分管用。如上所述,这些效应也许不能忽略,尤其某些场合下 $uE_{\mathrm{R}o}$ 可能超过 $F_{\mathrm{R}o}$。为了恰当地处理高速度系统中的辐射,可能需要对所考察状况下辐射输运问题的推导过程再进行思考。

习题 6.12

把式(6.78)改写为守恒方程的形式,并讨论所得到各项的意义。

第 7 章　辐射流体力学

恰当地说，人们从未直接经历过辐射流体力学现象，也就是辐射直接参与系统中流体动力学演化过程的现象。然而，我们确实感受到辐射热输运的一些后果，譬如在太阳辐射的加热作用下潮湿路面上方升起的雾气。还知道，太阳帆等一些系统中辐射可以直接引起物质的运动。但是将会看到，发生辐射流体力学现象的环境温度具有几百万摄氏度，所以总处在我们能够直接经历的范围之外。

人们很想了解在什么场合下辐射对流体动力学过程发生重要的影响，这或许发生在辐射通量变得相当于物质能量通量时，或许发生在辐射压力变得相当于物质压力时。因此，首先的目标是考察在什么情况下辐射流体力学现象是事关重要的。

为了用简单的计算找出辐射可以影响流体动力学过程的条件，必须先做一些假设。假定电子温度与辐射温度相当并等于 T；如果离子温度比较重要（通常并非如此），还要假定离子温度与 T 相差不是太大。进一步假定所考察的是光学厚的系统，这个条件对于确定辐射通量并且保持这几种温度彼此相当是至关重要的。在上述假定条件下，辐射通量为 σT^4。依据式(2.4)可以估算物质的能量通量为 $\rho u[\varepsilon+(u^2/2)+(p/\rho)]$，其中 u 是某特征速度，这里约定取为声速 c_s，任何其他合理的特征速度都应当接近于 c_s，所以如何选取特征速度对后面的结果没有影响。物质的比内能 ε 采用第 3 章中讨论的类氢模型。作为专门的条件还要指定一个温度值，假定高于此温度时辐射通量将成为主导的。比较式(6.20)的辐射压力和式(3.1)的物质压力，则可以类似地指定另一个温度值，高于这个温度时辐射压力将成为主导的。

习题 7.1

进行上述演算，比较纯氢与图 7.1 所示 C_1H_1 在高温下的行为。

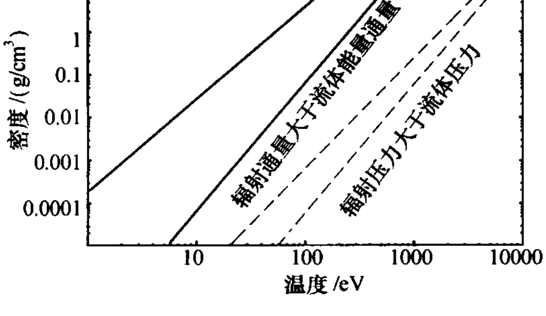


图 7.1　辐射流体力学的状况

（灰线表示 Xe，黑线表示 C_1H_1）

图 7.1 表示对于 C_1H_1 进行上述计算的结果，这里假设 C_1H_1 已完全电离，并且 Xe 的平均电离度为 $Z=0.63\sqrt{T}$。在图 7.1 实曲线右边的区域中，辐射通量大于物质能量通量；在图 7.1 虚曲线右边的区域中，辐射压力大于物质压力，也就是第 3 章中简短讨论过的辐射为主导的状况。还可以看到，Xe 比 C_1H_1 更容易成为辐射主导，因为表示 Xe 的灰线位于左面温度较低的区域。这是不足为奇的，Xe（氙）的相对原子质量 $A=131.3$，核电荷 $Z_{nuc}=54$，在图 7.1 所示的温度范围中，Xe 离子仍拥有 s、p、d 和 f 等壳层的电子，存在很多产生 X 射线的跃迁可能性。相比之下 C 只有 6 个电子，并已假定 C_1H_1 完全电离，即使适当地考虑碳的内能，图中的黑实线也只是稍微向右移动一些而已。且不管这些细节，总之可以看到在几十电子伏特的温区中辐射通量将变得重要，而确定其为主导范围的准确温度值将与物质行为的细节有关。在几百电子伏特温度下，等离子体将成为辐射主导，这种转变的准确温度值同样与等离子体行为的细节有关。在等离子体密度为 1 g/cm^3 左右的重要情形，大约在 2 keV 温度下等离子体可成为辐射主导。

星球内部包含辐射影响流体动力学过程的区域。星球的实质性行为是在其内核区域释放能量，然后通过其表面把能量辐射出来，因此存在辐射流体力学区域是很自然的，必然导致辐射通量大于物质能量通量，例如，太阳内部就是如此。图 7.2 表示太阳的切开剖面模型，内部存在对流区，这是由于辐射的扩散速度较慢，仅仅依靠这个机制不足以把太阳内部核反应产生的能量及时输运到太阳表面。较大较热的星球具有辐射压力大于物质压力的内部区域。另外，所有的超新星的星体内部都已加热到辐射为主导的状况，而且在因体积膨胀导致充分冷却之前一直处于这种状况。诸如中子星和黑洞区域等稠密天体物理环境中，辐射可能成为强主导甚至相对论的。本章不考虑相对论情形，因为从目前的实验室实验到进入这种状况还有较远距离。

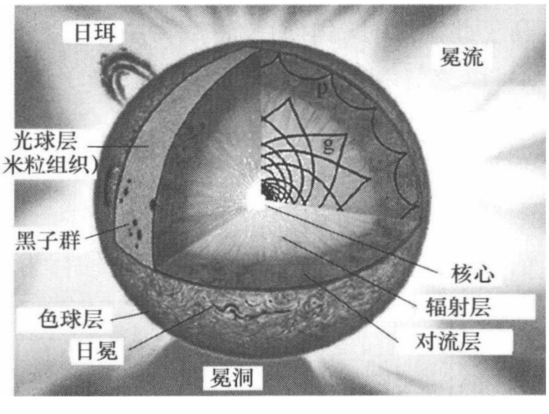


图 7.2　太阳的切开剖面图

（太阳内核区发生聚变，释放的能量通过辐射区内的辐射输运向外传播，驱动对流区内的辐射流体力学对流。本图经许可引自条目“Sun”，Encyclopedia of Planetary Sciences，Chapman&Hall，1997）

星际天体物理系统包括星际介质、星际冲击波和分子云团，其密度比图 7.1 所示范围 10^{-15}级以上。因此，把该图的图线延伸可知：这类系统应处于辐射主导的状况。但是，这类星际天体物理系统不满足关于图 7.1 的一个关键性假定，它们总具有很小的光学深度。光学薄系统中发出的辐射通量（如热发射）为 $\kappa d\sigma T^4$，这里 κ 为系统的吸收不透明度，d 为系统

的尺寸。然而，许多光学薄的系统（尤其是天体物理系统）主要产生线谱发射，此时 κd 将是在光学深度和热光谱的谱变化范围上的适当平均值，κ 与冷却函数 Λ 的关系将在 7.2.2 节中讨论。进而在低密度下，不透明度随密度的平方而下降，同时物质能量通量只随密度呈线性下降。这种情形下，进入辐射主导状况所需要的温度必定随密度下降而上升。令人奇怪的是，这种关系把辐射通量变得重要，其对应的冲击波速度提高到 100km/s 以上，正处于使用泡沫或稠密气体的实验室实验的工作参数范围。如果光学深度不大，并且缺少辐射源或不存在边界，则意味着辐射“温度”仍处于与电子温度解耦并远低于电子温度的状况，因而星际天体物理系统中的辐射压力永远不会超过物质压力，并表明实验中若要达到辐射主导状况，存在着内在的实质性困难。

但是即使在密度低于 $10^{-20}\mathrm{g/cm^3}$ 的情形，辐射通量对上述系统流体动力学行为的影响有时仍然很重要。当物体相互作用中的能量输入（如功 $p\mathrm{d}V$）变得低于辐射冷却作用时，就可能出现这种情况。天体物理冲击波压缩并加热它所冲击的物体，但当冲击波掠过之后通常不再有能量输入。受冲击的物质发出辐射而冷却，但需要经过较长的时间。超新星作用下产生的受冲击物质层经受驱动的时间较长，可以在爆炸形成的热“气泡”的压力作用下增加自身的能量。但当驱动过程逐渐结束，该物质层随之通过辐射发生冷却，温度逐渐量级地下降，密度则量级地上升。本章后面在考察光学薄的辐射冲击波时，将讨论这些天体物理现象的动力学机制。

7.1 辐射流体力学方程组

我们首先推导考虑高能量密度状况下辐射流体力学现象所需的方程组。第 2 章中简单的方程组（式(2.27)和式(2.28)），对于考虑高能量流体和等离子体中可能出现的各种过程的有关贡献十分有用，譬如在许多数值模拟计算编码中包括了这样的过程。但是对于简单计算来说，这个方程组几乎不实用。本章将忽略黏性效应，一般还忽略热传导，因为在大多数很热的以至于辐射效应很重要的系统中，黏性和热传导所起的作用十分有限。我们只考虑与最简单的辐射输运模型有关的事情，但包括一些需要使用更加复杂模型进行确切描述的情形，Mihalas 和 Mihalas 的书在更宽广的范围中考察了这些模型。

7.1.1 基本方程组

首先把辐射看作能够携带动量和能量的一种流体。当辐射变得很重要时，这种处理方法相当于在等离子体中添加了一个流体组分。对于具有各向同性辐射场的非相对论系统，动量方程仍然十分简单，在这种极限下与流体的动量相比较，辐射的动量可以忽略不计。各向同性辐射场对物质的作用可以用标量辐射压力的梯度表述，因此动量方程为

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\nabla(p+p_{\mathrm{R}}) \tag{7.1}$$

式中 p_{R} 为标量辐射压力。

实验室系统中通常不再有其他重要的力，但是在天体物理问题中可能还有其他的力

(如重力),此时式(7.1)右部还有添加的项。

为了得到有用的能量方程,需要把式(2.13)和式(2.14)加以推广,首先把式(2.28)重新排列,去除与黏性有关的项,得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho\varepsilon+E_{\mathrm{R}}\right)+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{u}\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)+(E_{\mathrm{R}}+p+p_{\mathrm{R}})\boldsymbol{u}\right]=-\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{Q}) \tag{7.2}$$

如果系统中存在重力之类的附加力,则上式中与势能和功有关的项中还要引入相应的项。注意到这个方程式基本上只涉及辐射能量密度的非相对论的伽利略处理,尤其是以速度 $\boldsymbol{u}$ 做对流运动时。对于强相对论的流动速度(或参考系)来说,式(7.2)确实不能严格成立,但在6.3节中已看到此式在一级小量(u/c)的意义下是准确的。

把动量方程两边与 $\boldsymbol{u}$ 做点乘,得到机械能量方程为

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\left(\frac{u^2}{2}\right)=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla(p+p_{\mathrm{R}}) \tag{7.3}$$

式中采用通常使用的记号,以 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 表示全导数(或对流导数)。式(7.2)减去式(7.3),再把有关密度导数的项集合在一起,应用连续性方程即可看出这些项彼此相消为零。以连续性方程中有关的项代替 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$,得出关于流体内能和辐射能的方程式,即

$$\rho\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t}+\frac{\mathrm{D}E_{\mathrm{R}}}{\mathrm{D}t}-\frac{E_{\mathrm{R}}+p+p_{\mathrm{R}}}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{Q}) \tag{7.4}$$

重新排列上式可以得到若干有用的形式,其中之一适用于涉及总能量密度的场合,即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\varepsilon+E_{\mathrm{R}})-\frac{\rho\varepsilon+p+E_{\mathrm{R}}+p_{\mathrm{R}}}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{Q}) \tag{7.5}$$

我们至此所做的假设只适合于所考察系统不是相对论的,而且尚未对物态方程做任何假定。几乎在所有的应用中,都能从式(7.5)中去除外体力项 $\boldsymbol{Q}$,但这里仍保留此项,因为数学上这样做很简单。同时还要指出,上述方程组中的辐射量形式上应当在随流体一起运动的参考系(即6.3节中讨论的随动参考系)中考虑。对于可以用上述方程组表述的那些问题,至少在外部观察者不需要考虑究竟从该系统中探测到什么参数的情形,一般可以忽略参考系之间的差别。

如果压力和能量密度之间存在简单的关系,式(7.5)就可以表示成大为简单的形式。下面探讨这种可能性。一方面若辐射压力可以忽略不计,物质是多方气体,则有 $\rho\varepsilon=p/(\gamma-1)$,式(7.5)左部化简为式(2.14)左部的形式,其中 γ 取适当的常数值;另一方面若物质压力可以忽略不计,辐射压力成为主导,在第3章中已经证明能够使用同样的关系式,可以用 $\gamma=4/3$ 的值概括式(2.14)左部的所有情况。从式(7.3)和式(7.4)中还可看到,当辐射为主导时仍然可以使用欧拉方程组中动量和能量方程的形式,只需以辐射压力代替物质压力即可。

7.1.2 热力学关系

对于处于物质与辐射之间的中间情形,我们回到3.3节中关于具有可变多方指数介质的讨论,估算光学厚并且接近平衡的等离子体中的热辐射性态。总压力 $\tilde{p}$ 为等离子体物质

压力与辐射压力之和，因而其物态方程为

$$\tilde{p} = \frac{\rho(Z+1)k_B T}{Am_p} + \frac{4\sigma}{3c}T^4 \tag{7.6}$$

总比内能 $\tilde{\varepsilon}$ 是粒子热运动、辐射和内能等方面贡献之总和，内能部分仍记为 $R(T)$，即有

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{3}{2}\frac{(Z+1)k_B T}{Am_p} + \frac{R(T)}{Am_p} + \frac{4\sigma}{\rho c}T^4 \tag{7.7}$$

如 3.3 节所述，采用类氢模型计算 $R(T)$，得到

$$\gamma = 1 + \frac{\tilde{p}}{\rho\,\tilde{\varepsilon}} = \frac{(Z+1)[15 + (E_H/k_B T)Z(2Z+1)] + 32\alpha}{(Z+1)[9 + (E_H/k_B T)Z(2Z+1)] + 24\alpha} \tag{7.8}$$

其中

$$\alpha = \frac{\sigma T^4/c}{n_i k_B T} \tag{7.9}$$

是正比于辐射能量密度与物质能量密度比值的系数，n_i 为离子数密度。γ 值与冲击波转变有关，为了找到热输运计算所需的 γ_3 值，需要使用如下的比定容热容关系，即

$$c_V = \left(\frac{\partial\,\tilde{\varepsilon}}{\partial T}\right)_\rho = \frac{3}{2}\frac{n_i[1 + Z + T(\partial Z/\partial T)_\rho]k_B}{\rho} + \frac{n_i R'(T)}{\rho} + \frac{16\sigma}{\rho c}T^3 \tag{7.10}$$

式中 $R'(T)$ 为 $R(T)$ 关于 T 的导数。

等容条件下 $\tilde{p}$ 关于 T 的偏导数为

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial T}\right)_\rho = n_i[1 + Z + T(\partial Z/\partial T)_\rho]k_B + \frac{16\sigma}{3c}T^3 \tag{7.11}$$

然后由此式可以得到

$$\frac{1}{\gamma_3 - 1} = \frac{\rho c_V}{(\partial\,\tilde{p}/\partial T)_\rho} = \frac{3[2(R'(T)/k_B) + 3(1 + Z + T(\partial Z/\partial T)_\rho)] + 96\alpha}{6[1 + Z + T(\partial Z/\partial T)_\rho] + 32\alpha} \tag{7.12}$$

注意 γ 与 $R(T)$ 有关，当温度 T 上升时，γ 上升到一个最大值，然后保持不变。γ_3 与 $R'(T)$ 有关，当等离子体完全电离时 γ_3 骤降为零。还应指出当 $Z \propto \sqrt{T}$ 时，$T(\partial Z/\partial T)_\rho = Z/2$。

重新排列式(7.12)，得出

$$c_V = \frac{1}{(\gamma_3 - 1)\rho}\left(\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial T}\right)_\rho \tag{7.13}$$

如果已经得到充分准确的 γ_3 值，上式则是一个十分有用的公式。

还需要从式(3.72)中得出声速，用于涉及声波的计算，为此先导出

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{p}}{\partial \rho}\right)_T = \frac{(Z+1)k_B T}{Am_p} \tag{7.14}$$

以及

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{\varepsilon}}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{4\sigma T^4}{c\rho^2} \tag{7.15}$$

根据上面两式，就可得到关于 γ_s 的十分繁琐的式子，即

$$\gamma_s = \frac{45(Z+1)^2 + 18(R'(T)/k_B)(Z+1) + 480(Z+1)\alpha + 512\alpha^2}{3[3(Z+1)+4\alpha][3(Z+1)+2R'(T)/k_B+32\alpha]} \tag{7.16}$$

图 7.3 表示三种不同元素组成的近似平衡的辐射等离子体中 γ、γ_s 和 γ_3 的值。这里已经假定在 $T=2.5Z_{\text{nuc}}^2$ 之前，$Z=0.63\sqrt{T}$，T 的单位为 eV。温度更高时取 $Z=Z_{\text{nuc}}$，Z_{nuc} 为核电荷数。3.3 节中已使用离子的类氢模型并在不考虑激发态的假设下计算过 $R(T)$。从图 7.3 中可看出，当等离子体完全电离时，γ_s 和 γ_3 的曲线都发生急剧变化，但 γ 的曲线没有变化。即使取 $\gamma_3=\gamma_s=\gamma$，这也不是一个骇人的假定，因为只是在略高于元素完全电离的温度范围内这三条曲线才有一定的差别，在应用中可以忽略这个情况。但是还应指出，采用单值的 γ 则不可以使用 3.1.1 节中的简单方程式。在辐射主导状况下，我们应该恰当估算诸如比热容等热力学参数。

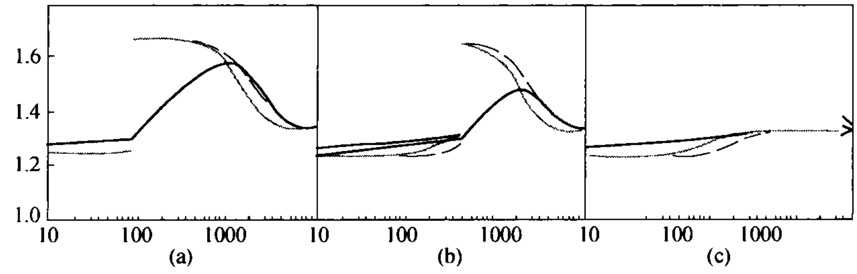


图 7.3　碳(a)、铝(b)和氙(c)等离子体的 γ(实线)、γ_s(虚线)和 γ_3(粗灰线)值

除了平衡模型之外，我们还有第 2 章和 6.2.4 节中探讨过的关于如何处理整个物理系统的同类选择，正如流体微团的处理方法具有单流体或多流体那样，对于辐射的处理也有类似选择，特别对于能量方程而言，数值模拟中一类普通的模型是第 2 章讨论过的单流体三温模型。这类模型采用单一的连续性方程和动量方程，但是其中的压力取作电子压力、离子压力和辐射压力三者之和。能量方程相应地分为三个分别关于电子、离子和辐射能量的式子，这三个组分之间存在着能量交换。按照 6.2.4 节中论述的方法，这类模型中的辐射能量输运经常采用广义的非平衡扩散处理。涉及物质的单流体双温(电子、离子)模型时，也可采用另一种更先进的辐射输运处理方法。即使把辐射热输运作为扩散处理，这些模型仍然比较切实可行，常常能给出定性上正确的结果。

7.2　辐射和涨落

如果系统中存在强辐射，则会影响到介质中发生的每一个流体动力学过程。本章中许多内容与考察辐射如何改变前面已探讨过的现象(如声波和冲击波)的性态有关。另外一些现象包括热不稳定性和扩散热波等，在热传导系统中也有可类比的过程。

7.2.1　辐射声波，光学厚情形

为了研究辐射对于声波的影响，我们从考察一个光学厚、近似平衡的辐射介质内部深处

将会发生什么现象开始，这样的介质可存在于星体内部或者实验对象中相当热、相当稠密的部分体积内。还要先做一假定，认为系统十分接近于平衡态而且充分光学厚，以至于 $B \sim J_{\mathrm{R}}$，在这样的极限下辐射通量由式(6.54)给定。使用上节中相应的结果、式(3.71)至式(3.73)、以及热输运的扩散模型，可得出

$$\rho \frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}t} = -\nabla \cdot F_{\mathrm{R}} = -\nabla \cdot (\tilde{\kappa} \nabla T) \tag{7.17}$$

$$\frac{\mathrm{D}\tilde{p}}{\mathrm{D}t} - \frac{\gamma_{\mathrm{s}} \tilde{p}}{\rho} \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = (\gamma_3 - 1) \nabla \cdot (\tilde{\kappa} \nabla T) \tag{7.18}$$

式中 $\tilde{\kappa}$ 为热导率，即热的和辐射的热导率之和，$\tilde{\kappa} = \kappa_{\mathrm{th}} + \kappa_{\mathrm{rad}}$。

在随动参考系中研究问题，假设温度、速度和密度等流场量梯度的零阶量为零，取一阶小量把它们展开为 $\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1$，$\rho = \rho_0 + \rho_1$，$T = T_0 + T_1$，代入式(7.18)进行线性化近似，得出

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} - \frac{\gamma_{\mathrm{s}} \tilde{p}_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = (\gamma_3 - 1) \tilde{\kappa} \nabla^2 T_1 \tag{7.19}$$

还要使式(7.6)线性化，才能与上式联立消去一个变量。我们选择消去 T_1，但是这样做时必须考虑 Z 的变化，电离状态下可以认为 $Z \propto \sqrt{T}$。由此得到

$$\tilde{p}_1 - p_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} = \alpha \frac{T_1}{T_0} \tag{7.20}$$

式中

$$\alpha = \frac{16\sigma T_0^4}{3c} + \frac{\rho_0 (1 + \beta Z_0) k_{\mathrm{B}} T_0}{A m_{\mathrm{p}}} \tag{7.21}$$

完全电离的等离子体中 $\beta = 1$；部分电离的等离子体中 $\beta = 3/2$。由于式(7.20)中 p_0 是物质压力，α 具有压力单位。把式(7.20)中的 T_1 代入式(7.19)，得到

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} - \frac{(\gamma_3 - 1) \tilde{\kappa} T_0}{\alpha} \nabla^2 \tilde{p}_1 = \frac{\gamma_{\mathrm{s}} \tilde{p}_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{(\gamma_3 - 1) \tilde{\kappa} T_0}{\alpha} \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1 \tag{7.22}$$

注意到上式左部第二项系数的单位是 cm^2/s，因而该项的意义是某种广义的运动扩散率(见第2章)。把动量方程式(7.1)和连续性方程作线性化，就可得出

$$\partial^2 \rho_1 / \partial t^2 = \nabla^2 \tilde{p}_1$$

这是一个与声波有关的方程。再把式(7.22)对 t 两次求导，利用上式就可消去与 ρ_1 的二阶导数有关的项，得到关于单一变量 $\tilde{p}_1$ 的方程式，即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\gamma_{\mathrm{s}} \tilde{p}_0}{\rho_0} \nabla^2\right) \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial t} = \frac{(\gamma_3 - 1) \tilde{\kappa} T_0}{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2\right) \nabla^2 \tilde{p}_1 \tag{7.23}$$

这是一个描述受到辐射调制的声波及其相关波的四阶波动方程式。进行相同于第2章中的平面波分析，找出色散关系即有

$$1-\frac{\gamma_s\,\tilde{p}_0}{\rho_0}\frac{k^2}{\omega^2}=-\mathrm{i}\left(\frac{(\gamma_3-1)\;\tilde{\kappa}\,T_0}{\alpha}\omega\,\frac{k^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{p_0}{\rho_0}\frac{k^2}{\omega^2}\right) \tag{7.24}$$

为了简化上式，定义表示辐射相对贡献的参数 $\eta=4\sigma T^4/(3cp_0)$ 以及 $\gamma_s v_n^2=(\omega/k)^2(\rho_0/p_0)$，当相速度等于通常的等熵声速时，$v_n=1$。这样，式(7.24)可以写成

$$1-\frac{1+\eta}{v_n^2}=-\mathrm{i}\,\frac{\omega_n}{v_n^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_s v_n^2}\right) \tag{7.25}$$

假设 $\tilde{\kappa}=\kappa_{\mathrm{rad}}$，上式中定义的归一化频率 ω_n 即为

$$\omega_n=\left(\frac{\gamma_3-1}{1+((1+\beta Z_0)/(1+Z_0))/4\eta}\right)\left(\frac{\omega}{\nu_e c_s^2/c^2}\right) \tag{7.26}$$

此式中已引入消声比 $\nu_e=c\chi_R$，用以阐明归一化频率的意义。当辐射可忽略不计时，显然有 $\eta\to 0,\omega_n\to 0$，并可假设相速度取其通常值($v_n=1$)。当 η 较大时，系统的行为取决于 ω_n。在任何给定的 η 值下 ω_n 规定了频率的尺度，即"低"频时 ω_n 较小，"高"频时 ω_n 较大。高频状况下，热传导在波长尺度范围内十分有效，能够把声波可能造成的温度涨落平滑化。这种状况下波具有相速度 $c_s/\sqrt{\gamma}$，称为等温声波(因为这是在假定等离子体为等温的条件下从欧拉方程组得出的相速度)。

习题 7.2

从欧拉方程组中推导出等温声波的色散关系式，也就是考虑温度不变时会出现什么现象。

式(7.25)一般有 4 个根，对应于两对传播方向相反的波。这些根都是复根，给出了相速度和衰减系数，这两个参数都已用非辐射的等熵声波速度做归一化处理。以波数做归一化的空间衰减长度，即是式(7.25)根的虚部与实部的比值。图 7.4 表示归一化的相速度和空间衰减长度与 ω_n 的函数关系，有关参数值已在该图标题中说明。衰减较弱的归一化相速度接近于 1 的根是声波(图 7.4 中的实曲线)；另一个根通常称为**热波**(图 7.4 中虚曲线)，除了十分低的频段以外该波的衰减都很强烈，在这种低频范围中热波的相速度可忽略不计，对应于对温度和其他流场量的一种强衰减扰动。

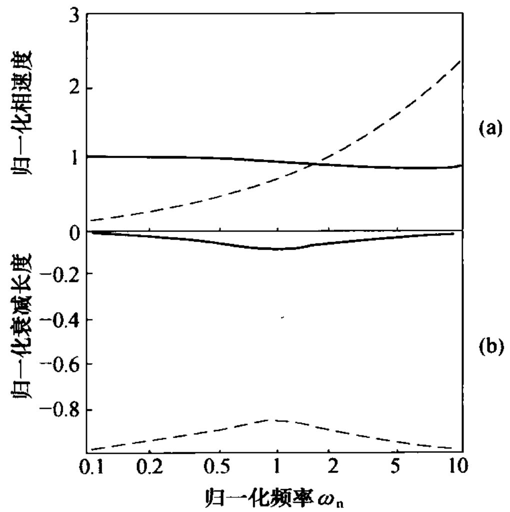


图 7.4　辐射扩散极限下的声波

(a) 以非辐射等熵声速作归一化的相速度；

(b) 以波数作归一化的空间衰减长度。

计算参数为 $\gamma_3\approx\gamma_s\approx 1.3,\beta=1,\eta=0.01$。

对于典型的实验室等离子体(密度约 1g/cm³)，有关参数值为 $\chi_R\sim 10^4\mathrm{cm}^{-1}$，$c_s\sim 30\mathrm{km/s}$，$\gamma_3\approx\gamma_s\approx 1.3$，当 $\omega\approx(3/\eta)\times 10^6\mathrm{rad/s}$ 时(对应于波长量级为 $2\pi\eta$(cm))，$\omega_n=1$。因

此，一旦 η 下降至约 10^{-5} 以下（近似为 100eV），波长将短于 $1/\chi_R$，声波则处于“高频”状况。星体内部的典型参数为 $\chi_R \sim 10\mathrm{cm}^{-1}$，$c_s \sim 100\mathrm{km/s}$，$\gamma_3 \sim \gamma_s \sim 1.3$，因而当 $\omega \sim (3/\eta) \times 10^4\mathrm{rad/s}$ 时有 $\omega_n = 1$，这个频率对应于波长的量级为 $600\eta(\mathrm{cm})$。这样，只有在与星体半径相比为非常短的波长之下，声波才会处于这种“高频”状况。

习题 7.3

图 7.4 表明 η 不变时声波性质随 ω 的变化。考虑当 $\omega/(\nu_e c_s^2/c^2)$ 不变、$\beta = 1$ 时，声波性质随 η 的变化。画出 $0.01 \leqslant \eta \leqslant 10$ 范围内归一化相速度和衰减长度的曲线，并讨论所得到的结果。

7.2.2　输运较为重要情形中冷却的作用

考虑光学不很厚的系统，$B \neq J_R$，辐射输运至关重要，虽然我们尚未明白会发生什么现象。问题在于辐射往何处传播，辐射是怎样被吸收的，以及吸收辐射的后果是什么。由于在物质运动的时间尺度内辐射很快趋于平衡，可以假设辐射总处于定常状态。再假设等离子体中粒子近似处于平衡分布，以平衡速率发射辐射。在上述各个假设下，定常状态下式(6.38)给出辐射通量的散度为 $4\pi\kappa(B - J_R)$。实际应用中常常可取近似 $\kappa \sim \kappa_p$，κ_p 是普朗克平均不透明度。在考察这种场景中涨落的动力学之前，需要知道在关于温度以及热发射的平面波动涨落所导致的冷却率，下一节给出有关的计算方法。

1. 温度涨落导致的冷却

考虑一个不存在零阶梯度量的系统，这样的系统将处于一种定常（或平衡）状态，即热辐射的产生和损耗处于平衡之中。人们的目的是确定辐射发射中平面波动涨落导致的辐射冷却。形式上可以写出 $B = B_0 + B_1$，这里涨落项 $B_1 = \hat{B}\exp[\mathrm{i}k(Z - Z_1)]$，此式规定了 z 轴沿着涨落波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向。再约定把任一实变量 a 表示的物理量改写为 $(a + a^*)/2$。不计 B_0 给出的定态分量，寻求 B_1 所引起的辐射强度。式(6.44)描述了辐射强度的增量 I_1。假设介质是均匀的，波的折射可忽略不计，沿着某条射线在 $+z$ 轴方向积分计算辐射强度的扰动量，得到

$$I_1(z) = \int_{z_0}^{z} \kappa \hat{B} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z'-z_1)} \mathrm{e}^{-\kappa(z-z')/\mu} \frac{\mathrm{d}z'}{\mu} + I(z_0)\mathrm{e}^{-\kappa(z-z_0)/\mu} \tag{7.27}$$

式中 μ 为射线与 z 轴夹角的余弦，这与选定 z_0 为一个很大负数（$|\kappa z_0| \gg 10$）的情况相一致。积分式(7.27)，得

$$I_1(z,\mu) = \frac{\kappa \hat{B}}{\mathrm{i}\mu k + \kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-z_1)} = \frac{\kappa - \mathrm{i}\mu k}{\mu^2 k^2 + \kappa^2} \kappa \hat{B} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-z_1)} \tag{7.28}$$

继续积分 I_1 求得 J_1 时，虚部项是 μ 的奇函数，因而其积分为零。余下的项给出

$$J_1(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_1(z,\mu)\mathrm{d}\mu = \hat{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-z_1)} \frac{\kappa}{k}\mathrm{arccot}\frac{\kappa}{k} \tag{7.29}$$

这就是用式(6.38)在定态极限下计算对等离子体中物质的热输入所需要的结果，对于辐射

的热输入则为负值。

对于辐射压力可以忽略不计的系统，辐射通过自身输运的热量而产生影响，此时把上面的结果用温度涨落 T_1 来表示，将十分有用。把能量损失率的增量（即 $-\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$）处理成为当地能量密度增量（即 $\rho c_V T_1$）的衰减率。这样在均匀介质的随动坐标系中得出

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\nu_1 T_1 = \frac{4\pi\kappa}{\rho c_V}(J_{\mathrm{R}} - B) \tag{7.30}$$

正如以前把一些物理量按扰动量（涨落）展开那样，我们把 J_{R} 写成 $J_{\mathrm{R}} = J_0 + J_1$，这里 J_1 是由于温度涨落引起的 J_{R} 的偏离量（见式(7.29)）。由于 $J_0 = B_0$，式(7.30)右部的一阶表达式为 $\kappa_0(J_1 - B_1)$，这里 κ_0 是 κ 的零阶值。另外，从式(7.30)还可知道，T_1 必定具有与 J_1 和 B_1 相同的平面波动依赖关系，也就是有

$$\nu_1 = \frac{4\pi\kappa\hat{B}_1}{\rho c_V\hat{T}_1}\left(1 - \frac{\kappa}{k}\operatorname{arccot}\frac{\kappa}{k}\right) = \frac{16\sigma\kappa T_0^3}{\rho c_V}\left(1 - \frac{\kappa}{k}\operatorname{arccot}\frac{\kappa}{k}\right) \tag{7.31}$$

上式计算的曲线示于图7.5。当 κ/k 较小时 ν_1 与 k 的关系不大，可以写成

$$\nu = \frac{16\sigma\kappa T_0^3}{\rho c_V} \tag{7.32}$$

当 κ/k 增大时，衰减变得较小。再进一步考虑，κ/k 较小表示扰动的光学薄极限，此时辐射在被完全吸收之前能够传播很多个波长的距离，辐射发射较低而且其吸收是空间均匀的。因而，若写出关于 T_0 的方程式，它将含有一个高阶的加热项。当 κ/k 变得较大时，吸收变得越来越局域化，以至于从任何给定的温度最大值附近传出来的能量，将被输送到更靠近这个最大值的地方，减缓了冷却。当 κ/k 很大时，存在从每个波长段中的热区域流向冷区域的净能流。但是在这个极限下，J_{R} 也趋近于 B，输运转变为一种扩散状况。还必须考虑涨落扰动的频率，相当高的频率下忽略式(6.38)中第一项的做法不再是正确的。在式(6.38)左部的两项中取 $E_{\mathrm{R}} \approx F_{\mathrm{R}}/c$ $\nabla\to k$ 以及 $\partial/\partial\to\omega$，就可以估计什么时候这个第一项比较重要，不能被忽略。当 $(\omega/k) \sim c$ 时，这两项大小将彼此相当，这个结果并不惊奇。下面准备把式(7.31)的冷却率应用于人们感兴趣的两种情形。

2. 薄层的冷却

我们已经看到，较快的冲击波产生较高的冲击波后温度，而且温度上升时不透明度下降，结果导致实验中能够产生可以维持一定时间的光学薄的受冲击层。天体物理中星际冲击波产生的受冲击层也是光学薄的，它们向外辐射很强烈，以至于所引起的冷却十分显著，使得密度剖面发生变化，还可能引起更复杂的动力学行为。在关于辐射冲击波的讨论中，将探讨辐射导致的冷却薄层的剖面。对灼热薄层的冷却率进行估算，往往很有用处。如果与系统的持续时间相比较，相应的冷却时间较长，则辐射引起的薄层结构的变化将很微小。

横向无穷展延的平面薄层冷却问题的求解，是应用辐射输运方程的很好范例。设平面薄层的厚度为 d，利用式(6.45)写出

$$I_{\mathrm{R}} = \int_0^d \rho\kappa_{\mathrm{m}} B \mathrm{e}^{-(z\rho\kappa_{\mathrm{m}}/\mu)}\frac{\mathrm{d}z}{\mu} = B\left(1 - \mathrm{e}^{-(d\rho\kappa_{\mathrm{m}}/\mu)}\right) \tag{7.33}$$

使用此式可求出从该薄层一个表面上透出的辐射通量，因为该量是由式(6.9)确定的，但是积分只对辐射外行的半球形空间进行，从而得到

$$F_{\mathrm{R}} = 2\pi\int_0^1 I_{\mathrm{R}}\mu \mathrm{d}\mu = \pi B[1 + \mathrm{e}^{-\tau}(\tau - 1) - \tau^2 E_1(\tau)] \tag{7.34}$$

式中 $\tau = d\rho\kappa_{\mathrm{m}}$ 是基于薄层厚度确定的受冲击层的光学深度；$E_1(\tau)$ 为 $n=1$ 的指数积分函数。

从该薄层散发出来的总能量通量是式(7.34)的 2 倍，因为辐射从薄层的两个表面向外发射。图 7.6 表示以 σT^4 做归一化的辐射通量与光学深度的函数关系。在光学深度较小的范围中，辐射通量从零开始随光学深度线性增大，但很快饱和并趋近于 σT^4。

根据图 7.6 人们也许会预期，当薄层厚度相当于 1 倍光学深度大小时冷却最快，因为辐射将以相当快的速率从整个薄层的体积中传出。但是这样的预期是错误的，因为待冷却的物质量增加得比辐射通量还快。下面说明此点。

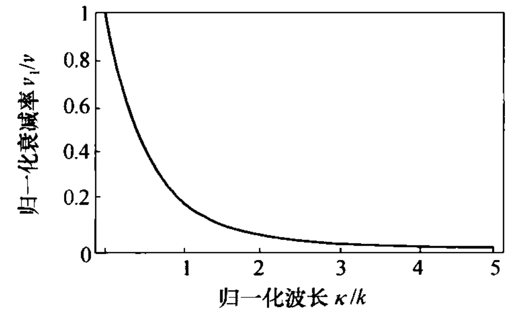


图 7.5　光学薄的涨落引起的辐射冷却

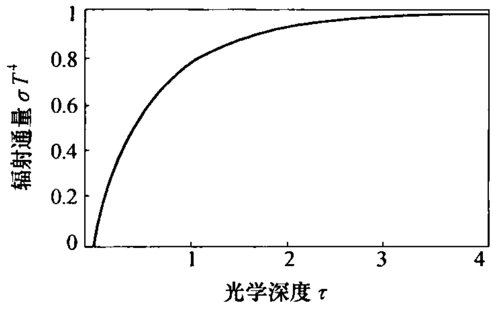


图 7.6　光学薄的薄层发出的辐射通量
纵坐标是从薄层一个表面发出的辐射通量，用 $\pi B = \sigma T^4$ 进行归一化。当光学深度增大时，辐射通量上升

辐射冷却率 ν_{rad} 是从该薄层一个表面发出的辐射通量的 2 倍与该薄层单位面积上含有能量的比值，即

$$\nu_{\mathrm{rad}} = \frac{2F_{\mathrm{R}}}{\rho d c_V T} = \frac{\nu_{\mathrm{rad}}^*}{\tau}[1 + \mathrm{e}^{-\tau}(\tau - 1) - \tau^2 E_1(\tau)] \tag{7.35}$$

式中 ν_{rad}^* 为归一化因子，可表示为

$$\begin{aligned}\nu_{\mathrm{rad}}^* &= \frac{2Am_{\mathrm{p}}}{(Z+1)k_{\mathrm{B}}}\sigma T^3\kappa_{\mathrm{m}} \\ &= \frac{2.2A}{Z+1}T^3\kappa_{\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{7.36}$$

式(7.3.6)中 ν_{rad}^* 的单位为 s^{-1}，T 和 κ_{m} 的单位分别为 eV 和 cm^{-1}。图 7.7 表示相应的归一化冷却率，当光学深度变得非常小时，其极限值为2；当光学深度增大时，冷却速率下降，光学深度达到 10 左右时约降为0.1。光学深度增加到 10 以上范围

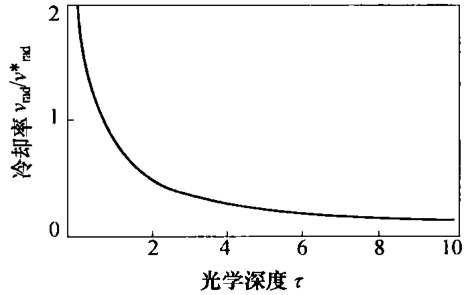


图 7.7　归一化冷却速率 $\nu_{\mathrm{rad}}/\nu_{\mathrm{rad}}^*$
当光学深度 τ 增大时，冷却率下降

时,归一化冷却率变化很慢。在很大的 τ 值范围中,其标度关系为 $1/\tau$。因此,若 $T \sim 10\text{eV}$, $\kappa_m \sim 10^6\text{cm}^2/\text{g}$,则有 $\nu_{rad}^* \sim 10^9/\text{s}$。或者说,当 $\tau \sim 0.5$ 时,冷却时间为纳秒量级。对于更小的光学深度,冷却时间更短,但只会减小到一半左右;对于较大的光学深度,冷却时间也较长。

习题 7.4

我们没有探讨式(7.34)式中角度变化的贡献。可以想象最大的贡献可能发生于掠射角处,这里 μ 很小,沿视线的光学深度变得很大。如果大部分发射来自掠射角,则上面采用的模型就不太现实,因为真实系统的各层不会是真正平面的,而且在横向不可能无穷地展延。采用计算机数学程序进行式(7.34)的演算,并修正这种计算以探讨来自掠射角的贡献有多大,得出对于真实薄层上述估算结果是否合理的结论。

把上面得到的冷却率与天体物理中冷却函数 Λ 的标准表达式进行比较也许很有用处,这里冷却函数的定义是每单位体积、单位电子密度、单位离子密度的功率损失,其单位是 $\text{erg} \cdot \text{cm}^3/\text{s}$ 或者相当的形式。每单位体积的功率损失即是 $n_e n_i \Lambda$,相应的冷却率 $\nu_{astro} = n_e n_i \Lambda/(\rho c_V T)$。设该冷却率相等于 ν_{rad}^*,在光学薄的天体物理情形即可知不透明度 $\kappa_{astro} = \rho\kappa_m$,因为 $\kappa_{astro} = n_e n_i \Lambda/(2\sigma T^4)$。薄层的发射率为 $\kappa_{astro} d$。

7.2.3 光学薄的声波

7.2.1 节讨论的扩散并且近似平衡的状况,在实验室或经常见到的天体物理系统中(除了星体内部)很不容易实现。更为常见的系统是相当热以至于辐射冷却比较重要的系统,但是其光学薄(或至少不十分厚),从而式(7.30)和式(7.31)适于描述这种冷却。在系统光学很薄以至于依据式(7.32)可知 $\nu_1 = \nu$ 的极限下,考察上述状况下声波的行为。由式(3.71)并且在特殊的无穷小热流 $dq = c_V \partial T_1/\partial t = -\nu c_V T_1$ 条件下,得

$$\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} - \frac{\gamma_s p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\nu\frac{\rho(1+\beta Z)k_B T_1}{Am_p} \tag{7.37}$$

式中已使用忽略辐射的式(7.10)来估算导数$(\partial p/\partial T)_\rho$ 和多方气体的等熵声速。如同式(7.21)的情形,对于完全电离的等离子体取 $\beta = 1$,对于部分电离并且 $Z \propto \sqrt{T}$ 的等离子体取 $\beta = 3/2$。更一般情形中,β 取其他的值或函数。再一次对初始均匀的等离子体做线性化处理,根据式(7.20)和式(7.21)并且在忽略辐射的条件下,得

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1+Z}{1+\beta Z}\left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \tag{7.38}$$

根据上式以及随动参考系中的式(7.37),做线性化处理得到

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\gamma_s p_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nu\left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0}\rho_1\right) \tag{7.39}$$

再次利用流体动力学连续性方程和动量方程的结果,即$\partial^2\rho_1/\partial t^2 = \nabla^2 p_1$,得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\gamma_s p_0}{\rho_0}\nabla^2\right)\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{p_0}{\rho_0}\nabla^2\right)p_1 \tag{7.40}$$

此式给出的色散关系为

$$- i\omega\left(-\omega^2 + \frac{\gamma_s p_0}{\rho_0}k^2\right) = -\nu\left(-\omega^2 + \frac{p_0}{\rho_0}k^2\right) \tag{7.41}$$

从该色散关系中解出归一化相速度的倒数 $c_s k/\omega$ 为

$$\frac{c_s^2 k^2}{\omega^2} = \frac{1}{1+\nu^2/(\gamma_s^2\omega^2)}\left[1+\gamma_s\left(\frac{\nu}{\gamma_s\omega}\right)^2 + i(\gamma_s-1)\frac{\nu}{\gamma_s\omega}\right] \tag{7.42}$$

习题7.5

十分奇怪,式(7.39)和式(7.41)与 β 无关,从而这些波似乎与系统是否完全电离关系不大。从式(7.37)出发推导式(7.41),并讨论该式为何与 β 无关。

从式(7.42)可以看出,当冷却率趋于零时,情况回到了平常的等熵声波;当冷却率变得很大时,则成为衰减的等温声波。图7.8表示上述色散关系蕴涵的相速度和衰减率,如何依赖于式(7.42)中自然的归一化频率 $\gamma_s\omega/\nu$。相速度从归一化频率较低时的等温声速,增大为归一化频率较高时的等熵声速。在这两个极限下,空间衰减率都较小,在中间的过渡段中衰减率有所增大。

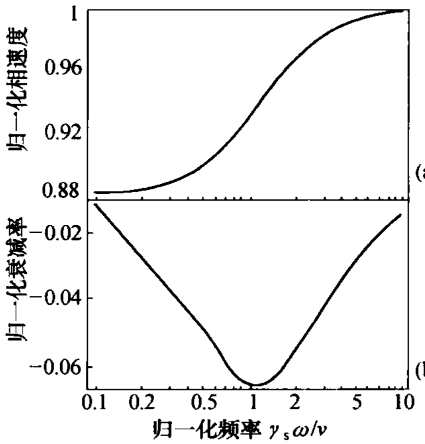


图7.8 光学薄极限下的声速,即以等熵声速 c_s 作归一化的相速度(a)和以波数 k 作归一化的空间衰减率(b)与归一化频率($\gamma_s\omega/\nu$)的函数关系

回到式(7.42),高、低频情况下该式表示的极限性态容易追溯并值得讨论。在频率很高或衰减很低的极限下,显然回到了平常的声波。高频情形中,$\nu/\omega \ll 1$,即有

$$k = \frac{\omega}{c_s}\left[1 + i\frac{\nu}{2\omega}\left(\frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s}\right)\right] \tag{7.43}$$

此式对应于具有非常长的特征衰减长度$(2\gamma_s c_s/\nu)/(\gamma_s - 1)$的衰减声波情形。另一种相反的极限下,$\dfrac{\nu}{\omega} \gg 1$,情况更为复杂。因为频率相当低时声波经历的是光学厚介质,上述计算不能适用。假定在某个频率范围内这种极限是有意义的,就可看出此时的波数将为

$$k = \frac{\sqrt{\gamma_s}\,\omega}{c_s}\left[1 + i\frac{\omega}{2\nu}(\gamma_s - 1)\right] \tag{7.44}$$

而衰减长度等于$[2c_s/(\nu\sqrt{\gamma_s})](\nu^2/\omega^2)/(\gamma_s - 1)$。与涨落的波长相比较,这个衰减长度也十分长。在这个极限下,出现的是衰减较弱、相速度为$(c_s/\sqrt{\gamma})$的等温声波。从物理上看,这个情形中辐射以比波频快得多的速率,使得温度涨落逐渐平息。

为了阐明上述情形的意义,我们考虑 $T = 100\text{eV}$ 的 CH 等离子体,其参数为 $\rho = 1\text{g/cm}^3$,$\kappa_P = 2\times10^5\rho/T(\text{eV})$。依据式(7.32),辐射衰减率正好超过 $10^9/\text{s}$。如果声速约为 10^6cm/s(即 10km/s),则波数为 0.001cm^{-1} 的声波衰减最大。与实验比较,量级为 100m 的波长是比

较大的，因此这个结果与等离子体中大尺度结构的渐进衰减最有关系，等离子体内部具有较大波数的波将是等熵声波。

本节与7.2.1节中对于辐射声波的两种处理方法，展现了很不相同的声波行为，因为这些方法分别适用于不同的状况。任何介质中最低频的声波是光学厚的，其含义是在仅为波长很小分数的长度内就可发生吸收，适合于7.2.1节的描述。最高频的声波是光学薄的，应采用本节的描述。结果导致图7.8自然与图7.4有联系，因为频率增加可使光学厚状况转变为光学薄状况。总之频率增大时，声波从等熵声波演变为等温声波，再变回为等熵声波。两种光学深度状况之间的转变，以及频率很高以至于辐射传播时间也至关重要的更加复杂情形，这在 Mihalas 和 Mihalas 的书中有详细讨论。

7.2.4 辐射热不稳定性

辐射引起冷却的一个重要作用是形成辐射热不稳定性。这种不稳定性调制了造父变星的脉动，并创造了高能量密度等离子体内部的结构。

当一个有限的物质区域经受辐射引起的冷却时，或者当不透明度关于温度的导数与其他物理量具有一定关系时，就会出现这种不稳定性。对物体的辐射热输入，是式(6.38)中输入到辐射中的能量的负值。为简单起见，我们将忽略任何绝热功，因此有

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{4\pi\kappa}{\rho}(J_{\mathrm{R}} - B) + \dot{q}_{\mathrm{ext}} \tag{7.45}$$

式中 $\dot{q}_{\mathrm{ext}}$ 为诸如热量热传导等外源提供的加热率，对于净辐射冷却情形则有 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t<0$。任何绝热的能量输入将被加到式(7.45)第一个等号右部两个表达式中。下面探讨在这些条件下温度涨落的演变，还要假定介质在空间中是均匀的。把关于温度的方程式进行泰勒展开，给出

$$\frac{\rho c_V}{4\pi}\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_0(J_{\mathrm{R0}} - B_0) + \frac{\dot{q}_{\mathrm{ext}}}{4\pi} + \frac{\partial \kappa}{\partial T}(J_{\mathrm{R0}} - B_0)(T - T_0) + \kappa_0\frac{\partial(J_{\mathrm{R}} - B)}{\partial T}(T - T_0) + \cdots \tag{7.46}$$

式中各个导数都在 T_0 处计值。由于 $T = T_0 + T_1$，式(7.46)表明 T_0 的演变来自于上式右部的前两项，因此 T_0 将趋于某个定态值。关于 T_1 的相应方程式具有衰减率 ν_2，即是

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\nu_2 T_1 = \frac{4\pi}{\rho c_V}\left[\frac{\partial \kappa}{\partial T}(J_{\mathrm{R}_0} - B_0) + \kappa_0\frac{\partial(J_{\mathrm{R}} - B)}{\partial T}\right]T_1 \tag{7.47}$$

根据此式可由能量输入得到 $(J_{\mathrm{R}_0} - B_0)$，从式(7.30)和式(7.31)又可得到 $\partial(J_{\mathrm{R}} - B)/\partial T$，从而得出

$$\nu_2 = \frac{\dot{q}_{\mathrm{ext}}}{c_V T}\frac{\partial \ln\kappa_0}{\partial \ln T} + \nu\left(1 - \frac{\kappa}{k}\operatorname{arccot}\frac{\kappa}{k}\right) \tag{7.48}$$

与 $\partial\kappa/\partial T$ 的符号和大小有关，“衰减率”ν_2 可以为正也可以为负。如果 ν_2 为负，则发生热不稳定性，其含意是较小的温度涨落将随时间而增长。当 $\dot{q}_{\mathrm{ext}}$ 为正，$\partial\kappa_0/\partial T<0$ 时，发生热不稳定性。这是有意义的，因为当热输入不变化时，温度增大将导致较低的辐射冷却，从而使得温度进一步上升；反之亦然。当然，这将立即使得介质空间均匀性的假设不再成立，因为较

热区域中的介质将压缩不太热区域中的介质。

在超出若干千电子伏特的范围中，κ_0 的一般规律是随着 T 上升而下降，然后当韧致辐射或许同步辐射变得重要时又转为增大。另外，等离子体中一个重要的离子刚开始打开一个封闭的电子壳层时，则在一定温度范围内 κ_0 随 T 而增大。这意味着许多高能量密度等离子体处于不稳定状态，如那些温度低于 1keV 的天体物理等离子体。再者即使不存在外部热源，也可见到较为平缓下降温度发生的温度涨落将随时间而增长，但是其增长率相对较低，因为式(7.48)中的导数值一般为 $-1 \sim -2$，从而任何不稳定结构通常在与等离子体演化同样的时间尺度上发生变化，导致热不稳定性只是偶尔才变得比较重要。传导加热、辐射冷却的高 Z 等离子体长期演化中的结构，可以归因于这种热不稳定性的作用。在辐射加热后发生冷却的初始均匀等离子体演化的数值模拟中，有时能够看到这种不稳定性的某种形式。由于在最大波数 k 之下辐射衰减为最小，这种现象将趋向于产生尺寸为数值模拟中空间分格大小的涨落。

除热不稳定性之外，κ_0 的变化规律还可导致等离子体演化中的其他后果。例如，在受到恒定加热的系统中可能发生温度的非线性振荡。内部恒定加热作用下的造父变星的可见光层中出现这种现象，发生在铁的不透明度具有极大值和极小值的温度范围内。该星体的可见光层处于$\partial\kappa_0/\partial T>0$ 的温度状态，较强的辐射冷却使得温度下降，κ_0 在最小值处发生过冲以至于$\partial\kappa_0/\partial T<0$。接着的响应是温度上升，再次使得 κ_0 在最小值处回过来过冲，造成温度和发光度的定常振荡。图 7.9 表示温度接近 100eV 的铁样品透过率的实验测量结果，高透过率部分对应于低不透明度。可以看出，不透明度随温度升高而起伏。

作为另一个例子，从激光加热表面处发生膨胀的等离子体中存在着某个很窄温度范围内$\partial\kappa_0/\partial T>0$ 的区域，可以导致密度分布出现局部极大点。邻近区域的压力压缩这个辐射损失较大的区域。在激光聚变场景中(参见 Hazak 等的论文)，这样的结构称为**辐射等离子体结构**。

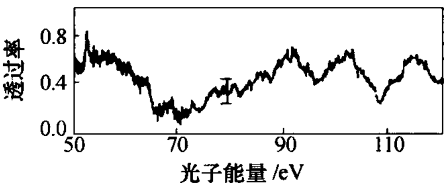


图 7.9　铁的不透明度

此图是 DaShilva 等报道的铁样品透过率的实验测量结果(Phys. Rev. Lett. ,69,493(1992))

7.3　辐射扩散和马夏克波

当冷区域受到从热区域输运来的辐射热量而变热时，这种输运通常是扩散性的。冷物质中辐射的平均自由程可能相当短，但是该平均自由程往往随温度迅速增大，使得扩散性的热输运比简单的热扩散情形复杂得多。扩散系数可变情形中的扩散现象，通常称为**非线性扩散**，是高能量密度等离子体中的基本情况。因为这种等离子体是部分电离的，每个电离状态的不透明度各不相同。一般说来，当物质电离时不透明度为最大的谱段向高能方向移动，

因为进入更高电离状态的束缚—自由跃迁和束缚—束缚跃迁都需要更多的能量。另外,即使通常的对韧致辐射的吸收也是非线性的,在其他参数都不变的条件下,其不透明度随温度增大按 $1/T_e^{3/2}$ 方式下降。这里有两类非线性扩散问题值得关注:第一类是恒温热源驱动的向较冷物质中传播的辐射热波,称为马夏克波(Marshak Wave);第二类是有限的能量通过辐射扩散在物质中散布。下面依次讨论这两类情形。

7.3.1 马夏克波

马夏克波表述了一个虽然简单但与许多实际情况关系很大的问题的解,这个简单问题是从一个恒温能源发出的辐射能量,通过初始参数陡变的边界进入一个初始冷物质中的近似平衡扩散过程。马夏克首先证明了这个问题存在自相似解。假设介质初始处于静止状态,并且最终仍归于静止。我们以后还要提及这个假设,但应注意如果温度足够高以至于辐射压力成为主导时,这个假设就很不合适。所以,马夏克波是与辐射热输运虽然重要但辐射压力并不大的普通场合相关的现象。

马夏克波的一个重要例子是高 Z 物质的腔壁受到持续辐射源的加热问题,该辐射源可以是从腔壁上激光加热区域中发射的热 X 射线。在其内部发生这种现象的封闭结构,称为黑腔,第 8 章中将进行深入讨论。对于惯性约束聚变和需要持续辐射环境的其他实验来说,黑腔极为重要。

为了获得马夏克波问题解析解的描述,我们假设辐射热导率的标度关系为 $\kappa_{\text{rad}} \propto T^n$,对于高能量密度系统的典型物质取 $n=4\sim5$,这个假设就很合理;相比之下,典型的天体物理系统应取 $n=6\sim7$。再假设介质的密度和比热容都为常值。在这些假设下考察下述系统的性态,其中热力学第一定律可以写成

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\rho c_V\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(\kappa_{\text{rad}}\nabla T)=\frac{T_0}{n+1}\kappa_{\text{rad}}\Big|_{T_0}\nabla^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n+1} \tag{7.49}$$

记 $f=T/T_0$, $W=\kappa_{\text{rad}}|_{T_0}/[(n+1)\rho c_V]$,式(7.49)可改写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}=W\nabla^2 f^{n+1} \tag{7.50}$$

这个方程只有一个标量参数 W,依据第 4 章所述,有望找到一个自相似变量 $\xi=x/\sqrt{Wt}$ 的平面一维相似解,其方程式为

$$-\frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}^2 f^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{7.51}$$

习题 7.6

从方程式 $\rho(\partial\varepsilon/\partial t)=\nabla\cdot(\kappa_{\text{rad}}\nabla T)$ 出发,推导式(7.51)。

注意到 $\xi=0$ 处 $f=1$,可以证明 f 的二阶导数始终为负值,以至于 f 逐渐下降到某个 $\xi=\xi_0$ 处成为零。这样就有可能做出一个简单的近似估算。假设从源的位置直至热波尾部,辐射热通量应为常值。这必然是近似正确的,否则某处的温度将增高到源温度之上,或者降低到系统周围温度之下。用上面引入的变量表示辐射热通量,即有

$$F_R = -\kappa_{rad}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{T_0}{n+1}\kappa_{rad}\Big|_{T_0}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x} = -\rho c_V T_0\sqrt{\frac{W}{t}}\frac{\mathrm{d}f^{n+1}}{\mathrm{d}\xi} \tag{7.52}$$

即使$f(\xi)$保持同样的形状，当边界处的物理温度梯度下降时，辐射通量也将随时间而降低。如果假定在任何给定时刻，整个热波范围中的辐射通量为常值，回忆起前面关于$\xi=\xi_0$处$f=0$的推论，就可得出

$$f(\xi)^{n+1} = C(\xi_0-\xi) = 1-\xi/\xi_0 \tag{7.53}$$

这里C是等于$1/\xi_0$的常数，可以满足$\xi=0$处$f=1$的边界条件。式(7.53)等价于

$$T = T_0(1-\xi/\xi_0)^{1/(n+1)} \tag{7.54}$$

图7.10表示依据常热通量模型和更精确方程式(7.51)的解，关于不同n值画出的温度剖面曲线。对于几乎所有目的来说，常热通量模型已足够准确，因为马夏克波模型中的一些其他假设确实并不准确(可参看下节中关于电离的讨论)。

继续讨论常通量模型的计算。认识到通过初始边界的辐射通量必须相等于波中能量E_w的增长率，就可以找到前面设定的ξ_0值，即有

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\int_0^{\xi_0}\rho c_V T\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\rho c_V T_0}{2}\sqrt{\frac{W}{t}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\xi_0 \tag{7.55}$$

令此增长率等于$x=0$处的通量，从式(7.53)可知，$\partial f^{n+1}/\partial\xi = -1/\xi_0$，得出

$$\xi_0 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \tag{7.56}$$

图7.11把上述计算ξ_0的公式与更精确的解做了比较，可以看出，常通量模型低估了热波阵面伸展范围约10%，同真实情况与马夏克波模型之间可能存在的其他差别相比，这个差异影响较小。

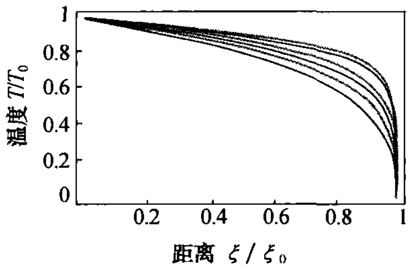


图7.10　马夏克波的温度剖面

当ξ/ξ_0趋于1时，归一化温度$f=T/T_0$非线性地下降。灰曲线给出常通量模型的温度剖面，从底部到顶部依次为$n=3$、4. 5和7，灰线下方的黑曲线是式(7.51)相应的数值解

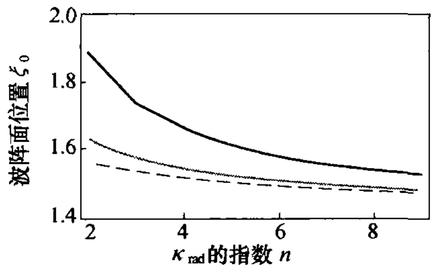


图7.11　常通量模型(灰线)和数值解(黑线)给出的传统马夏克波的ξ_0值曲线

虚线表示电离辐射波的结果。

根据常通量模型，给出辐射热波阵面的位置为

$$x_0 = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}\sqrt{\frac{\kappa_{rad}|_{T_0}}{\rho c_V}}\sqrt{2t} \tag{7.57}$$

热波阵面的速度为

$$u_0 = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}\sqrt{\frac{\kappa_{\mathrm{rad}}|_{T_0}}{\rho c_V}}\frac{1}{\sqrt{2t}} \tag{7.58}$$

我们指出，随着时间增大这个阵面速度从无限大趋于很小的值，因为 t 趋于零时常通量模型的假设不再成立。物理速度自然不会无限大，实际上该速度的性态对于真实系统具有重要影响。

首先，这种辐射阵面的速度远超过系统中任何其他速度。这种状况下直到该速度下降到相等于被辐射加热介质中的声速之前，该波在形式上可称为超声速辐射波。在此期间，辐射波最先到达介质中的任意位置，而且只受辐射源变化的影响。

辐射热波的速度最终将下降到被辐射加热介质中的声速以下，此时该波变成亚声速辐射波。在此期间，该波可能首先被冲击波所超越，然后再被以声速传播的扰动所超过。真实系统中如果有何种过程出现在后边界，辐射通量的来临也是十分罕见的。无论考虑星体的诞生，或者在光学厚环境中任何其他的能量释放过程，或者在高 Z 材料制作的容器中 X 射线源的引发，受到作用的物质的内边界同时也受到扰动。对辐射的吸收往往引起吸收边界的烧蚀，从而产生冲击波向物质内部传播。冲击波阵面的位置距离起初与时间 t 成正比，然后非常平缓地减慢下来。冲击波一开始就压缩辐射源与阵面之间的物质，使得被加热层的厚度减小、密度增大。辐射波形状所发生的变化与不透明度对密度的依赖关系有关。在冲击波超越辐射波之后冲击波得到增强，因为此时冲击波前方介质尚未被辐射波加热，冲击波前方温度变得较低，而冲击波后方的辐射波则在已受冲击压缩的密度更高的物质中传播，因而其速度很可能更加减缓。

习题 7.7

考虑常通量模型并给出完整的数学推导，画出辐射波阵面位置与时间的关系曲线，以及受辐射加热物质中以马赫数 1 ~ 10 运动的扰动前沿位置与时间的关系曲线，讨论所得到的结果。

方程式(7.51)可作数值解，但是在进行计算前必须给定适当的边界条件。已经知道 $\xi=0$ 处 $f=1$，以及 $\xi=\xi_0$ 处 $f=0$，但是并不知道 ξ_0 值，即对应于辐射热波头部位置的 ξ 值。前面已经说明，式(7.52)计算的通过 $\xi=0$ 处的辐射通量必定等于辐射波中总能量 E_w 的增长率。推广式(7.55)并应用式(7.52)，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)_{u=0} = \frac{-\xi_0^2}{2(n+1)}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u \tag{7.59}$$

式中 $u=\xi/\xi_0$。

把式(7.51)和式(7.59)联立求解，以 u 为自变量，逐次迭代 ξ_0 值和式(7.59)中的积分值，以满足 $\xi=\xi_0$ 处 $f=0$ 的边界条件。这个计算步骤所得到的数值解曲线已示于图 7.10 和图 7.11。

7.3.2 电离辐射波

马夏克波模型的最大偏差在于假设介质比定容热容 c_V 为常数（尤其在实验室环境条件

下）。这个假定极不真实，因为 c_V 通过热能和电离能与 Z 有关，而 Z 并不守常。称 c_V 和 Z 随电离程度而变化的辐射波为电离辐射波，这个概念不应与7.5节中将讨论的电离阵面相混淆。为了估算电离波与马夏克波之间的差别，重温上节中有关的分析。假设 $Z\propto\sqrt{T}$，介质采用离子的类氢模型，即有

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{[1+(3/2)Z]k_B}{Am_p} + \frac{k_BE_H}{12T}\frac{(Z+6Z^2+12Z^3)}{Am_p} \tag{7.60}$$

如果上面 c_V 式子中所有的项都很重要，则不可能存在辐射热波的自相似解。然而当 $T_e>$ 10eV，上式中 Z 最高阶的项成为主导，这种状况下就可以取 $c_V=c_{V0}\sqrt{T/T_0}$，c_{V0} 是 $T=T_0$ 时的 c_V 值。从而可以证明，如同式(7.49)～式(7.51)那样有

$$-\frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\mathrm{d}^2f^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{7.61}$$

式中 f 和 ξ 的定义与以前相同。式(7.61)同样可以做数值积分，但是下面打算发展一个这种方程描述的常通量模型。此时，辐射通量成为

$$F_R = -\rho c_V T_0\sqrt{\frac{W}{t}}\sqrt{f}\frac{\mathrm{d}f^{n+1}}{\mathrm{d}\xi} \tag{7.62}$$

假设该通量保持常值，利用初始条件：$\xi=0$ 处 $f=1$，积分式(7.61)，得到

$$T = T_0(1-\xi/\xi_0)^{2/(2n+3)} \tag{7.63}$$

再积分得到能量的增加率为

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\int_0^{\xi_0}\rho c_V T\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\rho c_{V0}T_0}{2}\sqrt{\frac{W}{t}}\left(\frac{2n+3}{2n+6}\right)\xi_0 \tag{7.64}$$

令上式相等于辐射通量 F_R，即有

$$\xi_0 = \frac{2\sqrt{(2n+6)(n+1)}}{2n+3} \tag{7.65}$$

以及
$$x_0 = \frac{2\sqrt{2n+6}}{2n+3}\sqrt{\frac{K_{rad}|_{T_0}}{\rho c_{V0}}}\sqrt{t} \tag{7.66}$$

图7.11表示式(7.65)计算的波阵面位置 ξ_0 值，可以看出，电离系统的马夏克波短于常比热容系统的情形。图7.12比较了式(7.63)计算的波形与传统马夏克波形状，它们之间没有明显的差别。

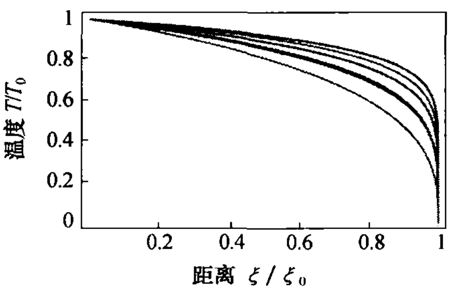


图7.12 电离辐射波的剖面

电离系统中归一化温度 $f=T/T_0$ 的剖面比传统常 Z 值情形的马夏克波稍为平缓一些。图中灰曲线是电离模型的温度剖面，从底部到顶部依次为 $n=3$、4. 5 和7。灰线下方的黑曲线是传统马夏克波相应的数值解。

7.3.3 常能量的辐射扩散波

现在转向具有普遍意义的第二种情形。一个时间有限的事件如激光脉冲、Z 箍缩内爆或天体物理爆发，都可能产生一定量的辐射。

如果辐射释放于近似平衡的均匀介质中,其中辐射压力可以忽略不计,辐射输运是扩散性的,则可以应用与马夏克波情形相同的基本方程组。这里考虑平面情形(泽尔道维奇与莱伊捷尔的书中讨论了球面情形),从式(7.49)即可得出

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\kappa_{\mathrm{rad}}\big|_{T_0}}{\rho c_V(n+1)T_0^n}\nabla^2 T^{n+1}=Y\nabla^2 T^{n+1} \tag{7.67}$$

如果 T 采用能量单位,则上式中定义的系数 Y 具有单位 cm^2/s(能量单位)^n。注意到$\rho c_V T$ 对应于单位体积中的能量,因此 T 是每单位体积、单位 ρc_V 的能量。由于单位面积上的总能量固定不变,式(7.67)成为一个具有两个量纲独立参数的问题。定义每单位面积、单位 ρc_V 的能量 $Q=\int T\mathrm{d}x$,其单位为 cm · (能量单位),量 $Q^n Yt$ 则具有单位 $\mathrm{cm}^{(n+2)}$,从而可知寻求的无量纲自相似变元为

$$\xi=x/(Q^n Yt)^{1/(n+2)} \tag{7.68}$$

根据此式可以预料热波中任何特定点的位置距离将正比于 $t^{1/(n+2)}$,例如,对应于最高温度某个分数的温度的位置。由于 n 一般为 4 或 5,这样扩散波的传播要比马夏克波慢得多。然而与马夏克波情形相比,这里没有固定的温度值可用来对温度变量 T 进行自然的归一化。确实需要一个与时间有关的归一化的温度变量,因为当能量朝外输运时最高温度必须随时间而下降。但是,T 的归一化变量不一定具有显式的空间依赖关系,因为所有的空间依赖关系可以蕴涵于自相似变量 ξ 的演化之中。为了看出归一化所起的作用,我们考察归一化函数 f 的空间导数,得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{(Q^n Yt)^{1/(n+2)}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \tag{7.69}$$

还可看到式(7.67)的右部若用 ξ 的项表达,则成为

$$\frac{Y}{(Q^n Yt)^{2/(n+2)}}\frac{\mathrm{d}^2 T^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{7.70}$$

由于式(7.67)左部的时间导数将引入一个$(1/t)$的因子,把式(7.70)乘以 t,就可找到使 T 归一化的有效方法,与其一致的单位是$[Q^2/(Yt)]^{1/(n+2)}$,因而得到$f=T/[Q^2/(Yt)]^{1/(n+2)}$。应当指出,f 定义式中的分母并不是 T 的初始温度 T_0,甚至用此分母相乘可知,这样得出的 $\xi=0$ 处 f 值所给定的 T_0 是一个时间函数。由于 f 并非与时间无关,为了得到 f 的方程,必须看到

$$\frac{1}{[Q^2/(Yt)]^{1/(n+2)}}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{f}{(n+2)t} \tag{7.71}$$

而且在关于 t 和 ξ 的偏导数之间有着通常类型的关系式,即

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{-1}{n+2}\frac{\xi}{t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \tag{7.72}$$

从而式(7.67)成为

$$f+\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}+(n+2)\frac{\mathrm{d}^2 f^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^2}=0 \tag{7.73}$$

此方程式的解为

$$f(\xi) = \left[\frac{n\xi_0^2}{2(n+2)(n+1)}\left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2\right)\right]^{1/n} \tag{7.74}$$

正如预期的那样，这个解具有由 ξ 表示的固定形状。理应如此，因为 f 对时间的依赖关系已全部纳入 T 的归一化表示之中，从而有 $T(0) \propto t^{-1/(n+2)}$。

习题 7.8

证明式(7.74)是方程式(7.73)的解。建议采用计算机数学程序进行这项工作，各步骤应作简要说明。

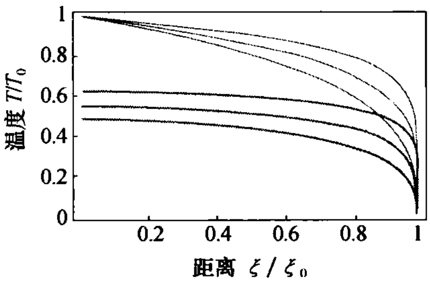


图 7.13　辐射扩散波的剖面，即归一化温度幅度 T/T_0 与归一化自相似变量 ξ/ξ_0 的函数曲线

其中常能量的辐射扩散波为灰线，图上方的马夏克波为黑线。这两种曲线从底部到顶部依次为 n = 3、4. 5 和 7。

图 7.13 表示常能量辐射扩散波的形状，并与马夏克波的形状做了比较。注意到，常能量波中 T_0 的绝对值随时间下降，而马夏克波并非如此。相比之下，常能量波的温度剖面平坦得多。这两种波都具有很陡峭的波阵面，这是非线性扩散波的特征。

ξ_0 的值应通过关于总能量的积分而求得。Q 和 f 的定义式意味着正确的归一化应满足下式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \left(\frac{n}{2(n+2)(n+1)}\right)^{1/n} \xi_0^{(n+2)/n} \times \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{n}\right)} = 1 \tag{7.75}$$

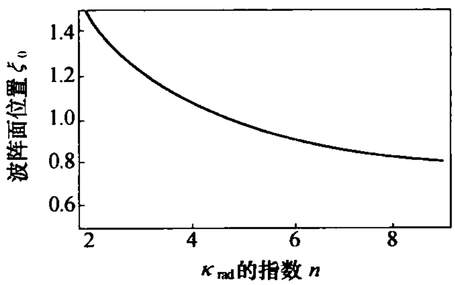


图 7.14　常能量辐射扩散波的波阵面位置

图 7.14 表示 ξ_0 值与 κ_{rad}的指数 n 的函数关系。可以看出，在对于高能量密度等离子体有意义的整个 n 值范围内，在 10% 差别的意义下 $\xi_0 \approx 1$。可以使用这个值计算热波阵面的位置。注意到在真实问题中人们也许知道 Q 而不知道 T_0，但一定知道$\kappa_{\mathrm{rad}}|_{T_0}/T_0^n$。在上述近似下，热波阵面的位置为

$$x_0 = \xi_0 (Q^n Y t)^{1/(n+2)} \approx \left[\left(\frac{Q}{T_0}\right)^n \frac{\kappa_{\mathrm{rad}}|_{T_0}}{\rho c_V (n+1)}\right]^{1/(n+2)} t^{1/(n+2)} \tag{7.76}$$

习题 7.9

考虑一个金制容器，其形状可允许做合理的平面假定，并设容器内部处于真空之中的两个平面器壁相距 1mm。若金的密度 $\rho = 20\mathrm{g/cm^3}$，比定容热容 $c_V = 10^{12}\mathrm{erg/(g \cdot eV)}$ 都作为常数，其他参数采用第 6 章中适当的数据。再假定初始时两壁之间的真空中辐射能量密度为 $100\mathrm{kJ/cm^2}$，初始壁温可忽略不计，器壁材料中热波剖面近似为方波。试计算 0 ~ 10 ns 期间热波阵面位置以及器壁表面温度与时间的函数关系，画图表示两壁所含能量与真空中能量

的比值,并讨论得到的结果。

习题 7.10

对于球对称系统,试推导相当于式(7.76)那样的计算公式。

至此结束了关于辐射扩散波的讨论。本章最后的 7.5 节将讨论与电离阵面有关的论题。

7.4 辐射冲击波

辐射冲击波是其相关流场的密度和温度结构(剖面)受到已被冲击加热物质发出辐射影响的冲击波。这个简单的定义覆盖了很大范围的现象,包括所有温度相当高,在日常生活中我们很幸运地不会遇到的那些现象。然而,在高能量密度实验中辐射冲击波较容易产生,在天体物理中更是经常遇见。图 7.15 表示的从 SN1987A 发展出来的超新星遗迹,就是这样的天体物理学例子。这幅图像中最亮的斑点,是由该星体发出的喷射与环绕它的内环边沿物质相互碰撞而形成的。光谱分析已经表明,正被驱动向环内传播的冲击波是辐射冲击波,至少在一些地方是如此。亮斑的出现(而不是整个连续的发光环),说明环内的内沿处存在稠密物质的多个尖刺,这可能是该环形成过程中瑞利-泰勒(RT)不稳定性作用的结果。

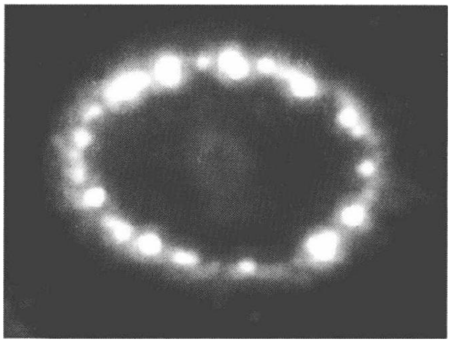


图 7.15 2003 年 11 月拍摄的超新星遗迹 SNR1987A 的图像
引自 NASA, P. Challis, R. Kirshner (Harvard - Smithsonian Center for Astrophysics) and B. Sugerman (STScl)

7.4.1 辐射冲击波的各种状况

本节讨论辐射冲击波出现的条件以及决定辐射冲击波结构的物理条件。本章引言中已看到(图 7.1),与密度分布和物质运动的细节有关,当温度为数十电子伏特和数百电子伏特时辐射通量和辐射压力分别成为重要的(主导)因素。冲击波提供的加热作用驱使等离子体进入辐射状况,或者说冲击波可以出现在一个已经处于辐射状况的等离子体中。冲击波驱使等离子体进入辐射状况的条件是,其速度至少应当快到足以使辐射通量超过物质能量通量的程度,这里辐射通量的标度关系是温度的 4 次方,也就是冲击波速度的 8 次方,物质能量通量的标度关系是冲击波速度的 3 次方。

在非辐射状况下,紧接冲击波阵面后的温度 T_s 由式(4.20)给定,这里重写如下:

$$RT_s = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}u_s^2 \tag{7.77}$$

式中 u_s 为冲击波速度。

下面关于气体"常数"$R = k_B(Z+1)/(Am_p)$的讨论有时很有用处,一般说来 R 与温度有

关。我们指出,RT_s 的单位是每单位质量的能量。当 $\gamma=4/3$,$Z+1=A/2$,$u_s=100\text{km/s}$ 时,$T_s=6.4\text{eV}$。由此可知,在冲击波速度远低于 100km/s 的情形中,辐射作用几乎没有重要性。

与每个离子共享能量的平均电子个数为 Z,但是这个参数是冲击波问题的困难之源。第 3 章中已经讨论过 Z 怎样随温度而变化。另外,首先冲击波加热离子,然后电子与离子平衡,使得密度相当低的物质中在紧接密度跃变之后 Z 可能变为零。一般说来,也许需要把离子温度和电子温度分别处理,7.4.9 节中还要再回到这个问题(前面 2.3.3 节中以图 2.3 作为参考,对此已作了讨论)。然而,正是电子与辐射有着至关重要的耦合。为简单起见,假设冲击波后离子与电子立即平衡,实际上这意味着紧接冲击波(即密度和离子温度的跃变区)后的平衡区(这里电子与离子发生平衡)可以忽略不计。这个平衡区发出的辐射按照电子温度的 4 次方而增长,因而大多数这样的平衡区对于辐射动力学的贡献并不重要。此外,在 7.4.9 节中将看到,这种平衡区是十分狭窄的。

图 7.16 表示式(7.77)计算的冲击波温度,介质为氙(Xe)和 CH。对于由碳(C)和氢(H)组成的等离子体,可以把 A 代之以 $(1+12)=13$,并取 $Z=1+Z_C$,这里假定氢原子已电离,Z_C 是碳原子的平均电离度。这种做法会影响低温范围的结果,但对双对数坐标平面的曲线图几乎没有影响。式(7.77)只适用于辐射压力可忽略不计的场合。当辐射压力变得重要时,则需要进行基于基本方程组的更详尽的计算。然而,图 7.16 已足以表明达到辐射状况所需要满足的条件。作为大致的数据,为了达到辐射通量变得重要所需的数十电子伏特温度,冲击波速度应达到几十千米每秒;为了达到辐射压力变得重要所需的数百电子伏特温度,冲击波速度应达到数百千米每秒。对于氙等离子体,上述这些速度值只是对于 CH 等离子体情形所需速度的若干分之一。

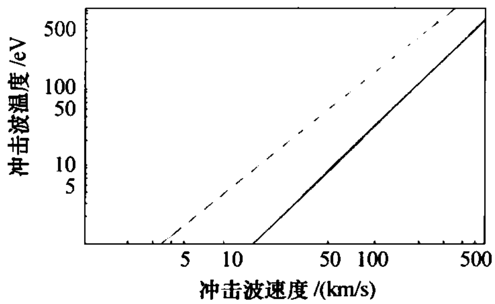


图 7.16 氙(虚线)和 CH(灰线)等离子体中冲击波后的温度
(计算中没有考虑很高速度下辐射压力的作用)

在辐射通量超过物质能量通量之前,辐射已经对冲击波产生的密度跃变前方的介质产生影响,这个受影响的区域即是**辐射前驱波**,这将作为一个专门问题在 7.4.3 节中具体讨论。为了把这里的讨论与其他应用联系起来,我们必须鉴别“辐射前驱波”的两种可能类型。

第一种称为**透射前驱波**,大家最熟悉的例子就是雷击,在由冲击波演化形成的雷声传来之前,人们先看到“前驱波”——雷电闪光的到来。这种情形中该前驱波是由驱动冲击波的

雷电爆炸所造成,而不是冲击波本身导致的。另一个例子是强烈到足以驱动辐射冲击波的大气层中的爆炸。此时,冲击波自身发出的一些(光)辐射在辐射冲击波直接影响区域以外很远处仍可看到。因此可以说,透射前驱波就是来自冲击波阵面或其形成源的辐射,这种辐射在传播中介质对其吸收较弱,因此在很远距离外都能看到。人们对这种透射前驱波兴趣不大,下面还将作简短讨论。

第二种辐射前驱波称为**吸收前驱波**,人们对它的兴趣要大得多。这种类型前驱波中辐射被冲击波前(上游)介质所吸收,而且辐射强度高到足以影响上游介质的状态,主要是使其温度增高。以下除非专门说明,术语"前驱波"或"辐射前驱波"都是指吸收前驱波。前驱波的一个重要问题是其几何形状,为了使前驱波维持平面波形状,真实的实验中需要使用横向尺寸远大于定态前驱波长度的辐射源,这是一个十分严格的约束条件。球面形状的实验可以避免这种约束,但是在三维膨胀过程中单位面积上的辐射能量将严重下降。

第 4 章中已经论述,冲击波的概念内在地包含着对不同物理尺度的某种区分。通常的流体动力学冲击波中,对黏性扩散至关重要的空间尺度必定远小于流场的全局性尺度。辐射则在问题中引入了另一个基本上与光学深度有关的尺度。类似地在各种场合下,电子-离子能量交换(7.4.9 节)、热传导或者磁流体力学效应等机制也会引入另外的尺度。对辐射至关重要的空间尺度也远大于任何黏性效应的尺度。因此,存在考虑整个系统的两种方法,包括与冲击跃变相关的密度跳跃区上游和下游两边区域中辐射的作用。

一方面,如果把介质看作无限大的(以光学深度作为衡量),则可采取这样的观点:辐射变动了冲击跃变区的结构,把该区域在空间上扩展到好多个(也许很多个)辐射平均自由程。此时所谓的"冲击波",即是指很远处未受扰动的上游区域与另一方向很远处定态下游区域之间的整个范围。我们只能认为相对局域化的密度增高区域即是"密度跳跃"区或者"黏性冲击波转变"区。这就是大多数早期文献,包括泽尔道维奇与莱伊捷尔的以及 Mihalas 和 Mihalas 的书所采取的观点。

另一方面正如本章引言所述,所考察的系统可能是光学薄的,可以是上游方向或下游方向的光学薄,或者两个方向光学都薄。这意味着,来自远处的冲击波源的辐射以及从已被冲击波加热的任何物质发出并返回到冲击波转变区的辐射,两者之和可以忽略不计。只要受到来自冲击波的辐射影响的整个区域没有很好地隔离于其他影响之外,把"冲击波"看作密度发生快速增大的区域也许更为适宜。讨论光学薄的天体物理冲击波时,"冲击波"的术语使用得更加普遍,例如 Shu 所写书中的例子,这里辐射与周围介质的相互作用可能影响到上游和下游介质的状况。

光学深度参数提供了把辐射冲击波分类的有效方法。在第 6 章中已经看到,辐射输运的处理方法与输运所通过介质的结构有关,特别与其光学深度有关。辐射输运的不同状况,与冲击波行为的主要差异相对应。在光学深度十分小的极限下(这里辐射的作用只是使受冲击层冷却),受冲击层能够演化成密度增密达到波前介质若干量级的程度。另一个极限下,即在光学厚并且辐射为主导的等离子体中,密度的增长被限制于最多为 7 倍(第 3 章中所述,辐射主导的等离子体的行为类似于 $\gamma = 4/3$ 的多方气体)。把辐射冲击波及其性态进行分类的一个有效方法是,在以上游、下游区域介质的光学深度为坐标参数的平面上作分区

图,图 7.17 即是这种分区的定性描述。下面简要讨论该图中标注的四个区域。

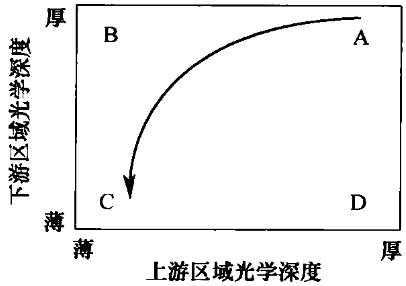


图 7.17　在上、下游介质光学深度参数平面上区分的辐射冲击波状况

(图中四角所对应的四种状况已在正文中讨论,曲线表示超新星爆炸波状况定性的变化迹线)

(A) 厚 - 厚冲击波。图 7.17 中状况 A 表示上游、下游区域介质都是光学厚的情形。这个范围中最有意义的是,把黏性密度增长和所有的辐射作用处理为展延的单个冲击波结构的组成部分。这种结构的许多特色可以从假定介质处于局域热动力学平衡的理论中得知,7.4.6 节将讨论这种状况。对于 $\gamma \geqslant 4/3$ 的典型理想气体,冲击压缩后的密度比不可能大于 7 倍。另外,在某些场合下密度的变化是连续的,不存在局域化的跃变。出现这种冲击波的天体物理环境必然是既灼热又稠密的,星体内部的冲击波属于这种类型,例如,超新星中正在爆发星体内部的爆炸波。这样的冲击波还可能存在于某些天体物理的“致密客体”内部(如脉冲星),但是对它们的处理方法必须是相对论的。很难想象,若不在瞬态的特殊情形中,如何可能进行平面构形的实验室模拟实验。其困难之一在于前驱波的长度随冲击波速度剧烈增长(见 7.4.4 节),以至于在实验参数变动的现实范围内无法产生可以测量的长度有限的辐射前驱波。球面构形的实验也许更有潜力,但是如何形成具有多种尺度光学深度的系统等挑战性问题仍然十分严重。

(B) 厚 - 薄冲击波。在图 7.17 中状况 B 的情形,下游区域介质为光学厚,上游区域介质为光学薄,7.4.6 节中对这种状况还要深入讨论。此情形中黏性冲击波转变区的下游为一冷却层,再后面连接着定常的下游终态区。这种状况在实验中较为普遍,此时由一个光学厚的活塞(某些情形中是光学厚的已受冲击的物质层)驱动一个辐射冲击波,向深度小于定态前驱波长度的介质层中传播。然后该上游物质很快被加热,以至于变为光学薄的介质。这种系统在天体物理中的例子,包括超新星中爆炸波透出星体的情况,以及一些双星系统中形成的吸积冲击波。

(C) 薄 - 薄冲击波。在 7.4.5 节还要深入讨论的状况 C 情形中,下游和上游区域的介质都是光学薄的,这样的冲击波是天体物理中观察到的最为普遍情形。部分原因是由于它们容易被看到(当辐射可以从星体中发射出来时)。相当稠密环境中的超新星遗迹冲击波属于这种类型,人们认为来自红超巨星前身星的Ⅱ型超新星造成了这样的条件。许多冲击波 - 星云的相互作用,包括由超新星冲击波驱动的一些情形,也属于这种类型。逆着喷流传播的冲击波(或者由逆着喷流运动的块体所驱动的冲击波)也可能属于这种类型。这类冲击波的整个下游区域是一个辐射冷却层,当下游介质的温度达到一个由当地能量产生与耗

散(而不是由该冲击波)所决定值时,该冷却层到此为止(在足够大的系统中)。这种冲击波可达到的密度增长在形式上没有界限,其意义是这种密度增长仅受外界因素的限制,诸如初始忽略不计磁场的压缩或者由于其他能源导致的温度极限的出现等。在密度相当低的气体中进行的一些冲击波实验,可以产生这样的条件。

(D) 薄-厚冲击波。在定常状态下产生状况 D 并不是随便就能做到的,因为这需要使受冲击物质在受到冲击时变成为光学薄的,同时又要保持上游区域的介质是光学厚的,还应具有足够的深度可以维持定常的前驱波。光学深度的这种变化,可以依靠辐射驱动的电离阵面来实现,这将在 7.5 节和 8.2.3 节中讨论。依靠只涉及物质流动的冲击波来得到这样的响应,十分困难。但是假如有一个速度非常高的低密度来流撞击一个较为稠密的物质,这种条件也许可能实现。如果能够形成这样的系统,由于朝下游方向持续地损失能量,原本可能存在一个十分稠密的已冲击层。某些冲击波-星云的碰撞和某些实验,就是两个暂态性的例子。冲击波与星云碰撞中如果星云相当稠密而且巨大,以至于在一定时间内是光学厚的,则可能属于这种系统。超新星遗迹 SNR1987A 与其“内环”的碰撞有可能是如此。一个灼热的气体薄层驱动一个冲击波穿过大得多的气体区域的一类实验,也可能属于这种状况。如果冲击波被驱动得更剧烈或更持久些,则上面各种情形似乎都是向光学薄-薄状况的过渡,并且在上述意义下这些冲击波不会导致光学厚上游区域的出现。

7.4.2 辐射冲击波的流体动力学

我们将会看到,辐射冲击波的一些重要性质与辐射输运的细节无关。本节考察多方气体情形,研究在辐射前驱波和辐射冲击波作用下它们的性质应当怎样变化。也就是说,我们将考察气体的什么性质的确真正与辐射输运的细节无关。本节得到的结论也适用于其输运性质比后面采用模型更为复杂的冲击波,这种复杂情形的例子可以是存在显著多普勒频移时由线谱辐射承担的能量输运过程。我们将把这个问题放在辐射通量状况的框架中进行讨论,并假定辐射压力和辐射能量密度都可以忽略不计。如通常那样,在冲击波参考系中分析定态的平面系统,此时在质量、动量和能量方程守恒形式中通量项的散度必定为零。采用第 4 章中论述的通常的冲击波参考系,来流具有负速度。质量通量 ρu 处处守常,并相等于其在前驱波以外区域中的值 $-\rho_0 u_s$,这里 ρ_0 为上游很远处介质的密度,u_s 为冲击波速度。动量通量守恒给出

$$p + \rho u_s^2 = p_0 + \rho_0 u_s^2 \tag{7.78}$$

式中 p_0 为上游介质的初始压力。

连续性方程和能量守恒关系分别为

$$\frac{p}{\rho u_s^2} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{p_0}{\rho_0 u_s^2} \tag{7.79}$$

$$\frac{RT}{u_s^2} = \frac{\rho_0}{\rho}\left(1 + \frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}\right) - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \tag{7.80}$$

式(7.80)利用了关系式 $p = \rho RT$,在温度 T 与 $R = \dfrac{(Z+1)k_B}{Am_p}$ 条件之下,RT 与每单位质量等离子体具有的热能成正比。这些结果示于图 7.18 和图 7.19,其中采用压缩度倒数(ρ_0/ρ)作

为自变量。应当指出，虽然辐射变量没有进入这些关系式中（只要 $p_R \ll p$，总是如此），这些图线同样适用于非辐射冲击波和辐射通量状况下的辐射冲击波。无论在前驱波中还是在跨越冲击间断时，压缩度变化所对应的压力增大和温度变化都已在图中表示出来。当(ρ_0/ρ)下降时，压力持续增大，而且对冲击跃变幅度上升没有约束。相比之下，冲击压缩中加热与 $p\mathrm{d}V$ 做功两者的竞争形成了图7.19中热能曲线的最大值性态。仅当黏性密度转变的初态和终态分别位于图中所见温度最大值的两边时，才会出现形式上的密度间断区（越过密度跃变区时温度不可能先增加后下降，否则会对辐射通量造成物理上不正确的后果）。在非常弱冲击波的情形，压缩度倒数一直位于温度最大值的右面，形成密度的连续转变。在一定条件下，辐射主导的冲击波中也可能出现这种情况。

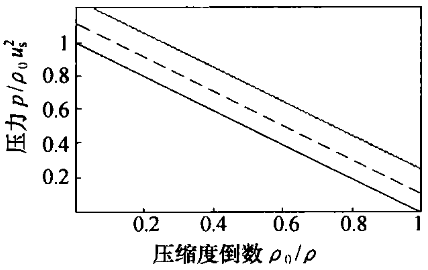


图7.18　以 $\rho_0 u_s^2$ 作归一化的冲击波后物质压力与压缩度倒数的函数关系

各曲线由下到上依次为上游压力为零（黑线）、马赫数为 $3/\gamma$（虚线）和马赫数为 $2/\gamma$（灰线）。

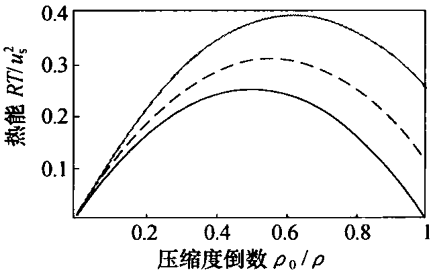


图7.19　冲击波后介质的温度

RT 表示每单位质量物质具有的热能，已用 u_s^2 作归一化。曲线表示 RT 与压缩度倒数 ρ_0/ρ 的函数关系，由下到上依次为上游压力为零（黑线）、马赫数 $3/\gamma$（虚线）和马赫数 $2/\gamma$（灰线）。

把辐射通量引入多方气体的能量通量方程，得出

$$\left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}\right)u + F_R = -\frac{\rho_0 u_s^3}{2}\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}\right) + F_0 \tag{7.81}$$

式中 ρ_0、p_0 和 F_0 分别为处于某个预设定常状态的上游介质的密度、压力和辐射通量。

注意到式(7.81)右部第一项的负号，这是按照本书采用的关于冲击波的标准记法，流动速度为负，而“冲击波速度”u_s 取为正值的结果。

为了确定常数 F_0，必须先理解其物理意义。存在三种极限情形，由于特殊的原因，F_0 分别具有特殊的值。

第一，冲击波完全处于光学厚介质中的情形，对于任何辐射都达不到的上游状态的介质，可取 $F_0 = 0$，此时进入系统的辐射能量通量是物质能量通量的负值。

第二，横向无限展延的平面冲击波情形，其上游区域具有有限的光学深度，此时 F_0 应对应于某个位置以外上游区域中损失的辐射能量，这个位置可以合理地看作定常的初始状态。在冲击波发生期间该位置处的密度、温度值本来可以从其他值演化为上述状态值。另外，与第一种情形相比，这种情形中传至该系统其余部分的净能量通量减少了，变为进入的物质能量通量与传出的辐射通量之差值。

第三，横向有限展延的平面冲击波（阵面上或多或少有些保持平面形状的部分），这是

与形成光学薄上游区域的各种实验有关的情形。此时，F_0 表示某个指定的轴向位置以外区域中的能量损失和到达这个位置之前区域中的径向能量损失之和。由于式(7.81)应保持能量守恒的缘故，任何从辐射通量中移出的能量都必须被系统中的物质吸收掉。因此，当吸收降低了上游区域的辐射能量通量时，从更上游处返回来的物质能量通量也必须降低。相比之下，当横向损失降低了上游区域的辐射能量通量时，物质能量通量并不下降。

习题 7.11

考虑有限直径和有限长度的圆柱形区域中的物质平面流动系统，在径向和轴向都有辐射损失，沿整个圆柱面进行积分，就可明显地证明上述第三种情形的论点。

为了进一步阐明辐射的作用，应当讨论辐射冲击波中发生的能量循环。当冲击波建立时，系统中的能流按照以下序次展开，起始是从上游远处传来的机械能和内能。在冲击波和已受冲击物质中，等离子体把机械能转变为增加的内能和辐射。一部分辐射随着物质朝下游传播而去，其余的辐射向上游方向传播。如果在上游区域中辐射被吸收(出现吸收之处则 F_R 减小)，相当于把内能加入到来流物质之中。在辐射加热上游物质的定常过程中，进入冲击波的机械能和内能总量高于冲击波建立之前介质中的初始值。因此，若把冲击波作为一个系统看待，其各环节包括来流中的物质能量、上游物质吸收辐射引起的能量循环、辐射朝上游方向(也许还有径向)的逸出，以及辐射能量和物质能量向下游方向的逸出。

回到式(7.81)，在没有热通量的情形(这里指 F_R 和 F_0，也可以是任何热通量)，该式提供了决定压力的另一个条件。式(7.79)和式(7.81)联立求解，确定了冲击波后唯一可能的压缩度。然而，热通量的出现开启了一个更广阔的可能性范围，此时式(7.79)和式(7.81)的联立解给出

$$F_R - F_0 = \frac{\rho_0 u_s^3}{2}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 - 1 - \frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] \tag{7.82}$$

按照上述几种方法选择 F_0 值，下面将广泛地使用式(7.82)确定辐射通量。

习题 7.12

推导式(7.82)。

图 7.20 表示 $p_0 = 0$ 时净辐射通量($F_R - F_0$)与压缩度倒数的函数关系，这里辐射通量已用来流的动能通量($\rho_0 u_s^3/2$)做了归一化。注意到该图曲线与 γ 有关，但是图 7.18 和图 7.19 中的压力 p 和比热能 RT 的曲线则与 γ 无关。仅当等离子体中出现能量循环时，归一化的净辐射通量才大于零，该循环是指已冲击加热物质发出的辐射使上游物质变热，然后该物质作为来流再把热能返回到冲击波。一个具有多重独立循环圈的相当奇妙的物理系统，需要把归一化净通量驱动到 1 以上。如果所有进入系统的能量最后都朝下游方向辐射散逸或者以其他方式损失，则归一化的净辐射通量降为 -1，这对应于零温下压缩度形式上为无限的状态。

图 7.20 对于理解辐射冲击波的性质极为重要。下面将讨论图中一些有关的问题，而且后面还要反复回顾这种类型的曲线图。辐射冲击波的一般性态如该图中迹线所示，当

(F_R-F_0) 从 $\rho_0/\rho=1$ 处的零值增长到最大值(该最大值等于从受冲击区域进入前驱波区域的 (F_R-F_0) 值),相应于前驱波区域中产生一些压缩。由于跨越黏性冲击波转变(即密度跃变的灰线)区时,(F_R-F_0) 迹线是连续的,这个 (F_R-F_0) 最大值确定了冲击转变所产生的压缩度。密度跃变之后也许还会出现进一步的演化,这种演化的性质与下游区域的边界条件有关。这个边界条件可以对应于:①如果在冲击波下游区域存在高亮度辐射源,则边界处为正辐射通量;②如果下游区域是光学厚的,则取边界处辐射通量值为零;③如果已受冲击物质因发射散逸于系统外的辐射而发生冷却,则边界处为负辐射通量。$(F_R-F_0)=0$ 处横坐标的压缩度倒数值对应于在非辐射冲击波中可以达到的终态,即 $(\gamma+1)/(\gamma-1)$。这个值可能(也可能不)对应于真实辐射冲击波的终态密度值。下节将讨论一些特殊的情形。

讨论辐射冲击波中已受冲击物质内部的流场结构时,我们需要一个描述空间演化过程的方程式,这种讨论只限于定常冲击波。研究途径是,假设终态或者紧接冲击波后的状态可以在基本守恒方程组的基础上确定。从这个状态点出发,积分能量方程式就可确定流场的剖面。再次从式(7.2)出发,但是关注于流场量的空间导数。假设介质为处于辐射通量状况的多方气体,引用式(7.78)和连续性方程,得到可用于研究流场量空间剖面的方程式为

$$\frac{\rho_0 u_s^3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{\rho_0}{\rho}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right]=-\frac{\partial F_R}{\partial x} \tag{7.83}$$

冲击波把其全部能量都辐射出去,这可能做得到,也可能不现实。已受冲击层发出的辐射通量 F_R 在上游、下游两个方向的上限是相等的,每个方向上都为 $\rho_0 u_s^3/4$,因为这个值相当于把冲击波所有能量都辐射出去了。基于下面对光学薄前驱波的讨论,该前驱波中温度的上限 $T_{eff}=(\rho_0 u_s^3/4\sigma)^{1/4}$,并且随密度而增大,同时,依据式(7.77)可知,紧接冲击波后的温度只与 u_s 有关。因此,在任何冲击波速度 u_s 之下总存在一个密度,高于此密度时,定常冲击波不可能把其所有能量都辐射出去。图 7.21 表示这个极限温度 T_{eff} 对冲击波速度 u_s 的依赖关系,密度参数的范围为 $10^{-21}\,g/cm^3\sim 1\,g/cm^3$。图 7.21 中还展示了式(7.77)给出的非

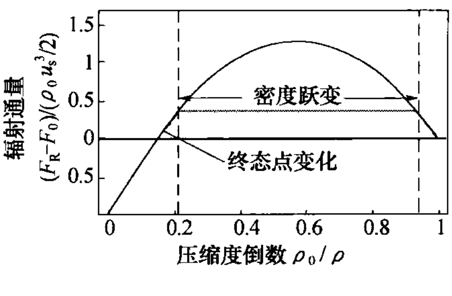


图 7.20　辐射冲击波中以 $\rho_0 u_s^3/2$ 作归一化的净辐射通量与压缩数倒数 ρ_0/ρ 的函数关系

$\gamma=4/3$。灰曲线表示典型的冲击波迹线。

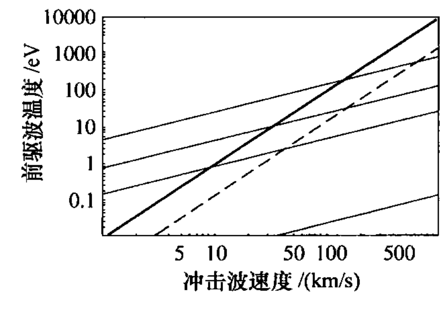


图 7.21　前驱波中介质等效温度 T_{eff} 与冲击波速度 u_s 的函数关系

实曲线表示若要把全部来流能量通量辐射出去所需要的等效温度。从底部到顶部的密度依次为 $10^{-21}\,g/cm^3$、$10^{-6}\,g/cm^3$、$10^{-3}\,g/cm^3$ 和 $1\,g/cm^3$。倾斜的灰曲线表示当没有辐射作用时呈现的冲击波后温度,介质分别是 Xe(实线,$\gamma=4/3$)、H_2He_1(虚线,$\gamma=5/3$)。

辐射冲击波后的介质温度,其中取 $R = k_B(1+Z)/(Am_p) = 1.5\times10^{11}\mathrm{erg}/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{eV})$ 或 $1.5\times10^{12}\mathrm{erg}/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{eV})$,大致上分别对应于氙等离子体和低 Z 等离子体。当 T_{eff} 的上界超过非辐射冲击波后温度时(即图 7.21 中黑线位于灰线上方时),意味着辐射过弱使已受冲击介质完全冷却,处于冲击波后状态的介质仍然是温热的。另外如下节将讨论的,定常状态下实验室实验中的受冲击层似乎不能维持光学薄的状况。

一方面来看,以上定义的等效温度(因而定义了前驱波中介质的温度)在天体物理星际情形中确实可以忽略不计,因为那里介质的密度低于 $10^{-21}\mathrm{g/cm^3}$ 的量级。如果下游区域是光学薄的,光学深度为 κd,则其温度 T_f 高于等效温度,因为 $\sigma T_{\mathrm{eff}} = \kappa d\sigma T_f^4$。然而另一方面,实验室实验中前驱波区域的温度可以趋于 T_{eff}。对于 $\gamma\leqslant5/3$,此时初始的归一化压力 $p_0/\rho_0u_s^2\leqslant0.25$,虽然较小但并不总是可以忽略的。

回到关于前驱波区域中介质性质的讨论。假设上游介质的初始压力 $p_0=0$,从式(7.80)和式(7.81)求解前驱波区域中的归一化温度 RT_p/u_s^2,可看出该温度只与归一化净辐射通量 $F_{\mathrm{Rn}}=2(F_R-F_0)/(\rho_0u_s^3)$ 有关。注意到,当来流能量通量 50% 从上游方向散失时,$F_{\mathrm{Rn}}\approx1/2$,但当出现能量循环时也许比此值还大些。因此得到

$$\frac{RT_p}{u_s^2} = \frac{1}{(\gamma+1)^2}\left(1-\sqrt{1-(\gamma^2-1)F_{\mathrm{Rn}}}\right)\left(\gamma+\sqrt{1-(\gamma^2-1)F_{\mathrm{Rn}}}\right) \tag{7.84}$$

当 F_{Rn} 趋于零时上述温度也趋于零,本应如此。当 F_{Rn} 增大时,T_p 能够趋近但不会超过受冲击物质发出辐射的温度(关于此点后面还要进一步讨论)。这个结论可用来进行一些有用的推理。

我们使用热辐射表征从光学厚物质层发出的辐射通量,并如第 6 章中所述通过考察热发射率构建光学薄物质层中的辐射通量。特别关注前驱波区域,可以假设在受冲击物质(下游)区域中存在一个可能的最小辐射温度 $T_{\min}$,由公式 $\sigma T_{\min}^4 = F_{\mathrm{Rn}}$ 给定。下游温度自然高于这个最小值,例如,当下游区域为光学薄的,或者从上游返回显著的辐射通量等情形(F_{Rn} 是净通量)。但在任何情况下,$T_{\min}$ 是下游介质可能具有的最低温度。在上述定义下,归一化净辐射通量可写为

$$F_{\mathrm{Rn}} = \frac{\sigma T_{\min}^4}{\rho_0u_s^3/2} = \frac{\sigma u_s^8(RT_{\min}/u_s^2)^4}{R^4\rho_0u_s^3/2} = Q\left(\frac{RT_{\min}}{u_s^2}\right)^4 \tag{7.85}$$

上式定义了辐射强度参数 $Q=2\sigma u_s^5/(R^4\rho_0)$,对于实验室中的辐射冲击波,$Q$ 的典型值为 $10^4\sim10^5$。Q 是无量纲量,但计算时其定义式中各物理量必须采用自洽的单位。若采用 cgs 制,σ 和 R 的单位则分别为 $\mathrm{erg}/(\mathrm{cm^2}\cdot\mathrm{eV^4})$ 和 $\mathrm{erg}/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{eV})$。

图 7.22 表示 RT_p/u_s^2 和 $RT_{\min}/u_s^2$ 值与 F_{Rn} 的函数关系,参数 Q 为 10^3 和 10^5。在 $Q=10^3$ 和图中的 γ 值之下,前驱波温度始终低于最小的辐射温度,从而保证了前驱波区域中辐射总是偏离平衡的,并且对辐射的吸收决定了前驱波区域的结构。这个结论与前驱波区域中辐射输运采用何种具体模型无关。此时,前驱波总是前面所述意义下的透射前驱波。相比之下当 $Q=10^5$ 时,假如辐射通量足够大,则 $T_p>T_{\min}$。如果发生这种情况并且下游物质是光学厚的,则该区域中的前驱波一定是吸收前驱波;否则,可以是吸收前驱波,也可以不是吸收

前驱波。只要 $T_p > T_{min}$，该处辐射通量(曲线)发生偏移，真实的辐射温度升高，因为前驱波的温度 T_p 不可能增长到提供加热作用的辐射的"温度"以上。泽尔道维奇和莱伊捷尔的书中关于光学厚系统的部分详尽讨论了这一点，为此他们认为冲击波后温度是完全确定的。下面将看到，一般说来，受冲击区域发出的辐射通量可能具有对应于某个温度范围的谱分量。即便如此，前驱波的温度也不可能变得这样大，以至于从受冲击物质向前驱波发出然后又返回来的能流起到降低熵的作用，这将违背热力学第二定律(少许能量 $\Delta\varepsilon$ 从受冲击物质中以辐射形式流向前驱波时携带的熵为 $\Delta\varepsilon/T_R$，这些能量以物质能量形式返回到冲击波时所携带的熵为 $\Delta\varepsilon/T_p$。初始时携带的熵不可能超过返回来的熵，即有 $T_p \leqslant T_R$)。因此，对于图 7.22(b)的情形，如果 $F_{Rn} \sim 0.6$，则归一化辐射温度必定为相等于 $RT_p/u_s^2 \approx 0.1$ 的最小值。

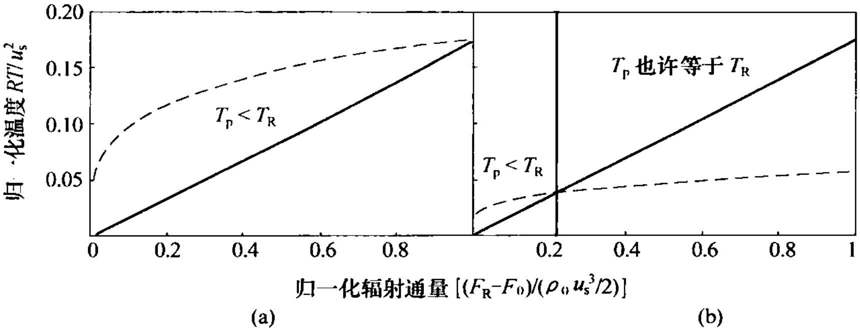


图 7.22　前驱波温度 T_p 和最小辐射温度 T_{min} 的标度关系即，RT_p/u_s^2(实曲线)和 RT_{min}/u_s^2(虚曲线)对于 F_{Rn} 的函数关系

($\gamma = 4/3$。辐射强度参数 Q 为 10^3(图(a))和 10^5(图(b)))

在关于辐射冲击波的早期文献中，$T_p < T_f$ 的**亚临界冲击波**与 $T_p = T_f$ 的临界或**超临界冲击波**之间的区别颇受重视，这里 T_f 是下游区域介质的定态温度(假设存在这样的温度)。在上节论述的意境中，$T_f \geqslant T_{min}$，这个传统观点加以概括：跨越冲击波时辐射通量一定是连续的，因此紧接冲击波后的密度应具有类似图 7.20 所示的性态。由于图 7.19 中的温度曲线相对于通量曲线(图 7.20)向左偏移，紧接冲击波后的温度 T_2 始终高于 T_p。T_f 低于 T_2，但是低多少与辐射输运细节和辐射强度参数 Q 有关。如果 Q 相当小，如图 7.22(a)所示 T_p 永远不会等于 T_f，这样的冲击波称为亚临界冲击波。传统观点认为，冲击波足够强则能使 $T_p = T_f$，这样的冲击波称为临界或超临界冲击波。这些术语的意义蕴涵于使用平衡辐射扩散模型的局域热动力学平衡分析之中。然而对于具有实质性间断结构(包括冲击波在内)系统的研究来说，辐射扩散模型并不十分合适。下面将会看到，在许多真实场合下 T_p 可以趋近于 T_f，但只是一种极限情形而不是一种状态的阈值。在图 7.22 的意义下，可以把超临界冲击波自洽地定义为 $T_p > T_{min}$ 的冲击波，但这并不是传统的定义。简而言之，本书作者相当怀疑传统意义超临界冲击波的存在及其用处。

最后考虑前驱波区域中介质的密度。比较图 7.19 和图 7.20 可知，对于任何有限的压缩度倒数，或者对于任何可能的 F_R 终态值，总存在一个非零的终态温度。例如，对于相应于$(F_R - F_0) \approx 0$ 的压缩数倒数的具体值(根据图 7.20 约为 0.15)和 $\gamma = 4/3$，归一化终态温

度近似为0.12。从图7.19中可以看到，若前驱波温度达到这个终态值，则前驱波中介质密度的增加将在10%～15%之间。与密度的总增长值(约为10的量级)相比，前驱波中这个密度增长并不大，这个估算对下面几节中的假设——前驱波中介质密度不发生变化，并做了某种意义的检验。

7.4.3 辐射前驱波的模型

我们从适用于任何辐射冲击波的普遍的流体动力学，转向对冲击波结构具体模型的考察。下面分为两步考虑，首先分析前驱波的结构，然后分析受冲击物质层的结构。任何这样的分析必须处于所选择的辐射输运处理方法的场景之中。考虑辐射前驱波的两种范例，首先是扩散状况，然后是输运状况。

在考察具体模型之前，首先讨论关于辐射作用的一个简单的阈值。人们可以说，当向冲击波前方发射的电离光子的通量与入射于冲击波的中性原子通量相等时，就出现了辐射前驱波。这个观点也就是说，当来流中所有(或大部分)原子发生电离时，一定可看到对上游介质的加热及其状态的变化。更准确地说，发生辐射前驱波的阈值将出现于上游电离光子通量与上游区域中该通量被吸收分数的乘积相等于来流原子通量的时刻。电离光子通量的一种表示方法，即是把它当作具有冲击波后温度的黑体所发射的光子通量(也就是$2.3\times10^{23}T_s^3$，T_s的单位是eV)与这些光子中被发射并发生电离作用的分数的乘积。这个分数又是下游区域的发射率ε_d与所有光子中发生电离作用的分数α_i的乘积。假如下游区域是光学薄的，则ε_d相等于其光学深度。对于速度高于50km/s的冲击波，电离分数α_i接近1。

习题7.13

依据黑体辐射的普朗克公式，找出发生电离作用光子的分数与温度的函数关系，并画出相应的曲线图。建议利用计算机数学程序作图。

电离光子在上游区域介质中被吸收的分数，相等于上游区域的发射率ε_u。依据上面所述，综合得到如下关于前驱波发生阈值的不等式：

$$2.3\times10^{23}\varepsilon_u\varepsilon_d\alpha_i T_s^3 > \frac{\rho u_s}{Am_p} \tag{7.86}$$

使用式(7.77)，可以把式(7.86)转换为关于冲击波速度的阈值条件：

$$u_s > 270[\rho/(\varepsilon_u\varepsilon_d\alpha_i)]^{1/5}(\text{km/s}) \tag{7.87}$$

在使用稠密气体或者泡沫材料的实验室实验中，式(7.87)右部方括号内的整个量约为1。对于低密度的天体物理系统，式(7.87)是正确的但并不很有用，这里ρ的量级为10^{-24} g/cm^3，为了得到前驱波，首先要使冲击波后温度高到足以使电离光子达到有意义的分数，此外还取决于系统的光学深度。下面将考虑光学深度非常厚和非常薄的两种极限情形。

1. 扩散的辐射前驱波

扩散状况下，人们趋向于把处于超临界冲击波状态的前驱波模型化为马夏克波，因为马夏克波是恒温源发射出来的扩散辐射波。这种情形中应当顾及此时辐射源是运动的事实。马夏克波具有与波传播长度有关的速度，传播距离很短时其速度非常块(马夏克波发生后

的早期阶段中)，当这个长度(传播距离)增大后波就单调地缓慢下来了。还可论证，在定常状态下，冲击波前面的前驱波长度必须满足扩散前驱波速度相等于冲击波速度的要求。无论依据式(7.57)还是式(7.66)，前驱波的长度为

$$x_0 = \xi_0 \sqrt{Wt},$$

式中 ξ_0 为接近 1.6 的常数；$W = \kappa_{\rm rad}\,|_{T_0}/[\rho c_V(n+1)]$。

前驱波速度与冲击波速度相匹配，给定的波速为 $u_{\rm s} = (\xi_0/2)\sqrt{W/t}$，这个条件决定了马夏克波的演化“时间”，也就是这个长度关系可以维持的时间。综上所述，得出定态前驱波的长度为

$$x_0 = \xi_0^2 W/(2u_{\rm s}) \tag{7.88}$$

我们指出，W 与辐射热导率 $\kappa_{\rm rad}$ 成正比，其标度关系为温度的一个较大的幂次(从 T^4 至 T^7)，这就是前驱波长度对冲击波速度的依赖关系非常强的原因。但是在真实系统场景下，人们也许难以观察到这样的前驱波。可以使用定态前驱波长度作为 x_0 的初始关系式，进而找出扩散波达到这个长度的时间 t_0，即有

$$t_0 = (x_0/\xi_0\sqrt{W})^2 = \xi_0^2 W/(4u_{\rm s}^2) \tag{7.89}$$

这个时间随着冲击波速度很快增大。基于这种分析的平面构形真实实验，只是在一个非常狭窄的速度范围内才可能产生定态的前驱波。

如果球面构形的实验能够产生足够大的可以有意义地应用扩散模型的系统，则这种实验手段具有定性上的良好前景。泽尔道维奇和莱伊捷尔的书中考虑了从点源发出的球面非线性辐射热扩散波的情形，发现这种扩散波的运动规律是 $r \propto t^{1/(3n+2)}$，从而其速度正比于 $t^{-(3n+1)/(3n+2)} \approx 1/t$。

改进上面关于平面系统的分析并不十分困难。辐射通量状况下，关于多方气体的能量通量方程式(7.2)成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon\right) + \nabla\cdot\left[\rho u\left(\gamma\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right] = -\nabla\cdot F_{\rm R} \tag{7.90}$$

我们在一次近似意义下改进上述分析，忽略前驱波中介质密度和速度的变化，把该区域看作一个以常速度 $-u_{\rm s}$ 运动的等离子体，γ 近似为常数，并假定冲击波是平面一维的，式(7.90)即可简化为

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - u_{\rm s}\gamma\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -\frac{\partial F_{\rm R}}{\partial x} \tag{7.91}$$

应用第 4 章中的分析方法，就可证明上式不存在自相似解。

习题 7.14

假定 $F_{\rm R}$ 采用扩散模型，试确定式(7.91)是否存在自相似解。

设想反映上游扩散与下游流动之间平衡状况的前驱波能够得到定常发展，因而可在定常状态下考虑这个问题。如果取 $\varepsilon = c_V T$，c_V 近似为常数，并设 $F_{\rm R}$ 由扩散热输运产生，得到

$$-u_{\rm s}\gamma\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\kappa_{\rm rad}}{\rho c_V}\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{7.92}$$

如7.3节中所述，从式(7.92)可以推导出

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{W}{\gamma u_s}\frac{\partial^2 f^{n+1}}{\partial x^2} \tag{7.93}$$

这种情况下$f = T / T_{\text{eff}}$（离开受冲击物质的辐射通量取为σT_{eff}^4）。定义新变量$\zeta = x\gamma u_s/W$，式(7.93)成为

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = -\frac{\partial^2 f^{n+1}}{\partial \zeta^2} \tag{7.94}$$

上式的特解必须满足前驱波边界处的上游辐射热通量与通过来流向冲击波返回的热能互相平衡的条件（这个条件有一些说不清楚的地方，因为辐射输运的扩散处理方法并不完全自洽）。把上述通量平衡条件写为

$$\kappa_{\text{rad}}\nabla T_R|_{\text{shock}} = \gamma\rho\varepsilon u_s \tag{7.95}$$

如果不考虑T_{eff}、$T_R|_{\text{shock}}$和冲击波阵面处物质温度之间的差别（因为对于这些温度的阐释已陷入上述说不清楚的麻烦之中），可以得出下面的定解条件：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = \frac{1}{n+1} \tag{7.96}$$

图7.23表示$n = 4$的前驱波剖面。形成热阵面的式(7.94)的解，表明该处的ζ值约为几分之一。把这个前驱波尺寸与前面简单估算结果作比较，此改进计算与简单估算结果的比值为

$$\sqrt{W}/(\xi_0\gamma u_s\sqrt{t}) = (u_0/u_s)[2/(\xi_0^2\gamma)]$$

式中u_0为马夏克波的速度，前面简单估算中已取$u_0 = u_s$。可以看出，扩散模型给出的前驱波长度是依据马夏克波简单估算的一个分数$2/(\xi_0^2\gamma)$，大约为1/2。换言之，来流的作用除了限制前驱波的膨胀外，还会缩短其长度。

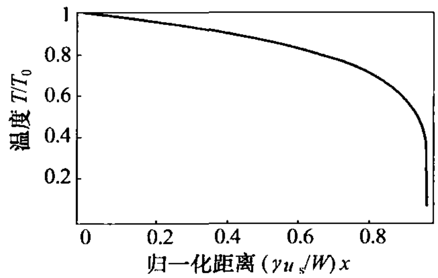


图7.23　扩散前驱波的剖面

$n = 4$时式(7.92)的解例，给出$f(0) = -0.2$

纵坐标表示温度比$f = (T/T_0)$，

横坐标表示归一化距离$x\gamma u_s/W$。

习题7.15

求解式(7.94)，采取若干有关的n值进行计算，并对扩散前驱波的长度可以估算如下：

对于典型参数值：$\chi_R \approx 10^6 T_{\text{eV}}^{-4/3}\text{cm}^2/\text{g}$，$n = 4$，$\gamma = 4/3$，$\rho = 0.1\text{g/cm}^3$，$c_V = 10^{12}\text{erg}\cdot\text{g}^{-1}/\text{eV}$，$u_s = 2\times10^6 T_{\text{eV}}^{1/2}$ cm/s，可得出

$$W = 10^{-4}T_{\text{eff}}^{13/3},\quad W/(\gamma u_s) = W/(8\times10^6 T_{\text{eff}}^{1/2})$$

这里T_{eff}以eV为单位。在上述密度下，100eV时前驱波长度为19μm。密度$\rho = 0.01\text{g/cm}^3$之下则成为1.9mm。图7.24表示密度和温度平面上定态扩散前驱波长度的等值线图，图中标注“limit”的界线是前驱

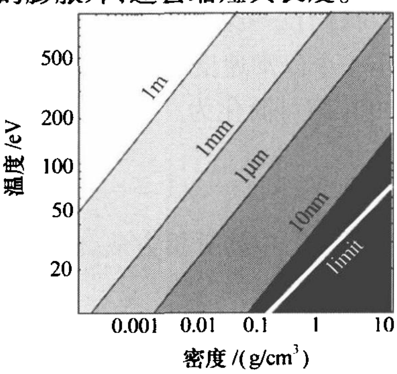


图7.24　扩散前驱波的长度

（各条界线表示标注值的等值线。

密度低于10mg/cm^{3}的泡沫材料和

气体的实验，趋向于产生非常长的前驱波）

波长度降低为电离铍等离子体中10个粒子间距的情形。在此线以下范围，这个模型不再成立。还应指出，许多真实场合下扩散模型可能并不适用，因为被加热的前驱波中介质的不透明度过低。下节将考虑这种情况。

2. 透射的辐射前驱波

对于任何延展多个吸收长度的透射前驱波（包括扩散状况下的亚临界冲击波），可以使用6.2.4节中非平衡扩散理论作为模型。依据式（6.57）和式（6.59），并假定密度不变化系统处于辐射通量状况，得到

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = -\frac{4}{3\bar{\chi}}\nabla\sigma T_{\mathrm{R}}^{4} \tag{7.97}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = 4\kappa_{\mathrm{P}}\sigma T_{\mathrm{P}}^{4} - 4\kappa_{\mathrm{E}}\sigma T_{\mathrm{R}}^{4} \tag{7.98}$$

式中$\bar{\chi}$和κ_{E}为6.2.4节中定义的平均不透明度；κ_{P}为普朗克平均不透明度。

虽然式（7.98）中出现三种不同的不透明度，但是技术文献中普遍不加评论地假定这些不透明度彼此相等。这种做法与一些采用非平衡扩散处理的计算机编码实质上是一致的，然而在数值上是不正确的，可能会引入显著的误差。在T_{P}小于T_{R}的若干分之一的亚临界冲击波情形中，式（7.98）中可以忽略T_{P}，此时的辐射通量只是衰减一些而已。定义光学深度τ为距离与上述“不透明度”乘积的大小，$\tau = \sqrt{\bar{\chi}\,\kappa_{\mathrm{E}}}z$，然后求解式（7.97）和式（7.98），得到

$$F_{\mathrm{R}} = F_0 \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\tau} \tag{7.99}$$

式中F_0为从冲击波阵面透出的辐射通量。

如果吸收机制中逆轫致吸收是主要的，这个结果也许是准确的。但是，只有相当先进的计算机编码才能正确处理上述几种不透明度，从而较准确地估算具有指数型标度关系的前驱波。

3. 输运状况下的辐射前驱波

许多真实情形中，前驱波中以及受冲击物质内部的辐射输运都可能处于输运状况。输运状况是与上游等离子体光学薄或展延有限等情形有关的一种状况，并且此时的辐射通量可能接近于从受冲击区域中发出的全部通量$\sigma T_{\mathrm{eff}}^{4}$。相比之下，扩散状况的Rosseland通量则低得多，只是黑体辐射通量$\sigma T_{\mathrm{R}}^{4}$乘上每单位（化约的）光学深度范围内较小的温度相对变化量。

首先假定辐射压力可以忽略不计，辐射温度与物质温度相等，前驱波区域中介质的密度和速度不因前驱波的作用而变化（如同马夏克波的情形）。在这些假设下，对于平面前驱波情形式（7.2）变为

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \rho u\gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial F_{\mathrm{R}}}{\partial z} = 4\pi\kappa(J_{\mathrm{R}} - B) \tag{7.100}$$

上式可用来有效估算定态等离子体的温度和达到定常状态所需的时间。首先考虑（$J_{\mathrm{R}} - B$），平均辐射强度J_{R}由三个部分组成，分别是来自受冲击物质的贡献（J_1）、来自冲击波阵面和所考察位置（点）之间区域的贡献（J_2）以及来自该位置以上的上游区域的贡献（J_3）。

为了使得简单的分析切实可行，假设上游等离子体在上游方向具有特征尺寸 D，在横向无限展延，所考察位置与冲击波阵面的距离为 d。计算来自受冲击物质的贡献时，取辐射强度（每单位面积、单位立体角的功率）为 $\sigma T_{\text{eff}}^4/\pi$，得出

$$J_1 = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi^2}\int \mathrm{e}^{-\kappa d/\mu}\mathrm{d}\Omega = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\kappa d/\mu}\mathrm{d}\mu \tag{7.101}$$

式中的积分在面向上游的半空间中进行，计算这个积分得出

$$J_1 = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{2\pi}[\mathrm{e}^{-\kappa d} - \kappa d\Gamma(0,\kappa d)] \approx \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{2\pi} \tag{7.102}$$

式中 Γ 为不完全伽马函数。

右部第二个近似式成立的要求是相对于至冲击波阵面的距离而言的，所考察位置处介质的光学深度是小量（$\kappa d \ll 1$）。

为了找到 J_2 和 J_3，必须在空间中积分热辐射强度 B。若记等离子体的温度为 T_{P}，则 $B = \sigma T_{\text{P}}^4/\pi$。我们认为所分析的系统非常薄，以至于按光学深度来衡量，所考察的前驱波距离冲击波阵面非常近。为了计算对 B 的积分，可以假定 T_{P} 为常值，这样得出

$$J_2 = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\int_0^d \kappa B\mathrm{e}^{-\kappa z/\mu}\ \mathrm{d}z/\mu \tag{7.103}$$

式中沿轴向距离的积分估算了 μ 对应极角处的辐射强度，对立体角的积分则覆盖了前向（上游方向）半空间。积分得出

$$J_2 = \frac{B}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa d} + \kappa d\Gamma(0,\kappa d)) \tag{7.104}$$

当 κd 很小时，$J_2 \approx \kappa d(1 + \Gamma(0,\kappa d))$。下面计算 J_3，可以得出

$$J_3 = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\int_0^{D-d} \frac{\kappa}{\mu}B\mathrm{e}^{-\kappa z/\mu}\ \mathrm{d}z = \frac{B}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa D} + \kappa D\Gamma(0,\kappa D)) \tag{7.105}$$

式中对立体角的积分覆盖了下游方向的整个半空间。在写出上式最右面表达式时，已假设 $d \ll D$。由于 $\varepsilon = RT_{\text{P}}/(\gamma - 1)$，可以改写式(7.100)如下：

$$2\kappa[\sigma T_{\text{eff}}^4 - \sigma T_{\text{P}}^4(1 + \mathrm{e}^{-\kappa D} - \kappa D\Gamma(0,\kappa D))] = -\frac{\rho_0 u_{\text{s}}\gamma RT'_{\text{P}}}{\gamma - 1} \tag{7.106}$$

根据前面的假设，上式右部的表达式应当比较小。使用式(7.84)式估算 RT_{P} 的导数，并把 F_{Rn} 的导数取为 $-\kappa F_{\text{Rn}}$，可以看出，对于任何大于 10 的强度参数 Q，上述右部表达式都比较小。因此，得到近似式

$$T_{\text{P}} = \frac{T_{\text{eff}}}{[1 + \mathrm{e}^{-\kappa D} - \kappa D\Gamma(0,\kappa D)]^{1/4}} \tag{7.107}$$

κD 较小时，T_{P} 约为 T_{eff} 的 84%。对于下游光学厚、上游光学薄的冲击波（见 7.4.5 节），T_{P} 即等于下游介质的终态温度。式(7.107)中 T_{P} 随 κD 而增大，κD 较大时在则趋近于 T_{eff}。但是当 κD 增大后，J_{R} 的计算将不再正确。从通量平衡方程可知，κD 增大时净辐射通量下降，T_{P} 也随之降低。然而，尽管前面对于图 7.22 作了讨论，人们还不明白接近冲击阵面处的 T_{P} 怎么会是 T_{eff} 的一个固定分数？对这个问题的回答是，根据假设这个系统是光学薄的，

越过冲击波的许多辐射通量最终从系统中损失掉,因而使得 F_0 增大。人们不可能先验地知道究竟损失了多少辐射通量,这种类型真实系统的情况的确就是如此。正如 7.4.2 节中所述,通量平衡方程所确定的只是前驱波中温度剖面与该区域真正吸收的辐射通量之间的一个关系。

式(7.107)的关系是否恰当,依赖于定常状态如何容易达到,以及实际上是否存在这样的时间,可使得冲击波趋近时前驱波中等离子体得到加热。为了估算这些问题,我们应用式(7.80),并取 $\partial\varepsilon/\partial t \approx \varepsilon(T_{\text{eff}})/t_{\text{ss}}$,这里记上述待确定的时间为 t_{ss},再设 $J_{\text{R}} \approx J_1$, $B \approx 0$, 从而得到

$$t_{\text{ss}} = \frac{\rho\varepsilon(T_{\text{eff}})}{2\kappa\sigma T_{\text{eff}}^4} \tag{7.108}$$

可以看出,这个时间其实是相当快的。对于实验室等离子体,取 $\varepsilon \approx 10^{12}T_{\text{eff}}(\text{erg/g})$,$\kappa \approx 10^6/T_{\text{eff}}(\text{cm}^{-1})$,算出 $t_{\text{ss}} \approx 10^{-6}\rho/T_{\text{eff}}^2$。当 $T_{\text{eff}} \approx 10\text{eV}$,$\rho \approx 0.1\text{g/cm}^3$ 时,$t_{\text{ss}} = 1\text{ns}$,而辐射流体动力学实验通常的时间尺度至少为若干纳秒。因此可得出结论,在实验室实验中前驱波等离子体能够合理地迅速趋近其定态温度。对于星际的天体物理等离子体,$\kappa \sim 5\times10^{-37}\text{cm}^{-1}$,$\rho \sim 10^{-23}\text{g/cm}^3$,$T_{\text{eff}} \sim 10\text{eV}$,可以算出 $t_{\text{ss}} \sim 10^{10}\text{s} \approx 300$ 年。按照天体演化的时间尺度这也是非常快的,但可看出 T_{eff}通常还不够高,以至于对于这样的天体物理等离子体并不重要。上面两例中都有一个初始的过渡期,在此期间冲击波辐射所作用的前驱波区域物质尚未达到这个定常状态。

由此可见,在具有光学薄上游层的冲击波情形中,前驱波可以趋近于定常状态,其等离子体的温度 T_{P} 也将接近 T_{eff}。但应注意,这个结果与 T_{eff}值并无明显的依赖关系,反而是前驱波的温度首先与受冲击层(下游)介质的光学深度有关。当前驱波区域的光学深度增大,则靠近冲击波处的温度趋于增大,但是为了估计温度究竟增高多少,需要进行更加完善的计算。因而,上游介质光学薄情形中,亚临界和超临界冲击波之间所谓的传统区别并不适当。前驱波将由 T_{eff}确定,而 T_{eff}又由下面两节中讨论的下游物质层流场的细节所确定。

习题 7.16

采用类似于式(7.101)和式(7.105)的计算,估算光学薄前驱波中的净辐射通量($F_{\text{R}} - F_0$)。

7.4.4　光学薄介质中的辐射冲击波

本节考虑上、下游介质都为光学薄情形的冲击波,此时辐射可以从上、下游两个方向自由逸出。还要假定邻近的辐射源均可忽略不计,冲击波是孤立存在的,这种情况下所有的来流能量最终都将以辐射形式从系统中散失。一个重要的结论是:光学薄系统不是能量守恒的,这里部分或者全部来流物质的能量通量以辐射形式离开系统。一个极限情形是,假设与 $\rho_0 u_{\text{s}}^2$ 比较前驱波中的压力可以忽略。此时图 7.20 的横坐标参数$(F_{\text{R}} - F_0)/(\rho_0 u_{\text{s}}^3/2)$在冲击波阵面处为零,但 F_0 是有限的并且代表了朝上游方向散逸的能量。冲击波阵面处的密度跳跃为$(\gamma+1)/(\gamma-1)$,经过冲击波后归一化辐射通量下降到 -1,因为所有的来流能量都

已转变为辐射。紧接冲击波后介质的温度与非辐射情形相等,终态密度在形式上是无限的,只受到本分析以外因素的限制,诸如增长中的磁场、下游等离子体增长中的光学深度或者外部辐射源等。

本节其余部分将在认可辐射带走全部来流能量的条件下,考虑相应于星际的天体物理冲击波的情形。根据上节指出的方法先估算有关的初始条件,得到图 7.25 表示的冲击波的演化曲线。在上述初始状态下,冲击转变使压缩度倒数达$(\gamma-1)/(\gamma+1)$。在这之后,辐射冷却使得压缩度倒数向零的方向下行移动。这里要研究的问题是,辐射冷却过程中形成怎样的等离子体剖面。

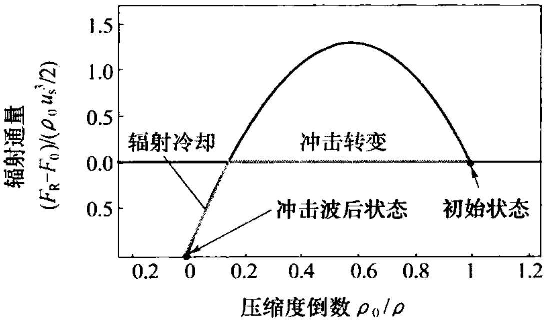


图 7.25　光学薄介质中冲击波的流体动力学性态

灰曲线表示系统从压力忽略不计的初始状态开始的迹线。

利用式(7.83)研究问题,与 B 相比可认为 J_R 忽略不计,因此在输运状况下$\partial F_R/\partial x=-4\pi\kappa B$。进一步简化式(7.83),寻求控制系统行为的重要参数,并采用下标 i 表示紧接冲击波后的状态。这样,我们可以取 $\kappa=\kappa_i(\rho/\rho_i)^m(T/T_i)^{-n}$,从而有

$$\frac{\partial F_R}{\partial x}=-4\pi\kappa_i B_i\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-m}\left(\frac{T}{T_i}\right)^{4-n} \tag{7.109}$$

根据这个定义,式(7.83)自然归一化了,由此得出一个辐射参数 R_r,即

$$R_r=\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{4\pi B_i}{\rho_0 u_s^3}=\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{4\sigma T_i^4}{\rho_0 u_s^3} \tag{7.110}$$

该参数近似为从温度 T_i 的光学厚受冲击层发出的辐射通量与来流能量通量的比值。当 $R_r\geqslant 1$ 时,冲击波后物质层发出的辐射通量超过物质能量通量。因此,当 $R_r\geqslant 1$ 时将形成一个冷却层,其中等离子体温度下降直至达到一个可维持的温度值。在这个极限下可以认为 $T_i\propto u_s^2$,因而 R_r 以 u_s^5 的方式增大。我们还要定义另一个光学深度变量 $\tau=-\kappa_i z$。另外,物态方程式(7.80)意味着

$$\frac{T}{T_i}=\frac{(\gamma+1)^2\rho_0}{(\gamma-1)\rho}\left(1+\frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(2+(\gamma+1)\frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}\right)^{-1} \tag{7.111}$$

式中保持了以后需要用到的与 p_0 成正比的项。采用上述几个定义,式(7.83)可改写为

$$\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma(\gamma-1)}\left[-\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(1+\frac{p_0}{\rho_0 u_s^2}\right)+\frac{\rho_0}{\rho}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)=R_r\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right)^{-m}\left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]^{4-n} \tag{7.112}$$

给定冲击波阵面处的边界条件,以及 R_r、p_0 和描述系统中物质的参数 γ、m、n,就可以积分式(7.112)得出密度剖面。如果前驱波中存在对辐射的吸收,则 p_0 不是冲击波处的压力,在冲击波处($F_R - F_0$)也不再为零。此时 p_0 是某点处介质的压力,此点以外区域中辐射引起的加热可以忽略。冲击波上游方面所受到的压力,可以通过 p_0 及其与压缩度的关系来估算。

下面将会看到对于典型的实验室实验,R_r 的大小在 1 的若干个量级之内,但在星际天体物理环境中 R_r 相当巨大。设 $\gamma = 5/3$,$\kappa_B(1+Z)/Am_p = 1.5\times10^{12}\mathrm{erg/(g\cdot eV)}$ 以及 $\rho_0 = 10^{-22}\mathrm{g/cm^3}$,可以计算出当 $u_s \sim 100\mathrm{km/s}$ 时 $R_r \sim 10^{18}$。图 7.26 是在与 R_r 为 10^{18} 或 10^{19} 相应的参数条件下,计算得到的等离子体密度剖面。可以看出,这个剖面演变所需要的光学深度近似为 $1/R_r$。即使 R_r 变得非常小(约为 10),这个近似规律仍然正确。在天体物理情形,6.2.2 节中提及 $\kappa \sim 10^{-38}\mathrm{cm}$,这些参数下的冷却距离 $1/(\kappa R_r)$ 的量级为 $10^{20}\mathrm{cm}$ 或 100 光年。当冲击波速度增大,产生更多的辐射,冷却距离即可变短。

上面已经指出,这个模型中没有考虑的一些因素阻止了密度的增长,例如,若 κ 随着温度 T 变化的斜率发生改变或磁压变得较重要时,密度的增长就会变慢或停止。星际的天体物理冲击波经常通过辐射而冷却,直至下游受冲击物质的温度与附近环境温度相等为止(包括冲击波前方的和作用区域之外的环境)。人们有时不适当地使用非物理的名称“等温冲击波”称呼这些现象。这个术语有时也用于描述一个非常理想化的极限,即在存在热传导的情形出现密度跳跃的冲击波区域中原本不应有温度的跃变。如果存在输运热量的轻粒子组分(如光子),则不会出现这样的冲击波剖面,除了作为一种极限情形之外。7.4.6 节将讨论的“超临界冲击波”就是这样的例子。

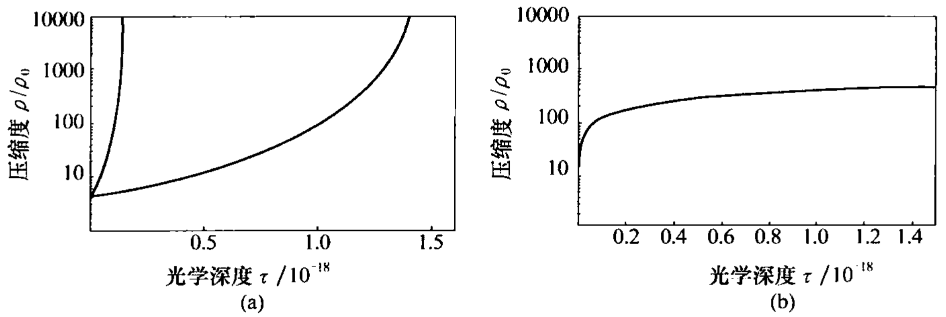


图 7.26　光学薄介质中冲击波的密度剖面

图(a)冷等离子体,$\gamma = 5/3$,$n = 4/3$,$m = 2$,右、左曲线分别为 $R_r = 10^{18}$、10^{19}。该模型中当所有能量都转变为辐射时,介质密度将无限增长。图(b)热等离子体,$\gamma = 5/3$,$n = -1$,$m = 2$,$R_r = 10^{21}$,该剖面定性上对应于温度高于冷却函数最低值(接近 100eV)时的性态。

从图 7.26(a)可以看出,随着光学深度增大,密度的增长越来越快。这种冷却类型有时称为**灾变式冷却**。例如,当老的超新星遗迹充分变冷时就会出现这种现象。发生灾变式冷却需要的条件是 $\partial\kappa/\partial T < 0$。经过一段时间的冷却,介质的密度增加、温度下降,从而使冷却率进一步增大,在以后的时间中发生更强的冷却。但是,图 7.26(a)中看到的性态并非普遍地出现于所有的星际天体物理冲击波中。正如图 6.5 所示那样,在高于数百电子伏特的某个温度处(对应于约 300km/s 的冲击波速度),天体物理冷却函数的斜率发生翻转。

图 7.26(b)表示 $n=-1$,$R_r=10^{21}$时发生的冷却情况,在光学深度很小范围中短距离内发生快速冷却,但是接下来在更长得多的距离中发生渐进冷却。在上述条件下,受冲击层将缓慢冷却,直至 κ 达到最小值并且$\partial\kappa/\partial T<0$ 为止。然后,快速冷却至很低温度的条件得到保障,密度相应地发生快速增大,这可以用“**密度坍缩**”或“**冲击波坍缩**”的术语来描述,因为受冲击层的厚度与其密度增长成反比地减小。

7.4.5 下游光学厚、上游光学薄介质中的辐射冲击波

本节考虑一种在辐射冲击波实验室实验中很普遍的情况,即上游介质是有限展延的,很快就被加热然后变成光学薄的。另一种情形例如气体中的球面构形实验,处于热波阵面(或者电离阵面,见 7.4.9 节)以外区域中的上游介质可能很快就变为光学薄的,在这些阵面处辐射被吸收。但是,已被加热的上游介质的光学深度可能较短,从前驱波区域返回冲击波阵面的辐射通量也比较小,因此在定态计算中将认为前驱波区域是具有某个初始温度的均匀等离子体(根据前面论述的理由,这个温度最终将趋于光学厚下游区域的终态温度 T_f),但是进入前驱波的辐射实质上并没有多少通过密度跃变区而返回下游区域。

在考察定态情形之前如同实验室实验开始阶段那样,我们先定性分析这样的冲击波从初始时光学薄的极限状态开始的演化。在许多有意义情况下有$\partial\kappa/\partial T<0$,因而系统的初始行为将涉及上节论述的密度坍缩。这种现象也可能受到低温下 κ 最大值的限制,但更有可能受到某个温度下(以及经过一定时间后)受冲击层向光学厚转变的限制。这种受冲击层中形成的密度和温度使其成为光学厚的,也可以说它们反映了系统建立定常状态过程中的初始趋势。然而如下所述,冷却层发出的辐射控制了最终的定常状态。这个辐射可以把已受冲击物质加热到高于初始温度值的终态温度,但仅当这个受冲击物质在自洽性需要的温度下成为光学厚时,才可能建立起定常状态。

图 7.27 说明这种类型定常冲击波中的能量平衡,从图中可看到冷却层是怎样控制终态参数的。冷却层下游边界处的净通量必须为零,因此在定态下游层发出的热通量与冷却层发出的通量之前相等,终态温度必定增长。当上述两个通量相等时,在所述系统中上游辐射

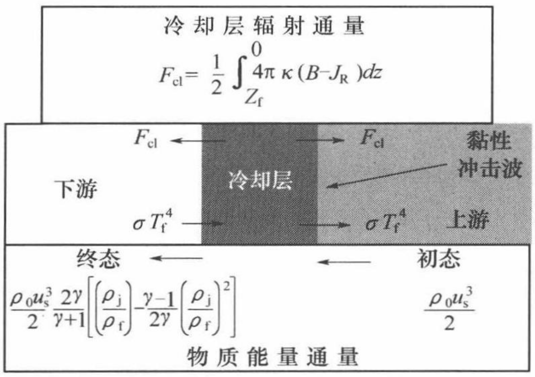


图 7.27 下游光学厚、上游光学薄介质中冲击波的能量通量,$p_0=0$

净通量(等于 $2\sigma T_f^4$)从系统中散失,但是真实情形中也许存在使前驱波区域长度伸展的物理作用。这里介绍的剖面计算自洽性的一种检验方法是,对辐射源的积分以及对物质能量变化的积分两者都应等于 $2\sigma T_f^4$。

习题 7.17

假定冲击波阵面处上游辐射通量为 $2\sigma T_f^4$,辐射强度各向同性,上游介质对辐射的吸收和发射对于 J_R 的贡献可忽略不计,试求上游介质的定态温度。

求解这样的冷却层结构的一种方法叙述如下:

基于前面对光学薄前驱波的讨论,上游温度将十分接近 T_f,这里可设上游温度等于 T_f,从而归一化的上游压力为

$$p_{0n} = \rho_0 R T_f / (\rho_0 u_s^2) = R T_f / u_s^2$$

根据式(7.80)有

$$p_{0n} = R T_f / u_s^2 = \rho_0 / \rho_f$$

知道 p_{0n} 之后,就可估算通量平衡方程式(7.82),找出冷却层边界上的条件。在冲击波转变(阵面)处 $F_R = F_0 = 2\sigma T_f^4$,给定 $p_{0n} = \rho_0/\rho_f$ 就可得到以终态的压缩度倒数表达的初始压缩度倒数。依据式(7.82)有

$$\frac{\rho_0}{\rho_i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\frac{\rho_0}{\rho_f} \tag{7.113}$$

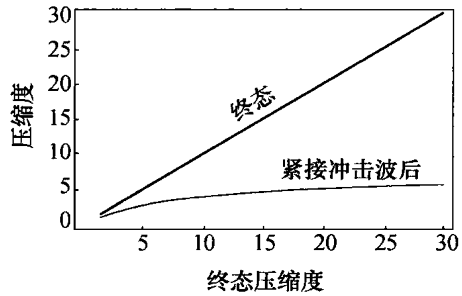


图 7.28 光学薄、厚的上、下游介质中冲击波的压缩度

终态压缩度(灰曲线)和紧接冲击波后的初始压缩度与终态压缩度的函数关系,$\gamma = 4/3$。

图 7.28 是式(7.113)的图示,$\gamma = 4/3$。可以看出,在紧接冲击波后方的初始压缩度变成如非辐射强冲击波压缩极限值 7 那样大之前,终态压缩度需要增长得非常大。由于前驱波的压力 p_0 不为零,最大的初始压缩度还将低于这个强冲击波极限值。

终态之下 $F_R = 0$,使用式(7.82)以及 $\rho_0/\rho = \rho_0/\rho_f = p_{0n}$,得到终态密度下的归一化净辐射通量为

$$\frac{-2F_0}{\rho_0 u_s^3} = -1 + \left(\frac{\rho_0}{\rho_f}\right)^2 \tag{7.114}$$

此式看来似乎与 γ 无关,但通过终态密度 ρ_f 还是有关系的。注意到当终态密度变得很大时,F_0 的极限值等于 $\rho_0 u_s^3/2$(图 7.25)。

我们盯住终态,可以观察到供给辐射通量的能量来自已受冲击的物质,因而净辐射通量必定等于处于紧接冲击波后状态和波后终态之间物质中损失的净能量通量,因此冲击波中辐射通量的性态与图 7.25 所示的相像,该图中这三者的差别并不非常大。曲线的形状连同其最大值,都因为 p_{0n} 值不为零而有所变动,冲击波后压缩度倒数的值不等于非辐射冲击波的情形,归一化的终态辐射通量接近但大于 -1。设通过冲击波的净通量($F_R - F_0$)等于 σT_f^4(图 7.27),就可求解式(7.82)式得到压缩度倒数的终态值。该值终究与前面定义的辐射强度参数 $Q = 2u_s^5\sigma/R^4\rho_0$ 有关,利用 Q 可把压缩度倒数的终态值表示为

$$\frac{\rho_0}{\rho_f}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+8Q}-1}{4Q}} \tag{7.115}$$

上式表明压缩度倒数的终态值与 γ 无关,但细心推敲情况并非如此。若取 $R=10^{12}\text{erg}/(\text{g}\cdot\text{eV})$,$u_s$ 以 km/s 为单位(记为 u_{kms}),ρ_0 以 g/cm^3 为单位,可以算出 $Q=4\times10^{-11}u_{kms}^5/\rho_0$。当冲击波速度足够大、$Q$ 也非常大时,压缩度倒数的终态值趋于零,虽然在这之前系统也许正在进入辐射为主导的状况。这个结果看起来很奇怪,给出速度增大时辐射变得越来越强的认识。但应记得,终态的压缩度倒数变小,相应于入射能量中最终转变为热能的分数降低,因为越来越多的能量被辐射散逸掉了。低速度下从式(7.115)看出压缩度倒数趋于 1,但是冲击波的必要条件为 $u_s^2>c_{so}^2$,这里 c_{so}是上游介质的声速。估算 u_s^2/c_{so}^2得出

$$\frac{u_s^2}{c_{so}^2}=\frac{u_s^2\rho_0}{\gamma p_0}=\frac{u_s^2}{\gamma RT_f}=\frac{\rho_f/\rho_0}{\gamma} \tag{7.116}$$

由此可见,为了冲击波的存在,压缩度的终态值必须大于 γ,或者等价地说压缩度倒数的终态值必定小于 $1/\gamma$。相应地可以证明,冲击波的存在必须要求 $Q>\gamma^2(\gamma^2-1)/2$。参数 Q 首先依赖于 u_s^5/ρ_0,这个量相同于最先对前驱波进行预备性讨论时得到的比值。R 对温度的依赖关系(如果存在)将使问题解中出现新的复杂性。为了研究系统主要的定性行为,下面我们将假定 R(因而 Z)是常数。

习题 7.18

依据式(7.80)~式(7.82),在本节各假定之下推导关于压缩度倒数终态值的式(7.115)。

图 7.29(a)表示三种密度之下压缩度终态值与冲击波速度的函数关系,图 7.29(b)表示同样条件下辐射逸出能量的分数。该图计算中取 $Z=17$,$A=130$,对应于采用高 Z 物质使辐射作用最大化的情形。可以看出,当系统中辐射变得愈加重要时,辐射确实带走了大部分能量。还可以看到,当冲击波速度增大时,压缩度确实能够变得很高,但是这需要把几乎全部的来流能量通量都辐射出去。

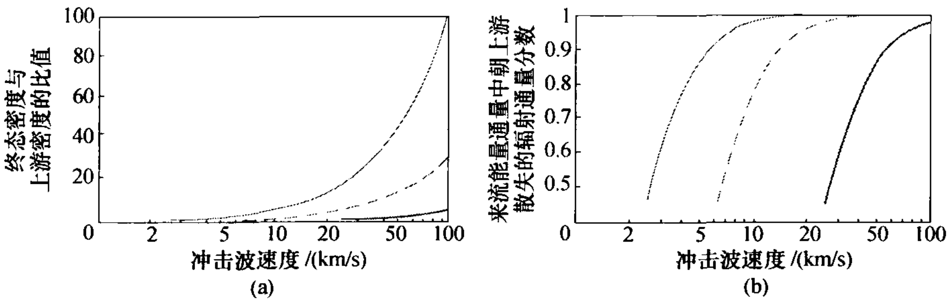


图 7.29 下游光学厚、上游光学薄介质中冲击波的终态状况,$\gamma=4/3$, $Z=17$, $A=130$
曲线分别表示密度为 1g/cm^3(灰曲线)、1mg/cm^3(虚曲线)和 10μg/cm^3(实曲线)的情形。图(a)终态密度对上游密度的比值与冲击波速度的函数关系,图(b)通过辐射朝上游方向散逸的来流能量通量的分数。

现在已为计算剖面做好了准备，为此可以把 R_r 表示为

$$R_r = Q\frac{\gamma+1}{\gamma}\left[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} - \frac{1-6\gamma+\gamma^2}{(\gamma+1)^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_f}\right) - \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_f}\right)^2\right]^4 \tag{7.117}$$

对已表示为式(7.112)的式(7.83)进行积分，起点是冲击波阵面，得到如图 7.30 所示的剖面。该图中的上、下两个剖面分别对应于 $R_r \approx 1200$ 和 $R_r \approx 20$，再次看出，当冲击波速度（从而 R_r）增大时，冷却所需的距离缩短。

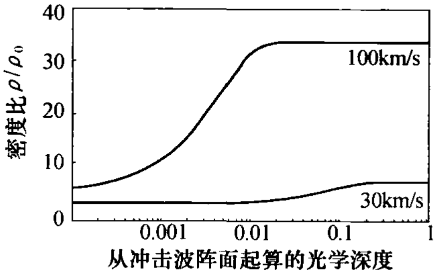


图 7.30 冷却层内的密度剖面，即密度与冲击波前方介质密度之比同从冲击阵面起算的光学深度的函数关系

两条曲线分别对应于冲击波速度为 30km/s（下）和 100km/s（上）的情形，计算采用的参数为 $\rho = 1\,\mathrm{mg/cm^3}$，$\gamma = 4/3$，$n = 4/3$，$m = 0$，$A = 130$ 和 $Z = 17$。

7.4.6 光学厚介质中辐射冲击波的流体动力学

本节转向一种只存在于广延系统中的辐射冲击波类型，其上下游介质都是光学厚的，但是冲击波处于定常状态。此时人们也许倾向于认为该系统处于局域热动力学平衡之中，可以使用扩散模型描述其动力学。但是这种认识严格说来并不正确，因为冲击波自身通过辐射就驱使等离子体离开了平衡态。我们认为在离开冲击波阵面足够远的前驱波区域，也许可以用 7.4.3 节中研究的修正马夏克波模型描述，远离冲击波阵面的下游区域也可能处于局域热动力学平衡状态。这类系统有一些共同点，它们都基于能量通量平衡（图 7.31），并基于流体动力学原理（图 7.32）。

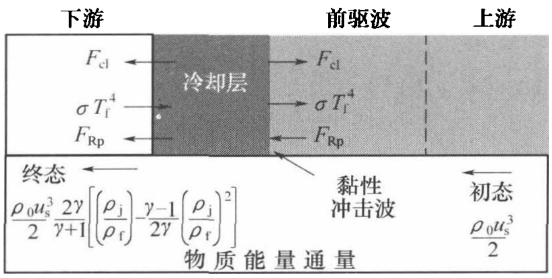


图 7.31 光学厚介质中辐射冲击波的能量通量

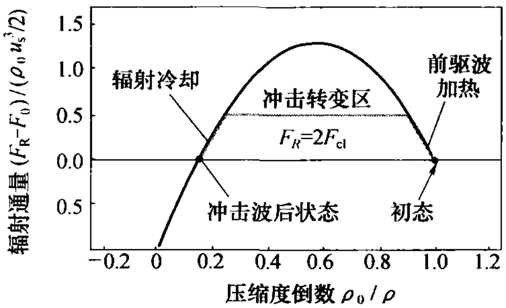


图 7.32 光学厚介质中辐射冲击波的流体动力学

有两个位置处净辐射通量必须为零，它们分别位于前驱波的头部（从冲击波阵面发出的净上游通量在这里已全部转变为热能）和下游区域的边界（在该处建立了新的波后定常状态）。在辐射主导的状况下，辐射能量和辐射压力通过这些边界相向传递，但是没有净辐射通量通过这些边界。如果把冷却层中产生的辐射通量的绝对值记为 F_{cl}，则在该冷却层下游边界处有 $F_{cl} + F_{Rp} = \sigma T_f^4$，这里 F_{Rp} 是来自前驱波等离子体的辐射通量（这个冷却层与上节讨论的情形只有细小的差别，冷却层光学非常薄，来自邻近区域的辐射通量可以完全透射过去）。通过冲击转变层的净辐射通量必须与前驱波中对流能量通量的增长相平衡，对流能量通量的增加量（可以记为 F_p）是负值，则有 $F_{cl} + \sigma T_f^4 - F_{Rp} + F_p = 0$，即

即
$$2F_{\mathrm{cl}} = 2\sigma T_{\mathrm{f}}^4 - F_{\mathrm{Rp}} = -F_{\mathrm{p}} \tag{7.118}$$
此值也等于通过冲击转变层的净辐射通量。

把 F_{Rp}近似取作为 σT_{p}^4，这里 T_{p} 是前驱波中头几个光学深度范围内等离子体的温度。当 T_{p} 趋近 T_{f}，在上、下游方向上 F_{cl}和 F_{p} 两者都变为辐射通量的越来越小的分数，但是不会变成零。事实上，立刻就可找到流体动力学理论给出的 F_{p} 的极限值，其含意是 $T_{\mathrm{p}} < T_{\mathrm{f}}$ 始终成立。这个结论对超临界冲击波的传统定义又提出了一些疑问，表明这种冲击波的存在只是一种极限情形。我们可以想象，趋近扩散极限时冲击波阵面两边温度的分布可能变为连续的，并且 T_{f} 与 T_{p} 的差值将表示温度梯度在跨越若干个辐射平均自由程的距离范围所形成的温差值。然而这不是一个准确的结论，因为冲击波和冷却层总归是一类偏离平衡态的非扩散性结构。

下面应当考虑的问题是 7.4.3 节中论述的流体动力学研究意味着什么。如果需要的话，通量平衡方程可以包括辐射压力和辐射能量项，适用于所有的光学厚辐射冲击波。除了在这里不考虑的横向有限展延平面系统中存在横向损失以外，不会有能量从这种完全平面一维的系统中“损失”掉。因此，这种计算自然地区分为通量主导的和辐射主导的两种情形，下面分别研究这些问题。

7.4.7 光学厚介质中的辐射冲击波，通量主导状况

图 7.32 表示通量主导状况下光学厚介质中辐射冲击波的流体动力学迹线。等离子体在前驱波中受到加热和压缩，在刚才讨论的 $F_{\mathrm{R}} = -F_{\mathrm{p}}$ 条件下经历冲击波转变，然后发生冷却演变为零通量的终态。上游介质的初始压力可以忽略不计时，终态密度为
$$\rho_{\mathrm{f}}/\rho_0 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$$

归一化终态温度由式(7.80)给出，即
$$RT_{\mathrm{f}}/u_{\mathrm{s}}^2 = 2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)^2 \tag{7.119}$$
当 $\gamma = 4/3$，归一化终态温度为 0.12。

流体动力学研究还意味着 F_{p} 是 T_{p} 的函数，是从上游区域到达冲击转变区的净物质能量通量（包括被循环的能量）与来流物质能量通量 $\rho_0 u_{\mathrm{s}}^3/2$ 的差值。如果用式(7.82)计算密度跃变前沿处前驱波中的辐射热通量差值，设 $p_0 = 0$ 并采用式(7.80)（该式起源于连续性方程、动量方程和物态方程），得出
$$F_{\mathrm{p}} = -\frac{\rho_0 u_{\mathrm{s}}^3}{4(\gamma - 1)}\left[1 - \gamma + 2(\gamma + 1)\frac{RT_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{s}}^2} + (\gamma - 1)\sqrt{1 - 4\frac{RT_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{s}}^2}}\right] \tag{7.120}$$
根据上式，$T_{\mathrm{p}} \to 0$ 时 F_{p} 当然趋于零，但是当 $T_{\mathrm{p}} \to T_{\mathrm{f}}$ 时 F_{p} 也趋于零。后者不可能是真正的物理解，因为对于任何不为零的 T_{p} 总存在被循环的能量。

由式(7.120)给定 F_{p}、式(7.119)给定 T_{f}，并且有 $F_{\mathrm{Rp}} = \sigma T_{\mathrm{p}}^4$，就可以把式(7.118)表示为关于 T_{p} 的隐式代数方程式，即
$$\left(\frac{RT_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{s}}^2}\right)^4 + \frac{1}{2Q}\frac{RT_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{s}}^2}\frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{4Q}\left(\sqrt{1 - 4\frac{RT_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{s}}^2}} - 1\right) - 16\frac{(\gamma - 1)^4}{(\gamma + 1)^8} = 0 \tag{7.121}$$

上式中再次出现辐射强度参数 $Q=2u_s^5\sigma/(R^4\rho_0)$。从式(7.121)看到,其左部最后一项是 (RT_p/u_s^2) 的 4 次方。可以预期,仅当 $Q\to\infty$ 的极限下可以使 T_p 趋于 T_f。

为了理解这种系统中发生的现象,我们考察图 7.33。图 7.33(a)画出了式(7.121)关于 RT_p/u_s^2 的解,图 7.33(b)画出了式(7.120)关于 $2F_p/(\rho_0u_s^3)$ 的解,后者是作为入射于冲击波能量通量一部分的再循环通量。这图 7.33(a)、(b)都是 $\gamma=4/3$。可以看出,当 Q 增大到 1000 以上时,T_p 成为 T_f 的很大分数。还可看出,此时再循环的能量通量接近于入射能量通量的 70%。当入射冲击波速度(从而参数 Q)进一步增大,循环的净通量仍然是入射通量的一个固定分数,同时朝冲击波两边方向传播的辐射通量 σT_p^4 和 σT_f^4 极其快速地增长。上述净循环通量即是通过冲击波的净辐射通量,等于从冷却层发出的辐射通量的 2 倍。

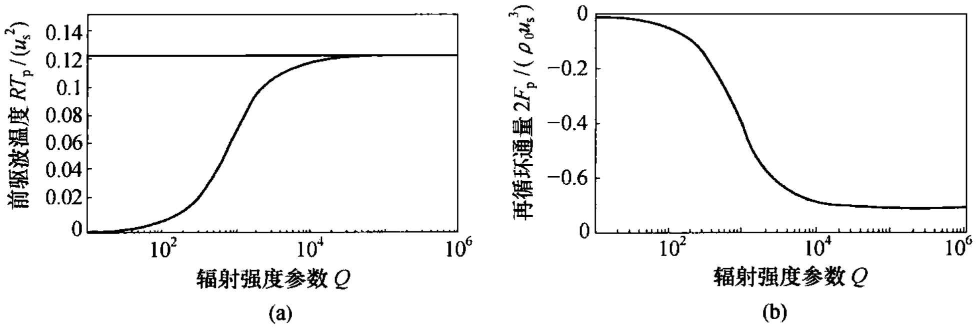


图 7.33　光学厚介质中辐射冲击波前驱波的性质($\gamma=4/3$)

图(a) 归一化温度;图(b) 再循环通量。

上述状况下冲击波结构的计算非常类似于 7.4.4 节和 7.4.5 节的情形。在终态至冲击波阵面的范围内对能量通量积分,得出压缩度倒数,从而得到辐射通量和温度与冷却层下游边界起算的光学深度的函数关系。当上游辐射通量达到$(\sigma T_f^4-F_p/2)$时(记住 $F_p<0$),积分范围也就到达了冲击波阵面。冷却层的形状类似于上节中见到的那样。

对于前驱波的分析,原则上必须利用从冲击波阵面起始的上游范围内的积分,或者利用前驱波初态起始的下游范围内的积分。已知在冲击波阵面处来自终态和冷却层的朝上游方向传播的辐射通量,以及来自前驱波的朝下游方向传播的辐射通量和物质能量通量。作为一种近似处理,可以把这个解与 7.4.3 节中给出的扩散前驱波剖面相匹配。尚不十分清楚这种做法是否符合真实情况,因为在冲击波前沿处的通量明显是不平衡的。为了得到更好的解,还应考虑到真实的辐射通量以及介质密度和其他参数的真实变化。我们的讨论不得不终止于此,而把这些细节问题的梳理留给感兴趣的读者作为练习思考。

7.4.8　光学厚介质中的辐射冲击波,辐射主导状况

对于本节主要探讨的光学厚系统中的辐射冲击波,读者也许期望采用类似于刚才描述的通量主导状况的方法,估算光学厚辐射冲击波在辐射主导状况下的结构。然而这在数学上将更为复杂,因为辐射压力与 T 的 4 次方有关。建议读者从专门技术文献中了解上述冲击波的结构问题,包括冲击转变区的结构问题。应当指出,正如 7.4.7 中已证明的那样,对于冲击转变区附近的内部结构仅仅采用扩散近似方法处理,在定性上就是错误的。下面只

考虑辐射通量为零时冲击波初态和终态之间的关系。

这种情形中,连续性方程不发生变化。对于定态平面冲击波而言,动量方程式(7.1)和能量方程式(7.2)成为

$$\rho u^2 + p + p_R = \rho_0 u_0^2 + p_0 + p_{R0} \tag{7.122}$$

$$u\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon + E_R + p + p_R\right) = u_0\left(\frac{\rho_0 u_0^2}{2} + \rho_0\varepsilon_0 + E_{R0} + p_0 + p_{R0}\right) \tag{7.123}$$

这里按照通常习惯采用冲击波参考系。如以前做过的那样,从上面诸式中推导出一些有用的关系式。由于 $u_0 = -u_s, u = -u_s(\rho_0/\rho)$,得出

$$\frac{p + p_R}{\rho_0 u_s^2} = 1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \frac{p + p_{R0}}{\rho_0 u_s^2} \tag{7.124}$$

以及

$$\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right] - \left[\frac{(\gamma p/(\gamma - 1)) + 4p_R}{\rho_0 u_s^2}\right]\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) + \left[\frac{(\gamma p_0/(\gamma - 1)) + 4p_{R0}}{\rho_0 u_s^2}\right] = 0 \tag{7.125}$$

上面两式中包含三个未知量 ρ、p 和 p_R,此时辐射完全据主导地位,因此物质压力 p 可以忽略,从而容易解出 ρ 和 p_R。如果 p 和 p_R 两者都是温度 T 的已知函数,从上面两式也可求解 T 和 ρ。此外若介质是电离的,$\gamma = 4/3$,则可求解总压力($p + p_R$)和 ρ。下面考虑第三种情况,前两种情况留给读者作为练习。

如果 $\gamma = 4/3$,把式(7.124)代入式(7.125),记总压力为 p_t,得到

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(1 - 7\frac{\rho_0}{\rho} + 8\left(\frac{p_{t0}}{\rho_0 u_s^2}\right)\right) = 0 \tag{7.126}$$

式中 p_{t0} 为上游初始状态的总压力。

上式关于压缩度倒数(ρ_0/ρ)的两个解,给出了跨越冲击转变区发生的密度总变化。这两个解是 1(即 ρ 等于上游密度 ρ_0),以及 $(1/7)[1 + 8p_{t0}/(\rho_0 u_s^2)]$。因而如果不计上游初始压力($p_{t0} = 0$),介质密度将增大 7 倍。当以动压 $\rho_0 u_s^2$ 作归一化的上游压力逐渐增大,冲击波后的密度增长越来越低。当上游初始压力达到动压的 6/8 时,冲击跃变消失。把压缩度倒数代入式(7.124),解出终态总压力 $p_t = (6\rho_0 u_s^2 - p_{t0})/7$,上游初始压力忽略不计时最大值为动压的 6/7。

习题 7.19

考虑真实的辐射主导状况,p 可以从式(7.124)和式(7.125)中略去。求解此时冲击波后的 p_R 和 ρ,找出波后温度 T 与冲击波速度 u_s 的函数关系,并同非辐射冲击波的类似关系进行比较。

习题 7.20

把 p 和 p_R 表示为合理的温度 T 函数,再求解式(7.124)和式(7.125)给出冲击波后的 T

和 ρ。求解可以采用数值方法，应注意合理选择参数，计算若干种情形。至少提交关于上述方程组数值解的一张曲线图，作为对问题分析的组成部分。

7.4.9　冲击波中电子与离子的耦合

上面我们曾经忽视辐射冲击波密度跃变区后方的均衡区。冲击转变中对于电子的加热较为轻微（参见式(7.77)中关于电子的部分），对离子的加热是主要的，然后在一个称为均衡区的区域中离子通过库仑碰撞加热电子。这里有一个存在争论的离子运动减慢问题，碰撞理论中把它们描述为此时的“试探”粒子。与离子相互作用并使其减速的“场”粒子就是电子。电子加热系数 $\nu_{ie}=3.2\times10^{-9}n_iZ^3\ln\Lambda/(AT_e^{3/2})$，这里 T_e 以 eV 为单位，n_i 以 cm^{-3} 为单位。离子温度随时间的变化由下式描述，即

$$\frac{\partial T_{ion}}{\partial t}=-\nu_{ie}(T_{ion}-T_e) \tag{7.127}$$

电子加热也可以对应于离子电离度的升高。通常，在电子被加热过程中，电子加热系数和电子－离子的温度差两者都会下降，但奇怪的是若 $Z\propto\sqrt{T_e}$（在部分电离的等离子体中，这近似是正确的），则当电子温度上升时电子加热系数保持不变，从而导致更快速的均衡。电子与离子之间的能量交换，包括电离和对新电子的加热，并不改变冲击波后的总压力。相比之下辐射可以影响压力，还可以通过密度影响均衡的速率。因此，把辐射（发射）速率与电子加热进行比较很有意义。

首先比较加热或冷却率，然后更细致地考虑均衡区的结构。能量发射的速率（以每单位体积的功率为单位）在高密度下为 $2\kappa\sigma T_e^4$，在低密度下为 $n_en_i\Lambda$（参见第 6 章）。每单位体积每单位相对温差（$(T_{ion}/T_e)-1$）的能量输运速率为 $\rho c_V\nu_{ie}$。图 7.34 表示实验室和天体物理环境中（碰撞加热）$\rho c_V\nu_{ie}$ 与辐射冷却率的比值。在电子温度尚未接近电子伏特量级的范围内，除了密度较低($0.01g/cm^3$)以及 κ 采用与密度无关的标度关系情形（实际中不会使用）之外，电子加热都明显地占据优势。我们得出结论，在能使离子温度达到多个电子伏特的冲击波情形以及可能在温度稍低的某些环境下，电子的辐射冷却将变得较为重要。

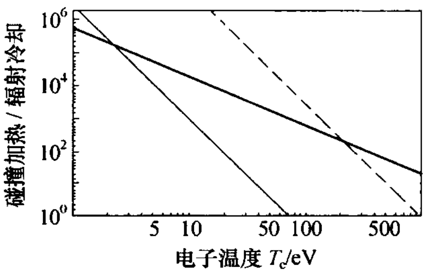


图 7.34　所考察情形中电子加热功率与辐射发射功率的比值依赖于电子温度 T_e 的函数关系

实验室情形中对铝采用式(6.45)给出的与密度无关的 κ 形式，密度 $\rho=0.01g/cm^3$（黑实曲线），$\rho=1g/cm^3$（虚曲线）。天体物理情形中（灰曲线），上述比值只与 T_e 有关，$\Lambda=10^{-22}erg/cm^3$。

但是图 7.34 过分突出了辐射发射的重要性，因为正是吸收与发射的辐射量的净差值起着加热或冷却电子的作用。冲击波情形中终态发出的辐射首先压过电子的辐射发射，对电子的加热做出贡献。然后当电子温度升高到终态等离子体温度以上时，辐射将只起到纯粹的冷却作用，恰好与离子对电子加热的情况相反。但是许多情形中这些差值并不重要，因为辐射对均衡区的作用可以忽略不计。如果设辐射不起作用，就可以考虑仅由电子加热形成的均衡区结构。

使式(7.127)被冲击波后粒子速度 $u = u_s(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ 相除,成为冲击波参考系中关于空间自变量的微分方程式。这是一个对应于电子的方程,其中把 T_e 和 T_i(即 T_{ion})的地位交换,右部为负值。使用非辐射冲击波形式的式(7.77)表示 $Z = 0$ 的离子温度,即 T_i 的典型初始值,并且假定紧接冲击波后 $T_e \approx 0$,这样就给定了用以积分此方程的均衡区起点条件。图7.35表示这样得到的 T_e 和 T_i 的空间剖面,冲击波速度为100km/s。可以看到,即使在很低密度的低 Z 气体中(图7.35(a),Be),在几微米距离之内电子-离子就可实现均衡。对于密度稍高一些的氙气,均衡在几分之一微米距离即内实现。

细致看来,冲击转变不是瞬间发生的,而是经过几个离子-离子平均自由程的距离才能实现。电子加热和辐射发射两者与冲击转变同时发生,所以可能出现上述三个过程同时都重要的状况。然而,通常认为冲击转变瞬时发生,均衡区总是很短,辐射在较大空间尺度下才比较重要等看法也是适当的。数值模拟中在冲击波后温度达到10eV量级的情况下,电子加热可在冲击转变区的空间尺度内实现。冲击波后离子温度达到数百电子伏特的情形中,电子加热实现的距离尺度变大,但仍然是很小的。

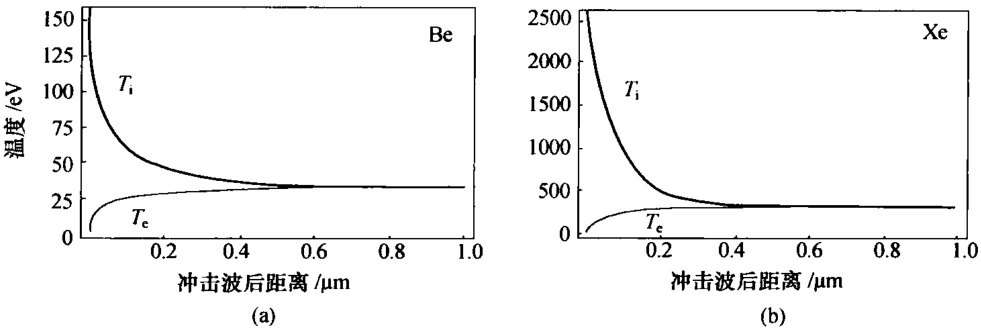


图7.35 冲击波后电子-离子的均衡(冲击波速度为100km/s,至阵面的距离以下游方向为正)图(a)铍,$\rho = 10^{-5}$g/cm^3;图(b)氙,$\rho = 0.01$g/cm^3(已假设 $Z \propto \sqrt{T_e}$)。

7.5 电离阵面

上面两节的部分内容与辐射源有关。7.3节讨论了辐射向介质中的扩散透入,马夏克波的特殊情形即是处于介质边缘的恒温源发出的辐射在介质中的扩散传播。7.4节讨论了辐射冲击波,这是非常强的冲击波,以至于足以成为对于波前区域的辐射源,对该区域的动力学行为起到实质性的作用。辐射透入介质时可能发生的第三类现象是**电离阵面**,即辐射发出的能量使得所穿越介质发生电离(或进一步电离)的局部区域。与扩散的辐射波相反,这种阵面引起的电离一定不会导致在能量上有意义的辐射发射。

按照电离阵面的上述定义,听起来这种情形似乎有些特别,但实际上是较为普遍的现象。许多物质一旦发生电离其不透明度急剧降低,这两者又使得该物质的发射率下降,对于入射辐射的透过率上升。这些看法对于电离的氢原子尤为正确,因为一旦发生电离,氢就不再经历束缚-自由跃迁。较重原子电离时,其不透明度也有显著变化。当光子能量接近电离能量,不透明度减小;当光子能量高于下一个电离状态所需值时,不透明度变大。由此可知,与

能使某个具体物质状态发生电离的光子能谱相应的辐射，其光子也许容易透过电离后的物质，但是不能够使该物质进一步电离。正是这种变化中的不透明度，使得电离阵面成为可能。

在实验室和天体物理中都可以找到电离阵面的例子。使用一个热源或封闭的热体积（即第 8 章所述的黑腔）辐照气体或低密度泡沫材料时，在实验室中就可以产生电离阵面。明亮的星体发射以紫外谱段为主的光线辐照大部分为 H_2 的分子云，电离阵面即出现于天体物理的环境中。图 7.36 所示的马头星云是一种可能通过流体动力学不稳定性机制在分子云中发展起来的为电离阵面所穿越的结构。

电离阵面的速度与形成该阵面的光子通量有关。设引发电离的光子通量为 F_γ，其单位为每单位面积、单位时间的光子数，取决于光子源的性质（包括其几何形状）。再假设待电离的原子或离子初始的数密度 $n_0=\rho/(Am_p)$，尚未电离粒子的当地密度是 n_i。根据简单的动理学关系，电离阵面的速度是光子通量被原子数密度相除的值，即 $v_f=F_0/n_0$，这里 F_0 是初始的光子通量。直接写出电离阵面的演化方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dF_\gamma}{dx}=-F_\gamma n_i\sigma_0\\[2ex]\dfrac{dn_i}{dt}=-F_\gamma n_i\sigma_0\end{cases}\tag{7.128}$$

记 $f=F_\gamma/F_0$，$z=x/\lambda$，$\eta=n_i/n_0$ 以及 $y=v_f t/\lambda$，这里 $\lambda=1/(n_0\sigma_0)$ 是尚未电离介质中的平均自由程，利用这些记号即可把上面两个方程写成无量纲形式。把式(7.128)的第一式积分，代入第二式得到

$$\frac{d\eta}{dy}=-\eta e^{-\int_0^z\eta(z')dz'}\tag{7.129}$$

图 7.37 表示数值积分式(7.129)得到的中性粒子分数剖面，时间为 $50\lambda/v_f$。该图的全尺寸为 100λ，可以看出此时电离阵面已移动了约 50λ 的距离，其平均速度符合预期值。还可看到该电离阵面的宽度（10% ~90% 电离度）小于 5 个平均自由程。

图 7.36　处于强紫外辐射环境中的马头星云
引自 N. A. Sharp 的工作（美国国家光学天文台/美国大学天文研究联合会/美国国家科学基金）。

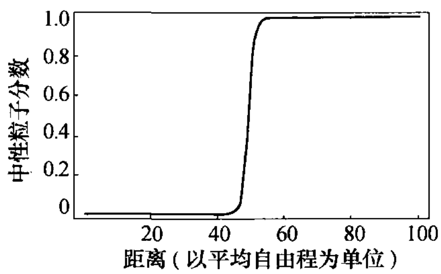


图 7.37　电离阵面的结构
即电离阵面附近中性粒子数密度 n_i/n_0 与距离（以粒子平均自由程为单位）的函数关系，时间为 $50\lambda/v_f$。

由于电离阵面的速度已由光子通量所确定，相对于上游介质声速而言此阵面可以是亚声速或者超声速的，而且随着辐射源的时间演化还可以从一种状况转变为另一种状况。超

声速阵面进入的是未受扰动的上游介质，相比之下亚声速阵面有可能产生非常复杂的行为，例如，可以驱动一个冲击波使得受冲击物质的不透明度降低。

亚声速电离阵面造成的加热和冲击波，在惯性约束聚变研究中具有特别重要的意义。由于电离产生的电子能量不为零，电离过程可以加热被电离的介质。如果已电离物质中还发生一些对辐射的吸收（而不是以前假设的零吸收），则加热过程更加得到增强。无论在哪种情况下，已电离介质中的压力可以大到足以驱动一个冲击波进入上游介质的程度。这样形成的冲击波也许能，也许不能显著地改变受冲击物质的不透明度，但有可能与电离阵面重合起来成为超声速的，然而在惯性约束聚变情形中冲击波后物质中的电离阵面是亚声速的，因此上述冲击波跑在电离阵面的前面。在以软 X 射线驱动低 Z 燃料小丸的聚变实验中，波系的序列从外到里依次是：小丸表面处的稀疏波，以已加热靶丸材料的声速向受冲击物质中运动的电离阵面，以及一个穿透靶丸传播的更快的冲击波。这种波系结构将在 8.2.3 节中进一步讨论。

本章关于辐射流体力学现象的论述到此结束。我们已经见到辐射流体力学现象常常出现于天体物理中，也容易在实验室中产生。本书后面还将介绍对于创造高能量密度状况、尤其是对于惯性约束聚变至关重要的一些辐射流体力学作用和过程。

第8章　创建物质的高能量密度状况

大自然经常形成高能量密度的环境，其根本起因始终在于重力。例如，地球芯部的压力为360GPa，几乎全部是由重力引起的。木星的情形也差不多，其芯部的压力约为4TPa。恒星中的引力使得星体物质集合在一起，导致由核聚变引起的加热，产生更高得多的压力，例如，太阳芯部的压力大约为2×10^4TPa。一旦聚变造成了可导致超新星爆炸的条件，还会出现更高的压力。例如，一些超新星产生中子星的情形，典型中子星表面处的磁场接近1TG = 10^8Tesla，这样磁场产生的的磁压约为4×10^9TPa。

对大自然形成的某些环境进行实验室模拟，必须处于高能量密度的状况。例如，当我们考察快到足以使物质电离甚至引起辐射作用的冲击波情形。粒子数密度为$1/\mathrm{cm}^3$量级的星际介质中速度为1000km/s的冲击波，其动压力大约为几nPa。当介质密度增大到韧致辐射损失变得重要时，这个压力趋于数百μPa。相比之下，能够很好模拟上述天体物理冲击波的实验室系统，应在密度约$1\mathrm{g/cm}^3$的物质中产生速度量级约为10km/s的冲击波，其动压力为100GPa的量级。

本章研究如何创造物质的高能量密度状况的问题，这本来是立刻就能着手进行的事情，但实际上为了理解如何去做这件工作，还需要用到前面早已引入的许多概念。下面将论述的一些21世纪初的技术，可以使一些先进概念成为可能。还要讨论一些概念性的物理、数学模型，它们也是为理解高能密度状况的产生过程所必需的。这些论题可自然划分为激光直接辐照、激光驱动黑腔、Z箍缩和相关系统、超快激光和高能量密度能束等五个方面。本章包括前面三个论题，第11章将讨论后面两个论题。

8.1　激光束直接辐照

所有激光器从最早期装置到输出兆焦能量的系统，都具有一些共同的部件，包括激光介质的配备，这种介质对光波提供能量，从而使自己趋于能量较低的状态。这个过程往往涉及特殊原子的激发(如钕原子)，使得处于原子跃迁较高能态的电子多于较低能态的电子。所有激光器都有在一定光学系统中引发(种子)光波的手段，有的通过热的辐射发射，有的使用外激励源。随后由于激光介质提供的能量，光波被相干地放大。这样得到的光束具有很好的准直性，但这种性质部分地与激射系统的几何构形有关，本书不再细致地讨论激光器的这些性质，有许多专业书籍专门论述这些问题。我们将转向讨论与高能量密度物理特别有关的激光器性质——本节讨论高能量激光器，第11章讨论高功率激光器。

在讨论与高能量密度物理有关的激光器特性之前，先介绍一些通用的相关单位。本章使用的通用单位并不基于一种单位制，有些混合。激光脉冲能量的单位一般为焦耳(J)及

其相关单位——千焦(kJ)或兆焦(MJ)。激光脉冲的时间单位相应地为纳秒(ns),激光脉冲的功率单位为瓦(W)以及吉瓦(GW)、太瓦(TW)以至拍瓦(PW)。但是对于真实激光器的距离或长度,实际使用的单位是厘米(cm)而不是米(m),因此单位面积上的功率——功率密度的单位一般为 W/cm^2。严格主张 SI 制的人一定十分厌恶这种做法。更要紧的事情也许是,高能量密度学术界习惯于把这种功率密度看作激光强度,例如很多技术文献写道:"实验中激光强度为 $10^{14}W/cm^2$"等。这种表述使得要求概念表达严谨的人担心害怕(包括本书作者),因为光束强度的普遍意义本应该是"每单位立体角内的功率"(见第 6 章)。需要更正把"单位面积上的功率"称为"强度"的习惯,更适当的术语是"辐照度"(irradiance),本书约定使用这个术语。

8.1.1 激光技术

现在讨论与产生高能量密度状况的激光器有关的具体问题。为了应对实现惯性约束聚变中遇到的挑战,过去几十年中人们建造了许多高能激光器,长期目标是实现微型核聚变爆炸,达到 100 倍能量增益。这样激光系统的始端是一个光学质量非常高、初始能量很低的种子激光束,该光束一直向下传播,抽取掺钕激光玻璃中的能量而得到放大。这里不讨论基于气体介质的高能激光器,诸如 CO_2 或 KrF 激光器,现在已经没有仍在运行的高能 CO_2 激光器,KrF 激光器则代表高能量密度物理研究中钕玻璃激光器的一种重要替补。玻璃激光器遇到的挑战首先是,防止当单位面积上激光束能量很高时玻璃缺陷以及衍射效应导致对激光器光学部件的破坏;其次是,需要把玻璃激光介质中很大比例的储存能量抽取到激光束之中。

20 世纪 70 年代人们遇到了第一个挑战性问题,那时解决这个问题的关键发明是接续传像技术和空间滤波器。采用接续传像技术的激光系统,首先在一个特殊位置(物面)上形成一个高质量的低能量激光束,然后由该系统中设计的光路,把该物面再成像到或接近于激射光以最高辐照度穿透光学材料的平面位置处,这里通常放置透镜把激光束注入进空间滤波器。空间滤波器对于减少激光束的高阶模式起着关键作用。由于光束中高阶模部分聚焦后的光斑远大于均匀光束的光斑,把一个针孔板置于输入透镜的焦点处,即可截取激光束光斑上的大部分能量(即入射光束的低阶模部分)。空间滤波器的输出透镜,使通过针孔后的

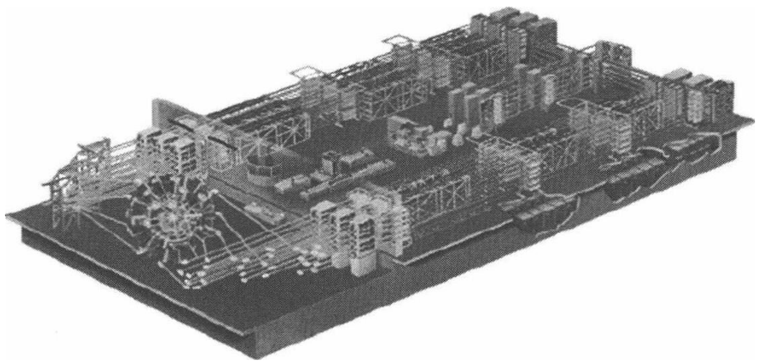


图 8.1　Omega 激光系统的线条图

引自"激光力能学实验室"。

激光束重新准直成为空间分布更光滑、更均匀的光束。应用这些技术发明,那个年代的若干高能激光器已能把 1kJ 以上的激光能量投射到靶件上。

图 8.1 是这样的激光器系统的一个例子,即能够把 30kJ 激光能量投射到靶件上的Omega激光系统(参见 T. R. Boehly 等人的论文,Rev. Sci. Instru1995,66(1):508 - 510)。这台激光器占据约一个美式足球场的面积,电容器组放在建筑的底层,激光放大器中闪光灯放电之前几分钟进行充电储存能量,然后以闪光形式向激光钕玻璃泵入能量,供激光束抽运放大。初始激光束的形成和放大部分位于两列多路激光器端部的中间部位,然后被分束、逐步放大,最终馈入置于场地两边通向输出端的 60 个放大器级联。可使激光频率提高 3 倍的频率转换晶体,把激光波长从 1.05μm 降低到 0.35μm,最后由反射镜把 3 倍频激光束直接投射到靶室中心。

上面所述的第二个挑战性问题,在于如何更有效地抽运和使用激光介质储存的能量。这是 21 世纪初建造的大型激光器所遇到的问题。为了让激光束抽取更多的储存能量,必须让激光束在掺钕玻璃介质中来回通过数次,并且不降低光束的光学质量或可聚焦性质。为了实现这个目的,必须使用空间滤波器使来回光通道之间的光束净化,以及(或者)使用自适应光学子系统对经过放大器光路后产生的光束相位差进行补偿(自适应光学子系统通过一个光学表面的连续变形或者离散为许多小片段的变形,对各点处的光程进行局部调节,补偿光束波前的位相差)。

8.1.2　激光束聚焦

初看起来,实验中用一个简单透镜就足以把高能量光束聚焦到高辐照度的光斑上,就像用一个简单的放大镜把太阳光聚焦并着火一样。遗憾的是,通常激光束聚焦形成的光斑很不规则,尤其当聚焦光斑的尺寸大于透镜最佳聚焦所能得到的最小光斑时。这会产生多种有害的后果,有些以后会接触到。惯性约束聚焦要求用非常光滑的激光束辐照靶丸,然而小型激光器往往采用**高斯光束**得到高质量的激光光斑。高斯光束的辐照度剖面近似为高斯分布,也就是正比于函数 $\exp(-r^2/a^2)$ 的分布,这里 r 为半径,a 为一个长度量纲的常数。这样的光束可以通过光学系统进行接续传像,以维持高质量的光束。但是,这种类型的激光器相对而言是低效率的,因为光束截面上大部分区域是低强度的,并未从激光玻璃中抽取很多储存的能量。高能量激光束应当尽可能多地抽取激光介质中储存的能量,因此应当具有更加平坦得多的辐照度剖面。十分遗憾,人们在彻底研究之后认识到:任何实际光学系统都不可能形成具有平坦辐照度剖面的光束。这样光束的波前相位相当均匀,足以聚焦形成不需要再进行额外变换处理的光滑光斑。这个问题导致了很多种所谓光束匀滑技术的发明,下面讨论其中的一些。

这些技术一般都依靠激光光学器件的衍射性态。大家知道当光波通过一个圆孔时,圆孔对光线的衍射作用会产生爱里斑(Airy Pattern)的图案(图 8.2)。如果这个光束是聚焦的,则像面上爱里斑光强第一个零点对应的直径为

$$d = 2.44\lambda f \tag{8.1}$$

式中 λ 为光的波长;f 数为聚焦系统焦距与孔径的比值。

爱里斑第一环内的光斑,大约包含了入射光束能量的 88%。例如,使用直径 30cm、焦距 3m 的透镜,$f = 10$,波长 0.35μm 的平行光束聚焦后爱里斑第一环内的光斑直径 $d =$

8.5μm，也可称为该激光器系统在衍射极限下的光斑尺寸。典型的只使用聚焦透镜的高能量激光器系统，可以形成的最佳聚焦光斑直径一般大于10倍衍射极限光斑尺寸。这种最佳聚焦光斑尺寸及其光强分布（“结构”），是由于光线通过透镜孔径时位相的逐渐变化以及不同部位各个子光束的相互干涉而形成。

现在已经不太使用的最简单的光束匀滑系统是随机位相板（Random Phase Plate，RPP），激光束通过该器件中几百或几千个相互邻接的厚度随机变化的微光学元件，被分划为许多细小的子光束。这些微光学元件通常是六角形状的，其尺寸可使得每个微元件对应的衍射极限光斑具有所预期的激光焦斑大小。例如，为了在3m距离外得到波长0.35μm光束的直径为1mm的光斑，由式（8.1）可知，微光学元件的孔径应为2.6mm。这就决定了激光光斑的总尺寸。实际实验经常关心的是包含激光束一半能量的光斑大小，或者辐射度恰为峰值辐照度1/2的光斑半径。这些参数都略低于式（8.1）给出的值。对于真实系统，这些参数必须用数值计算或者实验测量确定。另外，通过不同微元件的各个子光束相互干涉，往往在辐照图式中形成一些细小的局部最大光强点，称为散斑。最小的散斑直径是由激光光束相对的两边沿发出的子光束相互干涉而形成，利用整个激光束的孔径确定f数，再由式（8.1）计算可得到这个值。实际上，这些散斑是很狭长的结构，其长度为

$$L_s = 7\lambda_0 f^2 \tag{8.2}$$

因此，散斑形状的长宽比大约为$3f$。

实际中，人们使用分布位相板（Distributed Phase Plate，DPP）的器件，大量替代了随机位相板。这种器件中每个光学微元的位相设计成可控制的，以便确定所得到的激光光斑的形状和结构。特别是这种器件能够形成具有平坦的总辐照度剖面的激光束，并且使得激光光斑边沿部位的能量较少。图8.3表示由分布位相板产生的典型辐照度图，可以看到由许多散斑调制而成的匀滑的总剖面。经常用来与分布位相板组合使用的一类光学元件是分布式极化旋转器（Distributed Polarization Rotator，DPR），这种元件使用双折射微光学元件，按照设定的控制量旋转每个子光束的极化方向。由于仅当两个子光束具有平行的极化方向时，它们之间才会相互干涉，因而分布式极化旋转器提供了激光光斑形状设计中更多的控制因素，在原理上还可用来剪裁各激光子光束与靶相互作用中的极化方向。

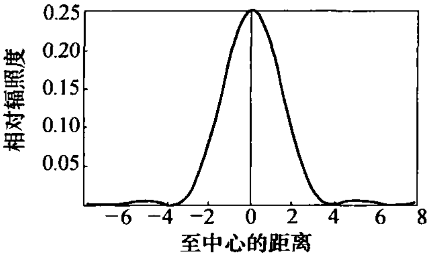


图8.2　爱里斑图案

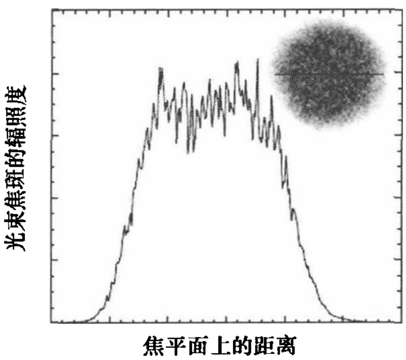


图8.3　经过分布式位相板后激光束辐照度的图式，表示右上角光斑中狭缝线所截取的辐照度剖面

（此图引自“激光力能学实验室”）

等离子体导热比较容易，趋向于使光斑上许多小尺度尖刺造成的效果匀滑化。如图 8.3 所示光束剖面的匀滑化与第 5 章中论述的冲击波趋于平缓的倾向相联合，意味着一些实验中使用随机位相板或者分布式位相板，就足以得到高质量的实验结果。但是对于惯性约束聚变来说，至少对于激光束直接辐照靶丸的情形来说，这样的匀滑技术还是不够的。每个散斑的位置是固定的，形成具有很高空间频率的持久作用。对于这个问题的一种改进方法是使散斑在周围移动，从而使得总的激光束横截面上时间平均的辐射度剖面变得十分匀滑。做到这点有以下两种途径：

第一种途径是诱导空间非相干性（Induced Spatial Incoherence，ISI），仍然把激光束分划为许多子光束，但是把各子光束之间的光程差设计得超过激光的相干距离。这种途径只是在相对而言较宽带的激光器情形才是可行的，其结果是各子光束之间的相位差随时间而变化，导致在与激光相干时间相当的时间尺度内散斑在周围移动。诱导空间非相干性已在钕玻璃激光器上得到证实，但更加适合于在 KrF 激光器上安装使用，这个方法可以集成于此类激光器的设计技术之中。

第二种途径是谱色散匀滑技术（Smoothing by Spectral Dispersion，SSD），对于大型玻璃激光器更为现实可行。这种方法产生宽带激光脉冲，利用衍射光栅把光束在角度范围散开，然后再进行准直，形成一个频率随散射方向变化的激光束。使用两个光栅（或者更复杂的光学器件）把光束朝两个方向散开，产生二维的谱色散匀滑效果。当通过分布式位相板把这样的光束聚焦时，其各子光束之间的位相差随时间而变化，因为各子光束具有不同的光频率，它们各自的位相以不同速率变化，从而引起在各子光束光频差程度所确定的时间尺度内，散斑在周围移动。

8.1.3　电磁波的传播与吸收

我们对如何使用已匀滑化的高能量激光束辐射靶件有了一些概念，本节将考察当这样的激光束真正打到靶件上时将出现什么现象。有意义的辐照度一般处于 $10^{12}\,\mathrm{W/cm^2} \sim 10^{16}\,\mathrm{W/cm^2}$ 范围，在这样的激光辐照下靶表面立即形成等离子体。在上述范围内较高的辐照度下，激光的光电场高到足以使得原子直接电离。但是在此范围的较低辐照度下，靶表面发生的过程更为复杂，然而无论如何靶表面等离子体总会很快地形成。图 8.4 说明了当激光束穿透等离子体时出现的三个基本过程：当光束通过等离子体中密度梯度区域传播时其光线发生折射；当光束抵达密度相当高区域的界面时光线发生反射；再者沿着光束传播的整个途径中都发生光能量的吸收现象。下面通过对等离子体中光束基本行为的考察，分析上述三种基本过程。

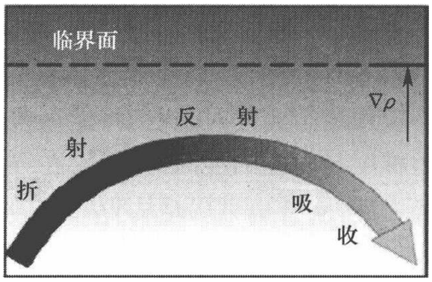


图 8.4　光波进入等离子体时出现的一些简单过程

为了理解激光束穿过等离子体时的行为，从安培定律式（2.18）出发，在 cgs 单位制下并使用库仑规范的标准矢量势 $\boldsymbol{A}$ 和标量势 $\boldsymbol{\Phi}$，给出

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\boldsymbol{J}}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} \tag{8.3}$$

上式有两个部分,实际上可以完全分离。任何矢量都可以分解为一个散度为零的横向(或旋转)分量,和一个旋度为零的纵向(或可压缩、不旋转)分量。根据定义,$\boldsymbol{A}$ 是纯粹的横向矢量。由于任何梯度矢量的旋度一定为零,$\nabla\Phi$ 是纯粹的纵向矢量。对式(8.3)两边做散度运算,得出关于等离子体中电荷的连续性方程,其中电荷密度(通过泊松方程正比于$\nabla^2\Phi$)随时间的变化为电荷通量(即电流)的散度所平衡。

习题 8.1

从麦克斯韦方程组推导式(8.3)。

习题 8.2

从式(8.3)推导电荷守恒方程式。

从式(8.3)中减去上述连续性方程,再展开所得式子的左部,得到如下关于光波传播的基本方程:

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\boldsymbol{A} = 4\pi c\boldsymbol{J}_t \tag{8.4}$$

式中 $\boldsymbol{J}_t$ 为 $\boldsymbol{J}$ 的横向分量。如果需要可以从 $\boldsymbol{J}$ 中得出 $\boldsymbol{J}_t$,杰克逊书中有这样的讨论。

光波在任何具体等离子体环境中的行为取决于矢量 $\boldsymbol{J}_t$,并且由于涉及的激光频率非常高,以至于在激光传播的时间尺度内离子运动可以忽略不计。在更长的时间尺度上,离子运动可能具有重要的影响,有些情况将在 8.1.4 节中讨论。电子携带的净电流为 $-en_e\boldsymbol{u}_e$,下面寻求该电流矢量的横向分量。

为了找到这个横向电流分量,考虑关于电子流体的连续性方程和动量方程,即式(2.61)和式(2.62)。下面再次写出关键性的电子动量方程:

$$m_e n_e\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t} + m_e n_e\boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e = -n_e e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}\right) - \nabla p_e - \sum_j m_e n_e(\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_j)\nu_{ej} \tag{8.5}$$

式中求和号的序数 j 仅为离子的编号。

应用这个方程时,我们将做一些观察和简化。首先,任何离子的速度将忽略不计;其次,压力梯度是内在的纯纵向矢量,在寻求横向速度时自然可以不加考虑;再次使用标量势和矢量势之后,同样也可以略去$\nabla\Phi$;最后,把该方程式中各项遍除以 $m_e n_e$。做了这些预备工作之后,得出关于电子横向速度分量的方程为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t} + \boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e = \frac{-e}{m_e c}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{u}_e\times\nabla\times\boldsymbol{A}\right) - \boldsymbol{u}_e\nu_{ei} \tag{8.6}$$

根据标准的矢量恒等式 $\boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e = -\boldsymbol{u}_e\times\nabla\times\boldsymbol{u}_e + \nabla u_e^2/2$,但这里的梯度项也是纯纵向矢量,可以略去。应当注意,考虑激光与等离子体中纵波的耦合时此项将发挥作用。通过代入和重新排列得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{ei}\right)\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_e\times\nabla\times\boldsymbol{u}_e = \frac{\partial\boldsymbol{v}_{os}}{\partial t} - \boldsymbol{u}_e\times\nabla\times\boldsymbol{v}_{os} \tag{8.7}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{os}=e\boldsymbol{A}/cm_e$，可认定为电子在光波电场中的振荡速度。

从式(8.7)看出，当离子不存在任何碰撞能量损失时，原本可以准确地有 $\boldsymbol{u}_e=\boldsymbol{v}_{os}$。系数 ν_{ei}的出现，引入了电磁波的空间衰减以及 $\boldsymbol{u}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_{os}$之间的位相变化。存在两种典型的简化情况：一是 $\boldsymbol{A}$ 变化的空间尺度比光波长大得多；二是 $\boldsymbol{u}_e$ 比光速低得多。对于脉冲宽度为1ns 量级的典型高能量激光器，第二种情况是真实的；但对于第11章中讨论的相当强的高功率激光器并非如此，处理这种相对论状况必须使用修正的方程组。以 c^2 遍除式(8.7)，并注意到含有旋度的项远小于其他项，因为 $|\partial/\partial(ct)|\sim\omega/c\sim k\sim\nabla|$，这就使得线性化以及忽略含旋度项的做法颇为合理。这样，假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{u}_e$ 都以 $e^{-i\omega_0 t}$的方式随时间变化，得

$$\boldsymbol{u}_e=\frac{\boldsymbol{v}_{os}}{1+i\nu_{ei}/\omega_0}\tag{8.8}$$

上式中的虚部项将产生前面提及的相移，但只要 $\nu_{ei}\ll\omega_0$，相移总是很小的。还应注意，$\boldsymbol{u}_e$ 是纯粹横向矢量，因为电磁波中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都是纯横向的。

把 $\boldsymbol{v}_{os}$和 ν_{ei}以实用单位表示，对于实际应用很有帮助。$\boldsymbol{v}_{os}$的方向即是激光电场的方向，一般可描述为激光光波极化的方向。$\boldsymbol{v}_{os}$的幅度可以如下方式与激光束在真空中的辐照度 I_L 相关联。由于电磁场能量密度为 $E^2/8\pi$，并且能流以真空中光波的群速度 c 传播，因此有

$$I_L=cE^2/8\pi$$

与 $\boldsymbol{v}_{os}$的关系即为

$$I_L=\omega_0^2A^2/8\pi c=\boldsymbol{v}_{os}^2\omega_0^2m_e^2c/(8\pi e^2)$$

由此可得

$$v_{os}/c=\sqrt{I_{14}\lambda_{\mu m}^2}/117\tag{8.9}$$

式中 I_{14}表示以 $10^{14}\mathrm{W/cm^2}$ 为单位的辐照度 I_L；$\lambda_{\mu m}$表示以 μm 为单位的光波长 λ。

在第2章中已经讨论过 ν_{ei}，在实用单位制中可写为

$$\nu_{ei}=3\times10^{-6}\ln\Lambda\frac{n_eZ}{T_e^{3/2}}\tag{8.10}$$

式中 n_e 的单位为 $\mathrm{cm^{-3}}$；T_e 的单位为 eV；$\ln\Lambda=\max(1,(24-\ln(\sqrt{n_e}/T_e)))$。

可取式(8.4)中

$$\boldsymbol{J}_t=-en_e\boldsymbol{v}_{os}/(1+i\nu_{ei}/\omega_o)$$

如果 n_e 为常数，则上式完全准确，但若记 n_e 发生的变化为 n_{e1}，则 $\boldsymbol{J}_t$ 中正比于 $n_{e1}\boldsymbol{v}_{os}$的部分可以具有横向和纵向分量，这将取决于 n_e 空间分布的梯度方向。这个细节对于波耦合计算十分重要，但是这里予以忽略。把 $\boldsymbol{J}_t$ 代入式(8.4)，再做简化和重新排列，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\omega_{pe}^2}{(1+i\nu_{ei}/\omega_0)}-c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A}=0\tag{8.11}$$

式中 ω_{pe}为第2章中定义的等离子体频率。

上式即是关于等离子体中衰减(受阻尼的)电磁波的波动方程。

我们考察和讨论式(8.11)所揭示的色散关系,即

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1+(\nu_{ei}/\omega_0)^2} - c^2k^2 + \mathrm{i}\frac{\nu_{ei}\omega_0}{1+(\nu_{ei}/\omega_0)^2}\omega_{pe}^2 = 0 \tag{8.12}$$

式中 k 为光波的波数;虚部项引入了波位相的虚分量,可以表示为 ω_0 或 k 的虚部,其作用是引起波传播中的阻尼(衰减)。

下面考察阻尼项。式(8.12)的实部项描述波的传播,光波传播通过定常的不变介质时,所经历的是 k 的变化而不是 ω_0 的变化。当 k 变化到零,波不能再传播下去,必须发生反射以及(或者)被吸收。当 $\omega_0=\omega_{pe}$时,式(8.12)意味着 k 值近似为零。从物理上看,$\omega_0=\omega_{pe}$时电子以光波频率发生共振振荡,形成像镜子那样称为**临界面**的反射面,该处的电子密度称为**临界密度** n_c。依据 $\omega_0=\omega_{pe}$就可以证明

$$n_c = 1.1\times10^{21}/\lambda_{\mu m}^2 \tag{8.13}$$

对于可见光和紫外谱段的激光,$n_c<10^{23}\mathrm{cm}^{-3}$。再看图8.5,从中可得到关于等离子体中光吸收的一些启示。对于可见光和紫外光,等离子体电子的临界密度通常很小,以至于有 $\nu_{ei}<\omega_{pe}$。这样的激光束可以穿过等离子体传播或发生反射,在这些过程中或许会被明显吸收。相比之下,对应于 X 射线谱段的临界密度一般高于等离子体中可能出现的任何电子密度,因此 X 射线能够在不被吸收的情况下自由地贯穿靶等离子体。但是在接近或高于固体密度的情形,ν_{ei}变得非常大,对 X 射线的吸收将很强烈,导致光子能量大约在 1keV 以下的软 X 射线由于碰撞而被十分强烈地吸收。较硬的 X 射线通常不会由于碰撞而被强烈吸收,但是正如第 6 章中讨论的那样,对这种 X 射线的原子吸收可能较为显著。

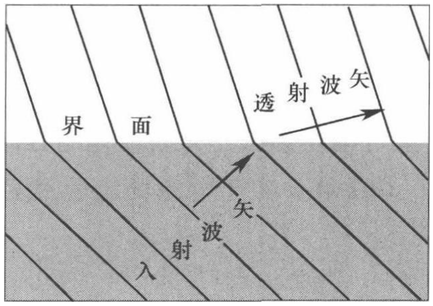


图 8.5 界面处光线的折射,实线表示相阵面

现在关注激光的吸收,假设$(\nu_{ei}/\omega_0)^2$ 小到可以忽略不计,着重考虑对激光的空间吸收率。假设 ω_0 为实数,取 $k=k_r+\mathrm{i}\kappa_{EM}/2$,其实数和虚部分别为 k_r 和 $\kappa_{EM}/2$,κ_{EM}是激光能量的空间吸收率,而激光能量正比于 E^2,因此 $\kappa_{EM}/2$ 也就是 E(或 A)的空间变化率。依据关于光在传播过程中被慢慢吸收的假设(也即 $\kappa_{EM}\ll k$),可以略去含有 κ_{EM}^2的项,然后从式(8.12)中求解 k_r 和 κ_{EM},得出

$$k_r = (\omega_0/c)\sqrt{1-n_e/n_c} \tag{8.14}$$

$$\kappa_{EM} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}\frac{\nu_{ei}}{c\sqrt{1-n_e/n_c}} = \frac{\nu_{ei}}{v_g}\frac{n_e}{n_c} \tag{8.15}$$

式中 v_g 为光波在等离子体中传播的群速度。

容易理解式(8.15),它说明只是光波能量中参与电子振荡的那个部分 n_e/n_c,可能受到电子—离子碰撞的影响,发生这种影响的空间率等于碰撞的时间率被能量在空间传播速率(也就是群速度)相除的商数。还应注意到,以前关于 $\nu_{ei}\ll\omega_0$ 的假设保证了 $\kappa_{EM}\ll k$。

习题 8.3

使用电子流体在常密度等离子体内电磁波场中的运动方程，确定能量在电场、磁场和电子动能之间按时间平均的分配比例。讨论该比例怎样随密度而变化。

上面的讨论意味着入射激光束穿过长度为 D 的均匀等离子体后的分数为 $\exp(-\kappa_{\mathrm{EM}} D)$。Kruer 证明了怎样在更复杂场合下确定激光的吸收率，这里将摘引他的两个重要结果。设临界密度下电子与离子的碰撞率为 ν_{ei}^{*}，z 为空间位置变量，L 为特征长度。当激光束正入射于具有线性密度剖面 $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{c}} z/L$ 的等离子体，其吸收率为

$$f_{\mathrm{A}} = 1 - \exp\frac{-8\nu_{\mathrm{ei}}^{*} L}{3c} \tag{8.16}$$

如果激光束斜入射于具有指数密度剖面 $n_{\mathrm{e}} = n_0 \mathrm{e}^{-z/L}$ 的等离子体，光线与等离子体表面法线的夹角为 θ，则激光吸收率为

$$f_{\mathrm{A}} = 1 - \exp\left(\frac{-8\nu_{\mathrm{ei}}^{*} L}{3c}\cos^3\theta\right) \tag{8.17}$$

激光束穿过等离子体时发生的第三种重要过程是**折射**，即光线在传播中发生弯折。光线和折射是几何光学极限下成立的概念，也就是介质中发生变化的空间尺度比光波长大得多的情形。高能量密度系统中当光束以偏离表面法线某个角度入射并穿过一个等离子体，该等离子体是在 100ps 或更长时间内从一个初始表面烧蚀膨胀而形成的，这种情况下折射是一个有意义的概念。相比之下，如果光束穿过临界密度区域或者等离子体空间范围只有几个光波长的大小，这时必须把光作为波来看待。Kruer 讨论了激光在临界面上反射的问题，这里有些激光能量通过**共振吸收**机制而被介质吸收。

继续讨论折射问题，等离子体中各处 k_{r} 的变化由式(8.14)给出。参见朗道与栗弗席兹的专著第 2 卷，波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的变化由光线传播方程组给定为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = -\nabla\omega \tag{8.18}$$

此式是力学中动量变化率与哈密顿量梯度之间关系式的几何光学类比。识别波矢量平行和垂直于密度梯度的两个分量 $k_{/\!/}$ 和 $k_{\perp}$ 是有意义的，其中垂直于密度梯度方向的分量不发生变化，只要回想起图 8.5 所示陡变界面处的折射性态，就容易直观地看出此点。光波的相速度 ω/k 在界面上发生变化，意味着各个相阵面之间的距离一定发生了变化，但是相阵面之间沿着界面的距离是由入射波所确定的，从而表明相速度（以及波矢量 $\boldsymbol{k}$）垂直于界面的分量就是发生变化的分量。可以把光束在密度梯度区域中的传播看作沿着一系列密度台阶小区域传播的极限情形，当这种台阶的个数越来越多时，台阶的差距也变得越来越小。

由于边界条件是通过等离子体边界时光波电场必须连续地变化，已知 $k_{\perp} = \omega_0 \sin\theta/c$，这里 θ 是入射角，即入射光线与界面法线之间的夹角，这就意味着

$$k_{/\!/} = (\omega_0/c)\sqrt{\cos^2\theta - n_{\mathrm{e}}/n_{\mathrm{c}}} \tag{8.19}$$

此式有一个显然的推论：斜入射光波在平面等离子体边界上发生全反射的条件是相对电子密度 $n_{\mathrm{e}}/n_{\mathrm{c}} = \cos^2\theta$。例如，入射角 θ 为 45°时，在电子密度约为 $n_{\mathrm{c}}/2$ 处激光发生全反射；入射

角为60°时,此密度降为 $n_c/4$。

8.1.4 激光散射和激光-等离子体不稳定性

如果激光束在等离子体中除了传播、折射和吸收之外不再其他行为,则激光在高能量密度物理中大部分的应用将比较简单和容易,即使是下面讨论的由小起伏(涨落)引起的激光散射,也不会妨碍这些应用。遗憾的是这个观点不完全正确,激光产生的欠稠密等离子体中可以容纳各式各样的波,这些波能够与光波发生不稳定的耦合。这些不稳定的波可以变得很大,发生较大作用,散射大量激光,形成高能电子或离子明显的集居,甚至引起激光吸收动力学机制的改变。从这些过程的动力学研究来看,激光-等离子体相互作用(Laser - Plasma Interactions, LPI)是一个非常令人振奋的领域,而且具有天体物理方面的若干应用,例如与某些类型太阳暴动力学和星风内部湍流动力学有关的应用。一个这样的应用——双伴星等离子体对脉冲星辐射的散射,有时可能在高能量密度状况下出现。然而,激光-等离子体相互作用研究不是本书的主要论题,目的只是传授给读者明智地研究高能量密度物理时,所需要的激光-等离子体相互作用方面的知识。对这个领域的细节感兴趣的读者,可以参看Kruer 撰写的关于激光-等离子体相互作用的专著。

现在讨论等离子体中密度涨落引起的激光散射现象的动力学机制。只考虑均匀等离子体,这是一种过度的简化,因为事实上大多数散射和不稳定性均发生于非均匀等离子体中。忽略非均匀性的原因是,非均匀性增加了问题的复杂性,但并未引入许多新思想。碰撞有时是重要的,但基于上面同样的原因也将其忽略。这样可取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_L+\boldsymbol{A}_S$ 以及 $n_e=n_{e0}+\delta n_p$,下标L、S和p分别表示激光光波、散射光波和等离子体中的波。应当指出,激光光波首先与电子相互作用,因为离子的运动慢得多,载运的电流则低得多。但是,电子密度的涨落 δn_p 可以由等离子体中任何波而引起。这里一方面可由电子-等离子体波而引起,该波中离子密度相当于固定不变;另一方面 δn_p 还可以由声波而引起,在声波中离子密度发生涨落,电子受到离子电荷变化的作用,被强迫与离子一起运动。还假定通过恰当的归一化可以表明,与仅含 $\boldsymbol{A}_S$ 或 δn_p 的项相比较,仅含 $\boldsymbol{A}_L$ 的那些项比较大。把 $\boldsymbol{A}$ 的分解式代入式(8.11)并做线性化,由于仅含 $\boldsymbol{A}_L$ 的项彼此相消,得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{pe}^2-c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A}_s=-\omega_{pe}^2\frac{\delta n_p}{n_{e0}}\boldsymbol{A}_L \tag{8.20}$$

参考式(8.4),可对上式作简单的解释。激光光波与电子密度涨落的相互作用,产生了一个与式(8.20)右部成比例的额外的横向电流分量。从另一方面看,式(8.20)基本上是一个描述拍波的方程。激光光波与电子密度涨落相互作用形成拍波,一起驱动散射光波。根据普通物理的知识,所产生的拍波含有两个驱动波频率及波数的和与差。人们也许感到疑惑,散射光波的能量是从哪里来的?这些能量通过一个使 $\boldsymbol{A}_L$ 的幅度慢慢下降的二阶项来自激光光波。

习题 8.4

推导式(8.20)。

人们通常使用一种称为**汤姆逊散射**技术的散射测量方法,表征等离子体中电子密度的

涨落，从而看到所产生的两个散射光波。图 8.6 是这类实验结果的一个例子，这是一张时间选通成像的光谱图，表明①测量限于短暂的选通时间内；②测量仪器提供了穿过对象物的一条水平狭缝像；③通过狭缝的光信号在垂直方向是谱分辨的。这样，图的纵向切线提供了切线横坐标位置处选通时刻的发光光谱图。由于多普勒效应，任何位置处等离子体的运动均使该处整个谱线频移，从而提供了一种测量等离子体（水平方向）速度分布的方法。从图 8.6 可以看出，平均频移量随距离而上升，意味着等离子体流动速度随距离而增大。由于这张图像源自激光辐照表面所形成等离子体的膨胀运动，反映等温稀疏波的力学行为，因而很有意义。稀疏过程是等温的这个事实，由图中谱线下面两个尖峰的间距保持不变所确认，因为这个间距正比于引起电子密度热涨落的声波的频率，因而这个间距测量了主要取决于电子温度的等离子体声速。图中光信号从左至右逐渐减弱，原因在于稀疏波中等离子体密度的下降。离子球的研究使用了类似的汤姆逊散射技术，其目的也是诊断等离子体的密度和温度。激光 - 等离子体和离子球这两种应用都处于汤姆逊散射的集体状况条件下，此时式（8.20）可以适用。相比之下，汤姆逊散射在磁约束聚变等离子体中的应用则处于单粒子状况条件下，此时散射等效于发生在各个单独的粒子上。这些粒子不同的多普勒频移，形成了可用以推断等离子体温度的散射光谱。Sheffield 提出了汤姆逊散射的基本理论。

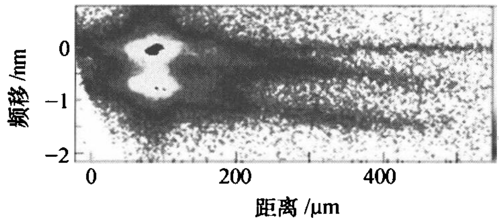


图 8.6　集体状况下汤姆逊散射的光谱图像

垂直方向是波长变化，显示了由于两个声波相向传播形成的两个尖峰。频移接近零处的谱线表示探针激光的波长。当光信号强度增大时，图像中的颜色从白至黑循环了两次。该图引自 D. S. Montgomery 等的论文（Laser and Particle Beams，17，349，1999）。

现在转向散射光波之一参与某种不稳定性、从而产生更强得多散射波的情形。明确考虑受激拉曼散射（Stimulated Raman Scattering，SRS），这种过程包含了刚才讨论的被散射光波以及第 2 章中论述的电子 - 等离子体波。为了得到初步的理解，最好考虑受激光脉冲辐照的均匀等离子体中发生的受激拉曼散射和其他不稳定性，而且该驱动激光脉冲不会因不稳定性的作用被耗尽。在这个最简单的不稳定性形式中只有频率差的参与，这里有关的方程中只选择讨论中涉及的那些项。

在进行我们选定分析之前，应先说明所用的记号。任何推导中所有的复数量必须通过某个约定的算式与一些实数量相关联，例如，记实部 $\mathbb{R}(A_L) = (A_L + A_L^*)/2$，这里记号“$*$”表示共轭复数。约定波的幅度是实数（这是一个保持了物理实质的近似），使用记号“^”表示波的幅度，例如，$\boldsymbol{A}_s = \hat{\boldsymbol{A}}_s e^{i(\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{x} - \omega_s t)}$。当研究没有非线性项的理论时，通常可以把散射光的时空依赖关系以 $e^{i(\boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{x} - \omega_s t)}$ 的方式表示。当需要准确地研究具有非线性项的方程时，我们只能把散射光写为

$$A_s = (\hat{A}_s e^{i(k_s \cdot x - \omega_s t)} + \hat{A}_s^* e^{-i(k_s \cdot x - \omega_s t)})/2$$

非线性项中两个实数物理量的相互作用,包含了对于考虑拍波极为重要的交叉项。

下面将使用所选择的那些项,进行大致的分析。首先考虑拍频项,其中光波的位相以 $e^{i(k_s \cdot x - \omega_s t)}$ 的方式变化,等离子体波的位相则以 $e^{-i(k_p \cdot x - \omega_p t)}$ 的方式变化。然后从式(8.20)中得出

$$(-\omega_s^2 + \omega_{pe}^2 + c^2 k_s^2)\hat{A}_s = \frac{-\omega_{pe}^2}{2} \frac{\delta \hat{n}_p}{n_{e0}} \hat{A}_L \exp[i((k_L - k_s - k_p) \cdot x - (\omega_L - \omega_s - \omega_p)t)] \tag{8.21}$$

上式中的指数项就是位相匹配项。为了得到非零的平均响应,该项的宗数必须为零,这就给出了冀求的拍频条件 —— 被驱动波的频率和波矢量必须等于激光光波与电子-等离子体波相应量的差值。

为了考察散射光波的不稳定性,需要在本章前面讨论的启示下,再次考虑当存在光波时从式(2.50)式(2.55)中推导电子-等离子体波的过程。寻找光波能够影响等离子体波的各种途径。电子-等离子体波是纯粹的纵波,可以写成

$$u_e = v_{os} + v_p$$

式中 v_{os} 为纯粹的横向矢量,但可以包含多个光波贡献之和;v_p 为纯粹的纵向矢量,描述了等离子体波中电子流体的运动。

把这个分解式代入式(8.5),再次使用标量势和矢量势可以得出一个方程,从此式中减去式(8.6)。对 $|v_p|$ 做线性化并略去碰撞项,得到

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \nabla \Phi + \frac{\nabla p_e}{n_e m_e} = -\nabla \frac{v_{os}^2}{2} \tag{8.22}$$

上式中已略去正比于 $v_p \times \nabla \times v_{os}$ 的项,因为该矢量的方向垂直于 v_p。

习题 8.5

推导式(8.22)。计算激光光波的能量密度,并说明此量如何与式(8.22)右部的源项关联。

如同第2章那样,通过对式(8.22)两边取散度,然后应用连续性方程和物态方程简化该式左部所有的项,就可得到一个波动方程。此式右部表示有质动力的力矢量,也就是 v_{os}^2 的梯度,等价于电磁波能量密度(或压力)的梯度。在其他场合有质动力也许较为重要,但这里关注的只是它对于不稳定性的作用。如果出现的诸光波具有两个矢量势 A_L 和 A_S,则 v_{os}^2 由三项组成,但只是其中的交叉项含有两个波的拍频。只保留交叉项得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - 3\frac{k_B T_e}{m_e}\nabla^2\right)\frac{\delta n_p}{n_{e0}} = \frac{e^2}{m_e^2 c^2}\nabla^2(A_L \cdot A_s) \tag{8.23}$$

此式描述了由等离子体中诸光波的拍频驱动电子-等离子体波的过程。拍波产生了这样的源项,其频率是激光频率的上移或下移,而且只有频率下移的源项对于简单的不稳定性才有意义。为了看到不稳定性的耦合,我们考虑拍频项,其中激光光波、散射光波和等离子体波

的位相分别以 $e^{-i(\boldsymbol{k}_L\cdot\boldsymbol{x}-\omega_L t)}$、$e^{i(\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{x}-\omega_s t)}$ 和 $e^{-i(\boldsymbol{k}_p\cdot\boldsymbol{x}-\omega_p t)}$ 的方式变化。再次使用记号“^”表示每个波的幅度(假设为实数),可以得出

$$\left(-\omega_p^2+\omega_{pe}^2+3\frac{k_B T_e}{m_e}k_p^2\right)\frac{\delta\hat{n}_p}{n_{e0}}=\frac{-e^2k_p^2}{2m_e^2c^2}(\hat{\boldsymbol{A}}_L\cdot\hat{\boldsymbol{A}}_s)$$
$$\times\exp i((-\boldsymbol{k}_L+\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_p)\cdot\boldsymbol{x}-(-\omega_L+\omega_s+\omega_p)t)\tag{8.24}$$

从上式可以看出,其位相匹配项与式(8.21)中的相同。如果以 $\hat{\boldsymbol{A}}_L$ 遍乘式(8.21),并把从式(8.24)得到的 $\delta\hat{n}_p$ 代入,得到

$$(-\omega_s^2+\omega_{pe}^2+c^2k_s^2)\left(-\omega_p^2+\omega_{pe}^2-3\frac{k_BT_e}{m_e}k_p^2\right)=\omega_{pe}^2\frac{k_p^2v_{os}^2}{4}\tag{8.25}$$

这个耦合的色散关系描述了激光－等离子体不稳定性的增长。从物理上看,激光光波受到密度涨落的作用形成拍频波,驱动散射光;又受到该散射光的作用产生拍频波,反过来驱动密度的涨落。当满足位相匹配条件 $\boldsymbol{k}_L=\boldsymbol{k}_S+\boldsymbol{k}_p,\omega_L=\omega_S+\omega_p$ 时,上述过程得到共振强化。注意到式(8.25)左部的两个括号,每一个都含有关于等离子体振荡一种正则模式的色散关系。当不存在驱动或耦合时,对于任何给定的波数,每一个括号内的表达式独立地确定相应模式的频率。当存在联系模式频率和波矢量的位相匹配时,式(8.25)右部表示的耦合就导致不稳定性的增长。

式(8.25)意味着激光－等离子体不稳定性具有指数增长率。对于这里所考察的均匀等离子体情形,有意义的是寻求这种不稳定性的时间增长率。从数学上看,幅度不大时两个被驱动的波以 $e^{\gamma t}$ 方式增长。用下标 r 标识每一个频率的实部,这些频率的虚部则记作 γ_0,这样就可以找到 γ,其正、负号应与是否随时间增长相对应。对于选来考虑的那些分量,有关系式 $\omega_s=\omega_{sr}-i\gamma_0$ 和 $\omega_p=\omega_{pr}+i\gamma_0$。这里还要假设每一个频率的实部是正则模式的频率,由此消去方程中相应部分的实数项。如果 γ_0 远小于波的频率,受激拉曼散射(有时还有其他不稳定性)几乎总是这样,则可得出均匀等离子体中受激拉曼散射的增长率为

$$\gamma_0=\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{sr}\omega_{pr}}}\frac{k_pv_{os}}{4}\tag{8.26}$$

其他更复杂的情况下,受激拉曼散射的增长率可以有效地用包括上式增长率的方法来表达。原理上受激拉曼散射可以出现在电子密度低于 $n_c/4$ 的情形,此时 ω_{pr} 和 ω_{sr} 两者都近似等于 $\omega_0/3$。当密度接近 $n_c/10$,受激拉曼散射更加可能出现,这里 $\omega_{pr}\sim\omega_0/3,\omega_s\sim2\omega_0/3$,$k_p\sim1.5\omega_0/c$。当 $I_{14}\lambda_{\mu m}^2\sim1$,增长率 $\gamma_0\sim0.002\omega_0$。因此,从波循环的尺度来衡量,受激拉曼散射确实增长较慢,但应看到 $1/\omega_0\approx1$fs,因而 $1/\gamma_0<1$ps。所以从典型激光脉冲宽度的纳秒时间尺度来看,这种不稳定性一旦出现,其增长极其迅速。

我们上面进行的推导省略了许多严格的步骤,目的是最简捷地显示其物理意义。严格地说,应当把所有波的幅度表示为实数量,然后对所有出现的波的拍频项进行同样操作,这是得到式(8.21)和式(8.24)中突然出现的因子 2 的唯一途径。我们不应当假设在未受扰等离子体中处于正则模式的光波和电子－等离子体波,在上述不稳定性作用下不发生变化。若想要恰当地进行这些工作,还需要增加若干页的篇幅,而且到头来得到的只是与上面所述

结果有细微差别的结果。人们还可以考虑其他的复杂性,如非均匀性等离子体和激光脉冲耗尽等问题,在 Kruer 书中可找到初步的改进分析。做得再好一些的工作,则需要深入到陈档文献中去寻找。

比探讨受激拉曼散射理论细节更为重要的事,是深入理解一旦通过任何不稳定性把能量给予电子-等离子体波,为什么这些能量立刻趋向于转移到高能电子中去? 大多数情形中,高能电子是有害之物,它很容易贯穿靶物质(尤其是低 Z 物质)并使得这些物质预热,从而改变了靶物质演化过程的初始状态。高能电子引起的预热对于惯性约束聚变是很严重的问题,在第 9 章中还将讨论。另外,由于激光辐照会产生围绕靶件的大尺度磁场,通过这种磁场的作用高能电子能够十分容易地绕过几乎任何屏障,穿透并加热离开激光光斑较远处的物质表面。这种现象会对实验的物理设计和诊断设备测到的信号产生影响。

朗道阻尼产生高能电子。在电子-等离子体波的碰撞阻尼中,朗道阻尼通常占有主导地位。如果碰撞比较强,散射光或声波将不能被驱动;如果碰撞比较弱,被驱动波则是朗道阻尼的。朗道阻尼是依靠加速波中的电子而起作用的,因此所产生的高能电子具有量级相当于波的相速度的能量。在上述典型的受激拉曼散射状况下,这种能量为

$$\frac{1}{2}m_e v^2 \sim \frac{1}{2}m_e\left(\frac{\omega_{pr}}{k_p}\right)^2 \sim \frac{m_e c^2}{40} \sim 13\text{keV} \tag{8.27}$$

当电子密度趋近于 $n_c/4$,该能量增大并接近 30keV。下面将讨论的双等离子衰变能够产生较小波数、较高相速度和较高能量的电子。在 8.1.5 节最后,我们将讨论这样的高能电子对于物质的穿透问题。

表 8.1 归纳了激光束在激光等离子体中驱动的各种不稳定性。所有情形中,两个被驱动波的每一个波都再与激光光波耦合,一起驱动另外的被驱动波。表中给出了每种不稳定性出现所需要的电子密度,并给出了均匀等离子体中各种不稳定性的增长率,这里两个被驱动波分别以下标 1 和 2 表示。在"增长率"一列中,ω_{pi}是第 2 章中讨论的离子-等离子体波的频率,$\omega_{pi}^2=4\pi Z^2 e^2 n_i/m_i$($n_i$、$m_i$ 和 c 分别为离子密度、离子质量和声速),但这里采用双流体等离子体近似,即 $c_s^2=ZT_e/m_i+3T_i/m_i$。

下面简短地讨论该表 8.1 中所列的几种不稳定性:

表 8.1 激光驱动的不稳定性

不稳定性名称	被驱动波 1	被驱动波 2	发生的密度条件	增长率
受激拉曼散射(SRS)	散射光	电子-等离子体波	$\leqslant n_c/4$	$\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1\omega_2}}\frac{k_2 v_{os}}{4}$
受激布里渊散射(SBS)	散射光	声波	$\leqslant n_c$	$\sqrt{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_1 k_2 c_s}}\frac{k_2 v_{os}}{4}$
双等离子衰变	电子-等离子体波	电子-等离子体波	$\sim n_c/4$	$k_2 v_{os}/4$
参数衰变	电子-等离子体波	声波	$\sim n_c$	$\sqrt{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_1 k_2 c_s}}\frac{k_2 v_{os}}{4}$
成丝现象	调制光	零频率声波	$\leqslant n_c$	$\frac{v_{os}^2}{8(T_e/m_i)}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0}$

在激光波长较短而且采用谱色散匀滑技术(SSD)或其他方法形成匀滑等离子体的情况下,受激拉曼散射受到碰撞影响而急剧降低。受激布里渊散射(Stimulated Brillouin Scattering ,SBS)是受激拉曼散射的一个直接类比,仅仅其中第二个被驱动波是声波而已。当激光带宽提高时这种散射将强烈降低,而且在许多情况下很容易达到饱和。但是已观察到,受激拉曼散射和受激布里渊散射两者有时转换的激光能量超过 50%,因此这些散射波是很可观的。

另外,表 8.1 中还有两个衰变不稳定性,此时激光光波驱动等离子体中的两个波。衰变不稳定性并不直接产生散射光。双等离子衰变只局限于等离子体中某个单一密度面处,而且十分容易饱和。但是在本书编写期间,这种不稳定性似乎已被看作对于激光直接驱动惯性约束聚变的最大潜在威胁。大多数近代实验中,激光光波的碰撞吸收防止了等离子体中密度接近 n_c 处出现参数衰变不稳定性。这种不稳定性有一种涉及零频率声波的变型,有时又称为振荡双流不稳定性。受激布里渊散射具有零频率声波的变型,就是成丝现象,在非线性极限下成丝过程使得激光束分裂为多个离散的强子光束。目前认为接近等离子体前沿处激光束的的强烈成丝,似乎可以使得其内部较稠密区域中的照明匀滑化,这是由于成丝形成一些子光束,强烈聚焦后可把光能散布到较广角范围的缘故。实际上存在几种类型的成丝现象,表 8.1 中所示的成丝增长率属于有质动力成丝类型,这里有质动力引起等离子体的运动,就如同受激布里渊散射情形那样。在较冷的等离子体中,与微分加热有关的热成丝过程比较重要。当 v_{os}达到相对论范围,可能出现相对论自聚焦现象,这种过程与电子等效质量的变化有关。

读者也许有疑问,为什么激光的全部能量没有消耗于受激拉曼散射或其他类型的不稳定性之中(从激光脉冲的时间尺度来看,这些不稳定性大多数增长十分迅速)。对这个问题的回答是两重性的:一方面,如果激光波长过长(大致为 1μm 或更长),则全部激光能量(或多或少)被消耗于这些不稳定性之中。这个问题几乎把激光聚变计划逼向绝路,因为该计划早期曾企图使用波长 1μm ~ 10μm 的激光。这样的激光器会产生一些特别的现象,但无助于推动激光聚变研究更向前进。可见和紫外波长的激光器具有同样激光辐照度下 v_{os}较小和碰撞效应开始发挥作用两个优点。另一方面,只要 v_{os}不是过高,一些不稳定性在低幅值下就会饱和,而且都受到等离子体非均匀性或者激光带宽的强烈影响。

8.1.5　电子热输运

我们曾经强调,与离子比较而言电子的可动性强,因此在激光与等离子体直接相互作用等情形中电子占主导地位。这也许令人期盼在所有等离子体系统的能量输运中,电子可能起着主要的作用。然而对于本书考虑的系统来说,情况并非如此。高能量密度状况下的实验室系统一般是碰撞性的,以至于电子无法脱离离子而逃逸,也不能对动力学过程产生很强的影响。第 3 章中已经定量论述了这个问题。同样值得注意的是,几乎没有一个天体物理系统中电子输运较多的热量。由于质量很小,电子被牢牢地束缚于磁场之中,这种磁场通常相当紊乱,足以阻止电子进行大规模的热输运。有些系统中涉及发生于磁场廻线中或者磁

力线重接处的不稳定性，前者如太阳附近，后者如许多产生高能电子暴发的地方。这些电子接着发出辐射，因而这种电子辐射可成为这种现象的重要诊断标志，然而电子并不主导磁场重接系统的整个动力学过程。相仿地，电子发出的辐射已成为超新星遗迹中宇宙射线加速的重要指示器，但是真正能抵达地球的宇宙射线几乎都是离子。

尽管如此，除了两个关键性的特例外，在热量颇为紧要的任何场合电子极少携带很多热量。

第一种例外情形是能量由激光束传送到凝聚物质中，这是惯性约束聚变和任何其他使用激光加载的高能量密度实验的基本问题；第二种例外情形是能量从惯性约束聚变的燃烧区中向外散失。基于这些原因，值得对电子热输运增进一些理解。图 8.7 表示一个计算机数值模拟计算得到的受激光辐照的等离子体剖面。等离子体发生膨胀，但在膨胀区中几乎不吸收激光，吸收主要发生于吸收区内，即电子密度低于临界密度的一定范围内。在输运区中，电子热输运把能量传送到电子密度高于临界密度的区域，烧蚀即发生于这样的高密度物质中。作为对于烧蚀产物运动的反作用（或者等价地说，对于烧蚀压力的响应），出现一个冲击波朝靶物质内部传播，从而形成高电子密度的阵面区域。

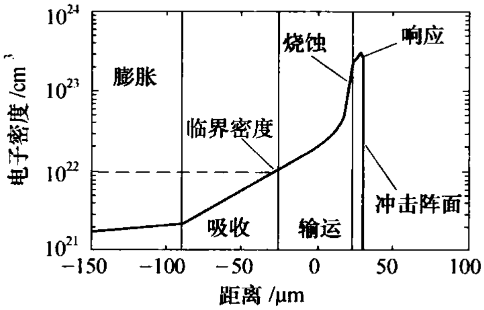


图 8.7　计算机数值模拟得到的电子密度剖面
图中指明了等离子体内各种区域，该数值模拟中激光波长为 0.35μm，辐照度为 $10^{15}\ \mathrm{W/cm^2}$。

为了加深对电子热输运的理解，下面介绍 Spitzer 和 Harm 的经典推导过程，再讨论输运过分强烈以致经典方法不再适用的极限情形。由于电子热输运过程涉及个体粒子的行为，我们将采用 2.4.3 节给出的动理学描述，讨论分布函数 $f(\boldsymbol{v})$ 的性态。为了这个目的，令该函数在整个速度空间的积分等于 n_e，对其进行归一化处理。

假定等离子体具有平缓的温度梯度，这个条件在数学上可表示为 $\lambda_{mfp} \ll T_e/|\nabla T_e|$，这里 λ_{mfp} 是电子的碰撞平均自由程。把每个电子携带的能量按分布函数积分，可以计算该等离子体中沿 z 方向的热通量，即

$$Q = \int \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) v_z f(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} \tag{8.28}$$

可以看出，若 $f(\boldsymbol{v})$ 为麦克斯韦分布或者是任何关于 v_z 对称的函数分布，则 $Q=0$。真实的分布往往接近于麦克斯韦分布，但很少是完全对称的，因此热量通常是由电子携带的。思考一下，如果等离子体初始状态由速度的麦克斯韦分布以及一个温度的平缓空间分布所构成将会发生什么，就可看出不对称性是从哪里起源的。当温度上升时，能量高于 $k_B T_e$ 的热粒子个数增多，同时能量较低的冷粒子个数下降，结果使得初始处于某个麦克斯韦分布的系统其状态通过某点向较热温区变动时，将含有过多的热粒子以及偏少的冷粒子；相反地，朝较冷温区变动时，则热粒子偏少，冷粒子过多。即使分布函数初始是麦克斯韦分布的，但温度随时间而变化，这样的系统几乎立即就会发展出速度分布不对称、能够输运热量的非麦克斯韦结构。

为了找到热流方程，假定等离子体具有不变的密度分布和缓慢变化的温度分布。注意到温度梯度给定等离子体内一个唯一的方向，人们感兴趣的物理作用与沿这个方向的运动有关，记这个方向为 z，然后可确定极坐标，极角 θ 为偏离 z 轴的角度。把分布函数展开为勒让德多项式，只保留展开的一阶项，即有

$$f(\boldsymbol{v}) = f_0(\boldsymbol{v}) + f_1(\boldsymbol{v})\cos\theta \tag{8.29}$$

式中 $f_0(\boldsymbol{v})$ 为麦克斯韦分布；$f_1(\boldsymbol{v})$ 必须很小才能符合展开式只取前两项的合理性。在一些实验中（如 Liu 等 1994 年的工作），直接测量了这个展开式的前二个或前三个系数。

此外，Shkarofsky 等人证明，使用一个简单的弛豫率就能够准确地处理本问题中的碰撞作用。把这个弛豫率用 2.4 节中定义的电子－离子碰撞率 ν_{ei} 来表达，给出

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_C = \frac{-3}{4\pi}\left(\frac{2\pi k_B T_e}{m_e}\right)^{3/2}\frac{v_{ei}}{\boldsymbol{v}^3}\ f_1(\boldsymbol{v})\cos\theta = \frac{-W}{\boldsymbol{v}^3}f_1(\boldsymbol{v})\cos\theta \tag{8.30}$$

为了下面叙述方便，此式中严格规定了系数 W。把式(8.29)和式(8.30)代入式(2.77)，只保留与 $\cos\theta$ 成正比的项，得到

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{eE}{m_e}\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{-W}{v^3}f_1(\boldsymbol{v}) \tag{8.31}$$

根据问题的对称性，上式中的电场必定沿着 z 轴方向。这里已略去磁场 $\boldsymbol{B}$，在稠密靶物质的激光光斑中心附近区域内这样做是合理的，因为该区域中碰撞较强，激光产生的磁场较弱。定常状态下这意味着

$$f_1(\boldsymbol{v}) = \frac{-\boldsymbol{v}^3}{W}\left(v\frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{eE}{m_e}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right) \tag{8.32}$$

为了找到 E，我们注意到电荷的任何净流动都将引起可能截断电荷流动的电势的发展，所以定常状态下沿 z 方向的净电流 J_z 必须为零，从而给出

$$J_z = -e\int_0^\infty v_z f(\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = -2\pi e\int(v\cos\theta)\,f_1(\boldsymbol{v})\cos\theta v^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}v = 0 \tag{8.33}$$

由此可得

$$\int_0^\infty \boldsymbol{v}^3 f_1(\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = \int_0^\infty \boldsymbol{v}^6\left(v\frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{eE}{m_e}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = 0 \tag{8.34}$$

对上式进行积分解出 E，再代入已假定为麦克斯韦分布的 f_0 的导数之中，得出 $eE = -4k_B\,\partial T_e/\partial z$，即有

$$f_1(\boldsymbol{v}) = f_0(\boldsymbol{v})\frac{\boldsymbol{v}^4}{2Wk_BT_e}\left(8 - \frac{m_e\boldsymbol{v}^2}{k_BT_e}\right)k_B\frac{\partial T_e}{\partial z} \tag{8.35}$$

从式(8.27)和式(8.28)可知，每个速度空间体积元 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}$ 中的热通量正比于 $\boldsymbol{v}^3 f_1(\boldsymbol{v})\cos^2\theta$。依据式(8.35)式右部可知，与低速度情形相比，由于括号中的项高速度时 $f_1(\boldsymbol{v})$ 将改变正、负号，这正是定性分析中所预见的。积分式(8.28)，得 Spitzer－Harm 热通量为

$$Q_{SH} = -\frac{128}{3\pi}\frac{n_ek_BT_e}{m_e\nu_{ei}}k_B\frac{\partial T_e}{\partial z} = -\kappa_{th}\frac{\partial k_BT_e}{\partial z} \tag{8.36}$$

式中 κ_{th} 为热输运系数。这里 k_B 必须使得 T_e 转为 Q_{SH} 所使用的能量单位，如果 T_e 独立地采

用其他单位表示,则热输运系数将是 $\kappa_{th}k_B$。通过 ν_{ei},κ_{th}将正比于 $T_e^{5/2}$,因而被输运的热量随温度十分迅速地增加。十分明显,所输运的热量与密度无关。粒子数通量随密度而增加,恰好为碰撞率的增长所平衡。这个模型又称为电子热输运的扩散模型或者扩散性热输运的描述,因为电子通过扩散过程而携带传送热量。事实上,在关于电子能量的流体力学方程中使用式(8.36)时,得到的是一个扩散方程(在简单的极限下),应注意到式(8.36)中 $k_BT_e/(m_e\nu_{ei})$ 具有运动扩散系数的单位(即 cm^2/s)。Kruer 指出,式(8.36)高估了电子热输运,因为该式推导中忽略了电子-电子碰撞,这个缺陷可以做近似修正:把 κ_{th} 乘以 $g(Z)=(1+3.3/Z)^{-1}$。

习题 8.6

推导采用 Spitzer-Harm 热通量的电子流体的能量方程,并证明其为扩散方程。

做了上述修正后的 Spitzer-Harm 电子热输运模型,给出了大致定义的极限范围内热输运的准确结果,尽管还存在一些基本问题。这些问题与式(8.29)展开式的使用有关,此展开式仅当 $f_1/f_0 \ll 1$ 时才可成立。从式(8.35)看出,这个一阶项比值为

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(8\frac{v^4}{v_{th}^4}-\frac{v^6}{v_{th}^6}\right)\frac{\lambda_{mfp}}{L_T} \tag{8.37}$$

式中 λ_{mfp}为电子的平均自由程,$\lambda_{mfp}=v_{th}/\nu_{ei}$;$L_T$ 为温度的长度尺度,$L_T=T_e/|\nabla T_e|$;$v_{th}^2=k_BT_e/m_e$,这个关于热速度 v_{th}的特殊定义,普遍使用于激光-等离子体相互作用研究之中。在物理学许多其他领域中,上述定义式的右部还可能有某个数字因子。

图 8.8 表示式(8.37)的比值,已以 λ_{mfp}/L_T 作归一化。关于该图有两点很重要:第一,$f(\boldsymbol{v})$的展开式必然在某个高速度 v 之下不再成立,Spitzer-Harm 模型曾经给出准确结果的唯一原因是,高速度电子所携带的热量是可略去的。从数学上看,f_0 的下降比 $|f_1/f_0|$ 的上升要快得多。第二,热量主要由能量约 3 倍 k_BT_e 的电子所携带,对应于图 8.8 中 v/v_{th}在 2~2.5 之间的最大值。在这个范围中 $f_1/f_0\approx 30\lambda_{mfp}/L_T$,因此如果

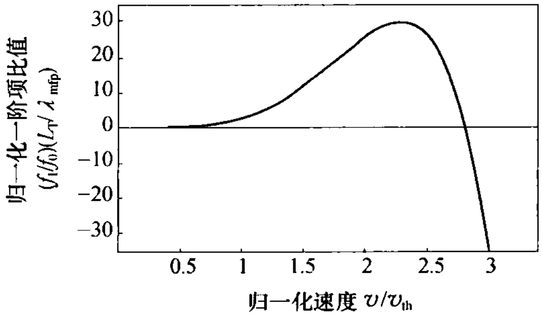


图 8.8 根据 Spitzer-Harm 理论得到的相对于分布函数的归一化一阶扰动项

$$L_T/\lambda_{mfp}\gg 30 \tag{8.38}$$

则 Spitzer-Harm 模型是准确的。

遗憾的是,在受激光辐照的等离子体中,式(8.38)的条件只在某些时候可以满足。作为经验法则,这个条件对于紫外激光大约可以满足,对于可见激光也许可以也许不能满足,对于红外激光则不能满足。

当式(8.38)条件不能满足时,恰当的解决方法是寻找玻耳兹曼方程更好的解,可能需要寻求某个更完善的碰撞项表达式。玻耳兹曼方程标准的更完善类型是福克-普朗克

(Fokker - Planck)方程，但在所有有意义的情形中此方程只能作数值解。另外，从福克 - 普朗克方程寻求热通量十分困难，以致这种计算无法方便地嵌入于激光打靶总体动力学的计算框架中。这个困难强烈推动了对于有一定用处的简单模型的探讨。

习题 8.7

画出关于热通量积分式(8.28)中一阶项的曲线，从而确定对热通量具有明显贡献的电子速度的范围。

有一种非常粗糙但应用十分广泛的模型，称为通量限制的输运模型。如果等离子体中的热能密度以相等于 $n_e k_B T v_{th}$ 的某个特征热速度被输运，产生自由流热通量，则会出现可能的最大能流。在真实物理系统中，可被输运的最大热量只能接近于这个极限值的某个分数，可引入一个通量限制因子 f 来描述，写为

$$Q_{FS} = f n_e k_B T_e v_{th} \tag{8.39}$$

典型情况下与福克 - 普朗克方程计算得到的热通量相适合，则需要取 $f \approx 0.1$。图 8.9 可用来确定这个因子大约是多少。该图画出了温度分布的长度尺度 L_T 和激光波长 $\lambda_{\mu m}$(两者都以 μm 为单位)变化时 Q_{SH}/Q_{FS} 的等值线，这里 $T_e = 0.5\text{keV}$，$Z = 3.5$，适合于低 Z 等离子体中正好处于临界面以外的区域。比值 Q_{SH}/Q_{FS} 的标度关系为 T_e^2。这里再次看出我们前面提及的观点：对于可见和紫外激光，Spitzer - Harm 模型也许是准确的；但对于波长较长的激光以及具有十分陡峭温度梯度的任何情形，这个模型可能给出过多的热流。

然而在以前早期的一些实验中，尤其是使用红外激光和高光强的情形，其观察结果只能采用 f 低至 0.01 的值才能解释，表明这些情形中另外的非碰撞过程阻碍了热输运。对这些实验观察的可能解释，还包括激光产生磁场的作用以及激光 - 等离子体不稳定性产生的强声学涨落的作用等。数值模拟中使用的一个十分普遍的模型是假设 f 为某值，取 Q 为式(8.39)和式(8.36)两者给出值中的较小者。一些更先进的计算机模拟，采用称为多群计算通量限制扩散的技术，这里电子被分为许多群，每一群被恰当地按照扩散模型或者通量限制模型处理。

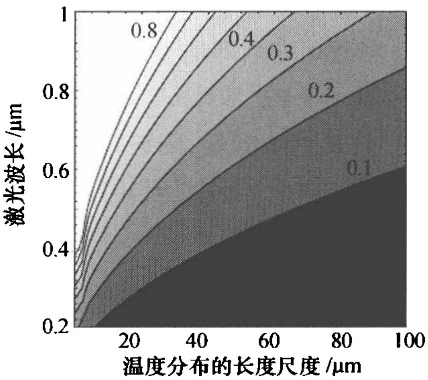


图 8.9　Spitzer - Harm 热通量与 $f = 1$ 的自由流热通量的比值 $Q_{SH}/Q_{FS} = (128/3\pi)(\lambda_{mfp}/L_T)$ 的等值线 $T_e = 0.5\text{keV}$，$Z = 3.5$，该比值的标度关系是 T_e^2。

刚才描述的一些模型适用于激光对其所辐照物质综合影响的计算，例如，这些模型可用于准确计算激光辐照所产生的压力和冲击波参数。但是当涉及受辐照表面附近靶等离子体的细致结构时，这些模型给出的结果并不正确。遗憾的是，虽然通量限制输运模型能够给出对于局部热流的定量估算，但在获取强温度梯度情形中热输运动力学规律方面基本上是失败的。其原因在于热输运根本上是非局域性的：一个给定点上沉积的热量不仅取决于该点的当地条件，更涉及一定距离范围中被输运的粒子，结果导致等离子体的长期演化不会相同于假设热输运是局域性的情况。特别由于较高能的粒子具有较小的库仑截面和较长的平均自由程，它

们在靶物质中贯穿距离更深,在主要的热波阵面前方形成一个温热的底部台阶。因此,进行关于辐照表面附近更高深物理研究的实验,必须采用十分完善的计算来解释实验结果。

出现激光-等离子体不稳定性时,真实情况可能比上面所述的更为复杂。正如8.1.4节所述,这些不稳定性产生能量为几十电子伏特的电子,它们在物质中的贯穿深度远大于处于热布居状况能够向内传热的电子。因此,高能电子能够预热实验系统中初始的冷物质,从而改变了以后一系列过程的初始条件。通常观察到的由不稳定性形成的电子分布在能量方面为指数分布,即使它们并不是具有宽广相速度分布的波所引起的。另一种情形是,等离子体反常地形成指数型的粒子分布,如20世纪早期首先提出的与真空容器中低密度等离子体行为有关的朗缪悖论。指数式能量分布允许人们赋予高能电子以温度的概念,经常把它们描述为温度 T_{hot} 的超热电子或热电子。

高能电子在物质中的贯穿是很复杂的问题,因为它们趋近任何原子核时会被强烈散射,导致高能电子的贯穿成为扩散性的,其电子平均自由程为一步的尺度,碰撞时间为该自由程被速度除的商数。由于电子在接连的碰撞中损失能量,并且受到物质中对电子的阻力,高能电子的速度持续下降,其净效果则表现为具有持续下降扩散系数的扩散性贯穿过程。如Rosen等论述的那样,所得到的电子平均射程(单位 g/cm^2)为

$$x_0 = 3 \times 10^{-6}(A/Z_{nuc}^{3/2})T_{hot}^2 \tag{8.40}$$

式中 Z_{nuc} 为核电荷数;T_{hot} 的单位为 keV。

当 $A = 2Z_{nuc}$,$Z_{nuc} \approx 4$,$T_{hot} \approx 30$keV 时,可计算出 $x_0 \approx 3 \times 10^{-3}$g/cm^2。对于密度约 1g/cm^3 的塑料,这意味着上述热电子对它的穿透深度为 30μm,已足以影响许多实验结果。当 T_{hot} 上升,穿透深度剧烈增大。例如,用 10kJ、1ns 的激光束辐照于直径 1mm 的光斑,得到的辐照度为 1.3×10^{15}W/cm^2。此时若有 1% 激光能量转换为沉积于厚度 30μm 塑料层中的温度 30keV 的热电子能量,则该物质层的温度将上升至约 30keV,压力将达到 1TPa 左右。这就是激光实验中十分关注热电子引起预热问题的缘故。基于不同的原因,Z 箍缩实验中也在关注这个问题。

8.1.6 烧蚀压力

虽然前面两节中论述的大部分内容主要局限于实验室环境,但实际上辐照对物质的烧蚀是远为广泛的现象。图8.10表示鹰状星云的图像,该天体因其被称为象腿形的引人注目的结构而闻名。鹰状星云存在于一个星体正在形成具有许多稠密分子云团的区域内,这些云团能够为很大的新星体提供物质质量。这些新星体十分巨大而明亮,它们的辐射大部分处于深紫外谱段,其光子能量高到足以使所遇到的物质直接电离,形成一个电离阵面同时又是一个相对高压的区域。关于这种结构起源的一种假设是,当灼热的低密度烧蚀等离子体开始推动其后方稠密的冷等离子体,此时产生的瑞利-泰勒不稳定性导致了这种

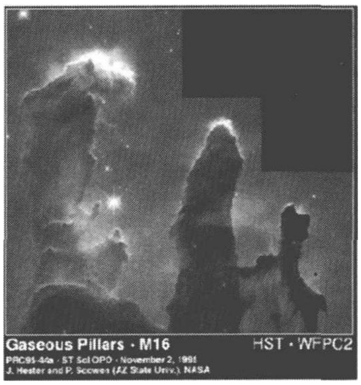


图8.10 鹰状星云图像

哈勃空间望远镜摄影,WFPC2

引自 NASA, Jeff Hester and Paul Scowen,美国亚利桑那州立大学。

结构的形成。

应用于高能量密度实验的强激光束的性质对其遇到的物质也有重大影响，这些激光束中的单个光子不会使物质电离，但是多个光子的组合就能使物质发生电离。在大部分相应的辐照度下，激光电场能使原子直接电离。较低辐照度下，激光与靶物质相互作用很快产生等离子体，然而相关的机制十分复杂（这个问题留给读者作为习题，试求出直接电离的激光辐照度阈值）。本节将探讨物质的激光烧蚀及其作用。

即使是具有技术知识的人们的第一印象，光对物体的作用力也首先是由于反射，就像太阳帆的情形。这种作用力的大小可以简捷地估算，反射所产生的光压 P_{ref} 即是反射所引起的光子动量变化率。单个光子的动量为 $\hbar k$，使其反射所引起的动量变化为 $2\hbar k$。光子通量 F 等于辐照度 I_L 被单个光子能量除的商数，即

$$F = I_L/(\hbar\omega)$$

因此光压力为

$$P_{ref} = 2\hbar kF = 2(k/\omega)I_L = 2I_L/c$$

如果光子被靶物质吸收而不是反射，则光压力只是上述值的 1/2。如果换一个角度从微观方面考察反射，计算作用于反射表面的有质动力压力。一种基于前面给出关系式的初步估算，得出

$$n_e m_e v_{os}^2/2 = I_L/c$$

考虑到反射时激光电场加倍，并对 v_{os} 进行时间平均，就可以导出 $2I_L/c$ 与微观物理量的上述关系。实用单位制下，$P_{ref} = 0.067I_{14}$ (100GPa)。反射与烧蚀相竞争，然而烧蚀几乎总归是激光对固体密度靶物质的主要效应。下面对此问题进入深入考察。

烧蚀是物质被加热后飞散离开原来所在表面的过程。根据牛顿第三定律，这个表面将经受一个相等于飞散物离开前后动量变化率的反作用力。仍然以该表面处激光辐照度 I_L 来计算这个反作用力，虽然计算中实际包括被吸收的辐照量，事实上可以假设入射的激光能量完全被吸收。这个假设对于紫外激光十分准确，当激光波长变长，这个假设越来越不准确。还要假设一半激光能量用于加热低密度的膨胀等离子体，另一半激光能量穿过临界面向内输运。使用通量限制的热输运模型，得到

$$0.5I_L = fn_c k_B T_e \sqrt{k_B T_e/m_e} \tag{8.41}$$

当 $f = 0.1$ 时，上式给出

$$T_e = 1.7(I_{14}\lambda_{\mu m}^2)^{2/3}(\text{keV}) \tag{8.42}$$

式中 I_{14} 是以 10^{14}W/cm^2 为单位的 I_L；$\lambda_{\mu m}$ 是以 μm 为单位的激光波长。

向内的烧蚀压力等于穿过临界面向外的等离子体的动量通量。假定向外流动的速度近似为 $\sqrt{2}$ 倍声速，则烧蚀压力为

$$P_{abl} = 2M\sqrt{\frac{Zk_B T_e + 3k_B T_i}{M}} \times \frac{n_c}{Z}\sqrt{\frac{Zk_B T_e + 3k_B T_i}{M}} \tag{8.43}$$

当 $Z = 3$，　$T_i = T_e/3$ 时（这是激光等离子体冕区的典型情况），即有

$$P_{\mathrm{abl}} = 2n_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}\frac{Z+1}{Z} = 0.8I_{14}^{2/3}\lambda_{\mu\mathrm{m}}^{-2/3}(\mathrm{TPa}) \tag{8.44}$$

上式右部系数为0.8,Lindl论文中的标准值为0.86。这个标准值是基于使用通量限制、多群、扩散电子热输运模型,对细致烧蚀行为进行计算机数值模拟而得到的。在继续探讨之前,先看一下一些激光系统产生的烧蚀压力具有多么惊人的数值。20世纪后期的激光设施已能用波长0.35μm的激光,以10^{15}W/cm^{2}的辐照度直接辐照较大面积(mm^2)的光斑,产生的烧蚀压力达7.5TPa,接近木星芯部压力的2倍。在地球上的实验室里产生上亿大气压的压力,这个想法相当使人振奋。实际上,这也就是使本书所述的实验室天体物理学研究成为可能而进行的工作。

烧蚀压力的准确值可能受到一些细节的影响。穿过临界面流动的速度可能大于(或小于)$\sqrt{2}$倍声速(第4章中关于稀疏波的讨论与此有关)。温度也许有异于式(8.42)的计算值,因为所使用的热输运模型是近似的,温度还可能受到式(8.42)中没有考虑的横向热输运的影响。当前关于激光吸收的计算机数值模拟不一定能给出烧蚀压力的正确结果,因为所使用的计算编码一般不包括热输运的非局域作用。对于任何具体类型的实验,为了得到更真实的结果,通常需要基于直接或间接测量的烧蚀压力值调节数值模拟中使用的参数。除了上面考虑的因素以外,某些情形中磁场也起着一定的作用。

回到与反射压力的比较。刚才得到的公式表明,若要使反射产生的压力高于烧蚀压力,激光辐照度必须达10^{21}W/cm^{2}以上。这个估计在细节上不一定正确,因为如第11章中所述,辐照度达到10^{18}W/cm^{2}时相对论效应已变得比较重要。准确的陈述应是:在所有非相对论状况下对于加速处于(或接近于)固体密度的物质来说,烧蚀比反射更为重要。但是,这并不意味着光反射和有质动力不起作用。当激光辐照度达到10^{16}W/cm^{2}之前,有质动力压力就可增长到相当于临界密度下等离子体的压力。在这个辐照度之上,有质动力压力推动临界面向内运动,使得等离子体密度剖面变得十分陡峭。即便如此,该压力还是不能阻挡由于加热和较高密度固体物质迁移所引起的烧蚀压力导致的物质向外流动。

下面讨论烧蚀对于靶物质本身的效应:

首先,烧蚀使靶物质发生质量迁移,上述计算表明$Z=3$,$A=6$时,质量烧蚀率为

$$\dot{m} = \frac{P_{\mathrm{abl}}}{V_{\mathrm{ex}}} = \frac{\sqrt{2}Mn_{\mathrm{c}}}{Z}\sqrt{\frac{Zk_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}+3k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}}{M}} = 1.7\times10^{5}I_{14}^{1/3}\lambda_{\mu\mathrm{m}}^{-4/3}(\mathrm{g}/(\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s})) \tag{8.45}$$

Lindl基于数值模拟计算提出的标准的烧蚀标度律的系数是2.6,而不是上式中的1.7。真实的情况是,该系数与本书模型和标准数值模拟两者以外的物理细节有关,因此在该系数事关紧要的任何情形,应该进行实验测量确定。

其次,烧蚀压力推动靶件运动,其最直接的作用是驱动冲击波向靶物质中传播,并产生第4章和第5章中论述的后果。在冲击波掠过靶物质后很短时间之后,靶件就开始整体加速,这对惯性约束聚变十分重要,例如,这种实验需要在运动开始时的靶丸壳体内沉积尽可能多的动能。烧蚀压力下靶件的加速过程就像火箭的加速,可用描述火箭模型变质量系统动量守恒的方程研究。设物体的初始质量m_0,即时的剩余质量$m_{\mathrm{r}}=m_0-m_{\mathrm{a}}$,这里$m_{\mathrm{a}}$为总烧蚀质量(可以等价地用单位面积上的质量代替这里的质量)。利用动量守恒原理可推导

出物体运动的行为，这里动量守恒必须应用于火箭与喷射物组成的整个系统。在实验室参考系中考察，当质量微元 dm 被喷射出去，该喷射物微元具有的动量（与火箭飞行方向相反）是 $dm(V_{ex}-V)$，这里 V 为火箭速度，V_{ex} 为排出气体速度。剩余火箭质量的动量增量为 $(m_r-dm)(V+dV)-m_rV$，这两个动量的变化量应该相等，再取无限小量 dm 和 dV 的极限，乘积 $dm\cdot dV$ 为二阶小量可忽略不计，得到

$$dmV_{ex} = m_r dV = (m_0 - m_a)dV \tag{8.46}$$

式中烧蚀量 m_a 是变量，其增量即 dm。初始时 $V=0$，把上式从 $m_a=0$ 积分到其即时值，则有

$$V = V_{ex}\ln(m_0/m_r) \tag{8.47}$$

上式表明，火箭速度开始时迅速增加，然后慢下来。当初始质量被烧蚀掉约 2/3 时，火箭速度达到 V_{ex}。可以看到，如果烧蚀掉差不多全部的质量，则质量耗尽的火箭可以达到任意高的速度。遗憾的是，在靶件不发生破碎的前提下，可以烧蚀掉的靶质量不能超过第 5 章中讨论的流体动力学不稳定性设定的限度。

火箭之类系统的烧蚀效率 ε_R 可定义为剩余质量的动能与火箭及喷物的总动能之比值。设想理想系统中所有能量都是动能，没有能量转变为热能，上面定义的效率实际上是这种理想系统的效率，可以写为

$$\varepsilon_R = m_rV^2/(m_rV^2 + 2K_{ex})$$

式中 K_{ex} 为喷射物的动能。

为了确定烧蚀效率，必须计算出喷射物的总动能，即

$$K_{ex} = \int_0^{m_a}\frac{(V_{ex}-V)^2}{2}dm_a = \int_0^{m_a}\frac{V_{ex}^2}{2}\left[1+\ln\left(1-\left(\frac{m_a}{m_0}\right)\right)\right]^2 dm_a$$

$$= \frac{m_0V_{ex}^2}{2}\int_{\frac{m_r}{m_0}}^{1}\left[1+\ln\left(\frac{m_r}{m_0}\right)\right]^2 d\left(\frac{m_r}{m_0}\right) \tag{8.48}$$

算出这个积分结果为 $1-(m_r/m_0)[1+\ln(m_r/m_0)]$，因此火箭系统的烧蚀效率可估算为

$$\varepsilon_R = \frac{(m_r/m_0)\ln^2(m_r/m_0)}{1-(m_r/m_0)} \tag{8.49}$$

此式已图示于图 8.11。当靶体一小部分质量被烧蚀，由于 $m_a \ll m_0$，可把式(8.49)中的对数项展开，看出在这个极限下，$\varepsilon_R = m_a/m_0$，也就是此效率近似为初始时被烧蚀质量分数。这是一个十分有用的结果，从图 8.11 可以看出即使烧蚀质量分数高达 70%，这种近似计算仍然大致准确，虽然此时已远在合理的级数展开范围之外了。在激光等离子体实验和数值模拟中观察到的烧蚀驱动效率，大约只有上述公式计算值的 1/2。这反映了前面讨论的事实，即只有大约 50% 的激光辐照量真正到达密度高于烧蚀产物的吸收区中。

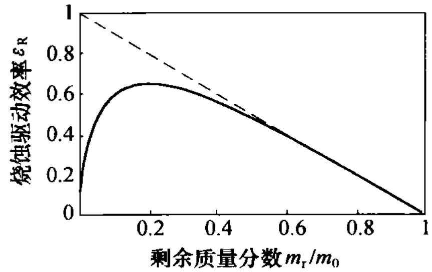


图 8.11　火箭模型烧蚀驱动的理想效率

虚线表示低烧蚀质量分数情形的简单近似估计。

习题 8.8

把对数项展开至(m_a/m_0)的二阶小量，给出效率 ε_R 的近似表达式，画出相应的火箭效率曲线和式(8.49)的计算曲线，并作比较和讨论。

8.2 黑腔

19 世纪后期普朗克正在探讨热辐射的基本性质，他发现有个设想十分有用，即想象有一个完全封闭的体积，其内部的辐射场达到与该体积腔壁物质温度平衡的状况。他把这样一种封闭体积装置称为**黑腔**。在黑腔壁上打一个小孔，对其内部状况的扰动假定可以忽略不计，可以想象让辐射透出这个小孔，该黑腔就可成为“统计物理”和“热物理”课程中学习黑体辐射的一个标准源。显然，加热黑腔的壳壁就能够提高辐射场的温度，这就是用激光驱动黑腔的观念，它可以形成十分接近于黑体辐射谱(即普朗克谱)的温度数百万摄氏度的辐射场。本节将探讨黑腔器件及其一些基本作用。

图 8.12 是典型黑腔的示意图。虽然能够制作和已经做过的黑腔具有多种多样形状，其通常形状总是一个容易制作的圆柱筒。黑腔的典型尺寸为若干毫米或更小一些，腔体用某种高 Z 材料制作，经常使用的是金，已经研发成功制备金壁黑腔的精良技术。

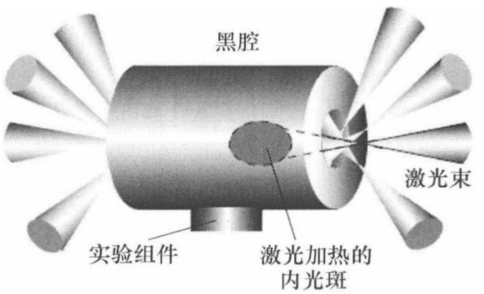


图 8.12　典型黑腔示意图

这个黑腔是一个圆柱筒体，其右边是一个可看到的激光束进入孔，
如图所示激光进入后打到黑腔内壁上。图中表示黑腔空间中或腔壁上可以放置实验组件。

偶尔人们也做这样的实验，让激光束打在黑腔外面以加热这个薄壁腔体。然而更通常的做法如图 8.12 所示，黑腔壁上有一个或多个激光进入孔，很多束激光通过这些孔进入腔内，许多情形中激光束通过两端的入口从两个方向进入黑腔，这样比较容易在黑腔内形成对称的辐射场。有些实验只使用一个激光进入孔和相对较短的柱筒，这样的器件称为半(黑)腔(halfraum)。这个英文名称有些像双关语，因为由此可把 hohlraum(黑腔)中的“hohl”(译注：德语“空”的意思)会意读成英语的谐音“whole”。激光束和黑腔组合的目的，就是形成有用的辐射环境。8.3 节中讨论的 Z 箍缩技术也能用于加热黑腔。本节研究激光加热的情形，将讨论辐射场的产生、辐射环境的建立、可能出现的问题以及辐射应用于烧蚀物体。有时辐射被用来加热样品而不是烧蚀样品，例如在测量实验样品 X 射线不透明度的实验中。

8.2.1 激光束转换为 X 射线

激光辐照下黑腔的加热有两方面的含意：激光能束转换为 X 射线，以及这样产生的 X 射线的输运。X 射线最初产生在激光束打在黑腔金壁上的光斑内。8.1 节中论述的激光与靶等离子体相互作用的各种现象，在这里都会出现，但大部分现象并不重要，原因在于辐射产生和辐射能量输运是主导的物理过程。高 Z 等离子体成为部分电离的，所产生离子的许多原子跃迁过程与软 X 射线强烈相互作用。第一个重要过程是激光加热的电子激发这些跃迁，然后产生辐射，其净效果相当于电子把自身大部分能量交给软 X 射线辐射。另外，这些 X 射线穿行激光吸收区的透过率较高（按第 6 章的术语，即光学深度较小）。结果导致略低于 50% 的被吸收激光能量向外辐射，同样数量的辐射朝内发射进入稠密靶物质区。余下的能量消耗于金等离子体的加热和运动，以及通过电子热输运把能量传送至靶内更深处。基于 Kent Estabrook 的数值模拟计算（参见 Drake 等人的论文，1988），对金靶进行 1ns 时间的激光辐照所产生的欠稠密等离子体的近似参数为

$$\begin{cases} Z = 42 I_{14}^{0.067} \lambda_{\mu m}^{-0.06} \\ T_e = 2.3 I_{14}^{0.045} \lambda_{\mu m}^{0.85} (\mathrm{keV}) \\ L = 114 I_{14}^{0.067} \lambda_{\mu m}^{-0.06} (\mu m) \ (\text{电子密度为 } 0.1 n_c \text{ 处}) \end{cases} \tag{8.50}$$

式中 L 为密度剖面的长度尺度$(\mathrm{d}(\ln n_e)/\mathrm{d}x)^{-1}$。

从这些关系式可以知道，当 $I_{14}=1$ 时，该等离子体膨胀所涉及的能量通量小于激光辐照量的 2%。

在继续讨论等离子体的性质之前，应先与 8.1 节论述的低 Z 等离子体情形作一对比。激光辐照下低 Z 等离子体达到的温度低于高 Z 等离子体，因为前者把热量从吸收区中向外输运更为迅速（热传导系数正比于 $1/Z$）。再者，低 Z 等离子体情形中过稠密区域内被加热物质的体积大得多，也会使得加热温度偏低。如同从任何物体发出的那样，靶中温度为 T 的薄层物质发出的热辐射的功率密度相等于发射率乘以 σT^4。因此，低 Z 等离子体中发出的辐射功率要低很多。

回到金等离子体的情形，吸收区外的稠密物质被输运给它的能量所加热，这种输运是辐射主导的，但是其吸收长度非常短，因此辐射在稠密区的贯穿是扩散性的，具有第 7 章中讨论的马夏克波的特性。在辐射波是纯粹扩散波的极限下，热阵面向前穿行的距离正比于 $t^{1/2}$。由于被加热物质逐渐膨胀，真实辐射波的贯穿将更快一些。Lindl 著作中报道的 M. D. Rosen 关于贯穿深度的标准估算式为

$$x_M = 0.53 T_0^{1.86} t_{ns}^{0.75} (\mu m) \tag{8.51}$$

式中 T_0 为物质在 1ns 时的温度，以 100eV 为单位；t_{ns}是以 ns 为单位的时间。

应注意到，T_0 是稠密金等离子体区域外部边界处的物质温度，并不是吸收区域中高得多的电子温度。本节中涉及的黑腔温度，一般以 eV 或者 100eV 为单位，因此被加热层的厚度约 1μm，远小于以声速流动的物质在 1ns 时间内走过的约上百微米的距离。

考虑高 Z 物体表面很不透明物质层中的能量平衡，该层物质被大约 50% 的激光辐照量

加热。因为电子个数是离子的许多倍,可以忽略离子的作用(除了应考虑它们的流体动力学动量的重要性时)。能量通量的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_e k_B T_e x_M) = 0.5I_L - \sigma T_e^4 \tag{8.52}$$

上式左部考虑了马夏克波中含有的能量,右部则是通过临界面的净能量通量。假设 x_M 按照式(8.51)变化,由于扩散波穿行较慢,可以认为任何时刻温度和密度都近似处于定常状态。求解 1*ns* 时刻的热流,就可看出几乎所有的输入能量都被向外辐射出去,只有百分之几的能量消耗于马夏克波的膨胀之中。这样的解需要对与温度有关的电离程度做某种假设,但无论作怎样的假设,式(8.52)左部总可以忽略不计。作为对温度的初始估计,可以取 $\sigma T_e^4 \approx 0.5I_L$,从而得出,$T_e(\mathrm{eV}) \approx 148 I_{14}^{0.25}$。

激光光斑处发出的总辐射中具有一个温度为上述量级的黑体谱分量,以及两个更"硬"的(也就是更高能的)谱分量。首先,来自较热的欠稠密吸收区的发射具有更高能的但是非平衡的谱。其次,金物质一般把百分之几的激光能量转变为 M 带跃迁形成的辐射(涉及主量子数 $n=3$ 的较低能态电子),其能量接近 2keV。图 8.13 表示金壁表面激光光斑处发射 X 射线的典型能谱。

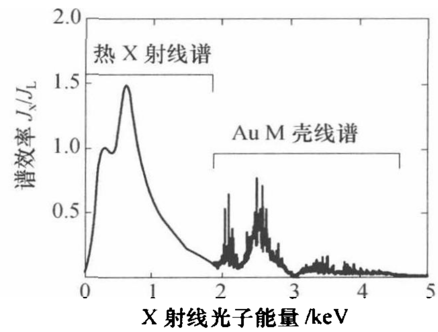


图 8.13 受激光辐照的金壁表面发射 X 射线的典型能谱

J_X 是 2π 立体角内的 X 射线能量,J_L 为激光能量,激光波长 0.35μm,辐照度 $\approx 5\times10^{14}\,\mathrm{W/cm^2}$。2 keV 以下的实验数据取自于一个 10 通道 X 射线二极管探测系统,2keV 以上的数据取自于两个晶体谱仪。该图引自 Robert L. Kauffman 的工作。

刚才讨论的动力学过程中更为引人注目的问题是,作为 X 射线再次发射的能量占入射激光能量的分数是多少?假定此过程完全是辐射主导的,粗略估计有 50% 入射激光能量在吸收区中被向外辐射,到达高密度区的所有能量则以辐射形式通过临界面返回。这相当于 100% 的入射激光能量转变成为 X 射线。典型的实验观察值是,辐照度为几个 $10^{14}\,\mathrm{W/cm^2}$ 时 X 射线的转换效率为 60% ~80%,良好的标准估计值为 70%。X 射线的转换效率随时间而上升,这正是人们所预期的,因为当马夏克波的穿行越来越慢时(见式(8.51)),维持该波所需的功率也随时间而降低。实验观察到激光辐照度较低时,X 射线的转换效率上升,而当激光辐照度增高时该效率下降。可以设想,这种降低反映了高辐照度下激光等离子体相互作用现象(而不是辐射能量输运过程)重要性的增大。

由于来自物质的总辐射量大致是来自马夏克波辐射量的 3/2 倍,激光光斑的等效温度 T_{eff} 应是能量平衡计算得温度值的 $(3/2)^{1/4}$ 倍,即

$$T_{\mathrm{eff}} \approx 164 I_{14}^{0.25}(\mathrm{eV}) \tag{8.53}$$

到此人们考察了一个黑腔,其中有一个从激光光斑上再发射 X 射线形式的能源。激光光斑发出的 X 射线辐射照射到黑腔的内壁,这相仿于该激光光斑处原来受到的辐照,然而 X 射线能够穿透到更高密度区中,在那里对加热、驱动马夏克波以及再发射辐射作贡献。黑腔

壁上一个任意点并不只是被该激光光斑发出的辐射所照到，还受到来自它能“看到”的黑腔壁其他地方的辐照，更加增强了对该点的加热。由于与系统的演化时间尺度相比，跃迁和再发射的时间很短，可以把到达腔壁的总辐照度用级数表示，即

$$I_w = I_0(1 + \alpha f + \alpha^2 f^2 + \cdots) = \frac{I_0}{1 - \alpha f} = \frac{\eta f(A_L/A_w)}{1 - \alpha f} I_L = \xi I_L \tag{8.54}$$

式中 $I_0 = \eta f I_L(A_L/A_w)$ 为依据激光光斑处入射辐照量计算的全部腔壁上的平均（X 射线）辐照度；η 为 X 射线的转换效率；A_L 和 A_w 分别为激光光斑和黑腔内壁的面积；f 为激光光斑处发出辐射中可到达其他壁面处的分数。由于从激光束进入孔漏出以及被黑腔中靶丸或其他组件吸收等原因所导致的能量损失，f 总是小于 1。入射于腔壁上一点处的辐射量中被再次发射出来的分数称为**返照率** α。因此，激光光斑处受到的辐照量中被再发射后又被其他腔壁处吸收的分数为 αf。被再吸收的辐射中又有部分被再发射，如此循环下去，因此可用式(8.54)的幂级数描述。这个级数是收敛的，最后结果是黑腔内壁上的 X 射线辐照度正比于入射的激光辐照度，比例常数 $\xi = \eta f(A_L/A_w)/(1 - \alpha f)$，这里已假设此式在均匀、平均的意义下可以应用。实际黑腔中的腔壁温度是变化的，因为能量输运并不均匀，第 9 章中还要讨论这个问题。已加热腔壁的行为由式(8.52)描述，但该式中应以 I_w 代替 $0.5I_L$，而且再次假定进入马夏克波的能量已忽略不计。各参数的典型值为 $\eta \approx 0.7$，$f \approx 0.9$，此 f 值基本上是进光孔和腔中实验组件（如靶丸）的面积与腔壁总面积之比；$\alpha \approx 1$，这是由于再发射的能量远高于向腔壁内部透射的能量；还有 $A_L \approx 0.1A_w$，人们希望激光束斑 A_L 在可行情况下尽可能大，但又必须能够注入黑腔之中并到达实验要求的位置。综合上述得出 $I_w \approx 0.6I_L$，也就是说 ξ 能够接近于 1。

下面对上述结果做些评论。黑腔是一种具有惊人效率的器件，它能吸收输入的激光能量，而且通过腔壁面元之间的多次辐射返照，把大部分输入能量保持在腔内。黑腔内软 X 射线的辐照度接近入射激光束原来的辐照度，可用这样的软 X 射线辐照聚变靶丸或其他实验组件，下面还要再做讨论。另外也很明显，上面讨论中未把激光光斑孤立处理的做法不大妥当，因为激光光斑也会受到来自黑腔壁以及其他激光光斑的照射。事实上已有一些实验证据表明（参见 Lindl 的著作），黑腔内的等效转换效率高于黑腔外的情形，但是这种论证很复杂，而且并非结论性的，这个问题留给感兴趣的读者去探讨。

求出能量输运方程 $I_w \approx \sigma T_w^4$ 的近似解，这里 T_w 是腔壁温度，得到一个关于腔壁温度的公式为

$$T_w = \left(\frac{\eta f A_L/A_w}{\sigma(1 - \alpha f)} I_L\right)^{1/4} = 177(\xi I_{14})^{1/4}(\mathrm{eV}) \tag{8.55}$$

T_w 也常称为**黑腔温度**或辐射温度 T_r，其单位取决于 σ 的单位，而且必须与 I_L 一致。

假设把一个面积 A_C 的靶丸或其他实验组件放置在腔壁上或空腔内，这些物体受到的辐照度为 I_w，它们的材料一般是低 Z 物质，因为实验目的通常是产生较高的烧蚀压力。甚至当具有另外的实验目的时，受辐照的靶件通常也用低 Z 物质层包覆，阻止内部物质向外运动。这样的薄层称为阻塞层。X 射线很容易穿透已经电离并被加热的低 Z 物质层（这些物质也许已完全电离，但在任何情况下几乎不存在可能吸收 X 射线的原子跃迁）。这些物质

还具有相当低的致使吸收较弱的碰撞率。然后,一旦X射线到达未曾加热的较冷物质区,短距离内即可被吸收。大多数情形中,靶物质吸收几乎全部的入射能量,对f具有贡献。被发送至靶丸的激光辐照度分数为

$$\frac{I_w A_C}{I_L A_L} = \frac{\eta f}{1 - \alpha f} \frac{A_C}{A_w} \tag{8.56}$$

这个分数可能较大但不能超过1,因为$\eta < 1$, $\alpha < 1$,并且$f < (1 - A_C/A_w)$。靶丸相对于黑腔的尺寸越大,则发送到靶丸的能量效率越高。遗憾的是这样做必须付出代价,因为越大的靶丸受到的辐照越不均匀,第9章中对此还要进行深入讨论。

8.2.2 离子束产生X射线

加热黑腔的另一条途径是使用重离子束,原理上说来可以高效率、高重复率地产生重离子束,因此重离子束似乎可以成为基于惯性约束聚变的发电厂能源。但是重离子束不可能被聚焦到像激光束那样的程度。用离子束加热黑腔,在一个方向或者相对的两个方向上进行辐照,离子束的能量沉积在黑腔的外壁中,或者沉积在置于黑腔中由离子束照射的靶件内,形成能够辐照对其曝光的腔壁的热源,启始了相同于激光加热黑腔时发生的吸收和再发射过程。对于需要用均匀X射线加热物体的应用,一般应使用腔壁作为屏障,把离子束加热的束斑与靶件隔离开来,使靶件只能通过腔壁发出的辐射得到加热。

8.2.3 X射线引起的烧蚀

为了完成关于黑腔对靶丸或实验组件基本作用过程的论述,本节考虑软X射线辐照黑腔中低Z物质所产生的烧蚀压力。图8.14表示基于Hatchett论文画出的这种区域的结构。考虑烧蚀体的某种物质对于温度为T_w的普朗克谱辐照的响应。这里已经忽略M能带或者其他非热辐射分量的作用,这些辐射分量可能在物质中穿透更深,并引起热波主阵面前方的加热(称为预热)。一旦低Z物质发生电离,它对软X射线的不透明度将变得很低。这个现象很重要,也是烧蚀体材料极少含有重于碳的元素的原因。基于7.5节所进行的讨论,可以预期这样的状况下将形成一个电离阵面,应当指出在本节的意境中这个电离阵面也可以描述为热阵面,因为X射线的大部分辐照量已沉积于该阵面附近的很小体积中。人们感兴趣的典型情形中,X射线能量沉积所引起的高压驱动一个冲击波,进入能量沉积区域前方的稠密冷物质中。为了使X射线的辐照能够产生强冲击波,重要的是不能使得上述稠密物质经过冲击加热以后变为对于X射线透明的状况。由于这个缘故,冷冻的纯氢薄层是性能很差的烧蚀体。

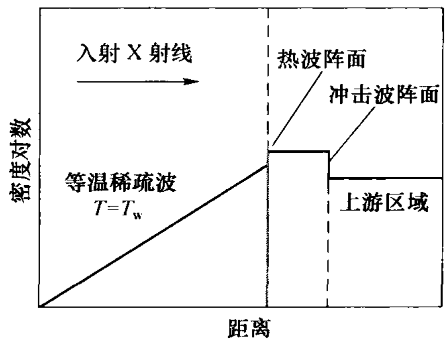


图8.14 X射线烧蚀低Z物质形成的典型流场结构

把热阵面作为类似于冲击波那样的间断面来处理,用这种方法分析上述系统,应添加的假定是热阵面位置处的能量输入是局域性的。还要假定系统是平面的,可用以揭示惯性约束聚变靶丸等球

形物体烧蚀行为的定性特点，虽然空间剖面的一些细节可能不同。为了使分析能够成立，热阵面处 X 射线吸收区的宽度必须小于问题中其他的特征长度。对于经过初始流动建立的过渡期之后、软 X 射线入射于低 Z 烧蚀体的情形，上述假设是成立的。另外，为了得到比较显著的烧蚀压力，大部分入射的 X 射线能量必须抵达热阵面，并且一定不能被烧蚀等离子体所吸收。这就对 X 射线烧蚀实际施加压力的有效期限设定了一个上界。由于已电离的烧蚀等离子体中吸收相当低，X 射线烧蚀成为高能量密度应用的一种有用选择。

为简单起见，我们假定从烧蚀体喷溅出来的物质吸收了足够的软 X 射线通量，把其温度维持于 T_w（这个假定其实是真实的），导致喷溅物质的膨胀成为 4.2.1 节中研究过的等温稀疏过程。相对于被激光烧蚀物质的情况，喷溅物质大都处于密度低得多的状态，此时电子热输运对于维持膨胀物质温度的作用不重要。可以认为 X 射线向上游方向传播，进入透出热阵面向外流动的物质之中。这个稀疏过程的参考系比以前情况更为复杂。以前的情况是，相对于一个驻定上游热源运动的稀疏波，在原始的物质表面位置处形成固定的参数，并且产生一个稀疏波以声速向固态物质中穿行。在 X 射线烧蚀的情形，已被加热的物质以某个速度从热阵面流出，同时热阵面向已处于运动中的上游物质内移动。一次近似下这个运动通常可以忽略，因为它涉及的能量只相当于总能量的很小分数，除非全部物质都受到冲击并且很大一部分质量随后又被烧蚀的情形外（图 8.11）。

更细致地分析热阵面参考系中的运动，可以有所收获。这个参考系类似于第 4 章中使用的冲击波参考系。首先参照 4.2 节中对于这种系统的讨论，考虑等温稀疏过程。设 c_s 为透出热阵面向外运动的初始密度 ρ_2 物质中的声速，然后应用式（4.61）和式（4.62），这些公式中的 ρ_0 相等于这里的 ρ_2。从这些式子可以证明，为维持上述稀疏过程所需单位面积的功率为 $3.4\rho_2 c_s^3$，其中 $1.4\rho_2 c_s^3$ 由新的来流物质带入稀疏波中，另外的 $2\rho_2 c_s^3$ 是维持温度所需的加热功率。与温度 T_w 对应的稀疏波的（等温）声速为

$$c_s = \sqrt{(Z+1)k_B T_w/(Am_p)}$$

习题 8.9

通过对等温稀疏过程的分析，推导关于维持该过程所需能量与从热阵面处注入稀疏波中能量的比值。

下面给出关于热阵面下游沿处烧蚀压力的一次近似估算。经由软 X 射线传至烧蚀体的功率的一部分沉积于热阵面，在该处向以声速 c_s 运动的稀疏波提供能流。这些能量的平衡给出了热阵面处的能量密度 ε_{hf}，烧蚀压力则为 $(\gamma-1)\varepsilon_{hf}$。入射的 X 射线能量通量还必须提供稀疏波所需的下游加热能量、动能以及 pdV 功，因此可以假定 50% 的入射 X 射线能量贡献于烧蚀压力，得

$$P_{abl} = 0.50(\gamma-1)\sigma T_w^4 \sqrt{\frac{Am_p}{(Z+1)k_B T_w}} \tag{8.57}$$

注意到形式上此式与密度无关，但是基于前面的讨论，人们找到的只是某些物质在某些密度范围中形成图 8.14 所示结构所需的条件。若取铍物质以及 $\gamma=5/3$ 作估算，得出

$$P_{\text{abl}} = 0.44 \times T_{\text{w}}(100\text{eV}) = 3.3(\xi I_{14})^{7/8}(\text{TPa}) \tag{8.58}$$

根据 Lindl 著作中提出的基于数值模拟结果的标准估算式，上式右部第一式的系数为 0.3，而不是 0.44，第二等式对应于 $\xi=0.68$。具体说来，烧蚀压力与物质参数有关并且随时间而变化。在相同假设下得到的声速的公式很有用处，即

$$c_{\text{s}} = \sqrt{(Z+1)k_{\text{B}}T_{\text{w}}/(Am_{\text{p}})} = 7.7\times10^{6}\sqrt{T_{\text{w}}(100\text{eV})} = 1.03\times10^{7}(\xi I_{14})^{1/8}(\text{cm/s}) \tag{8.59}$$

为了更细致地分析热阵面前后流场的性态，需要研究冲击波跳跃关系式(4.5)～式(4.7)的推广形式，即在能量方程中热阵面的一边增加辐射通量 F_{R}，也就是

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{8.60}$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \tag{8.61}$$

$$\left[\rho_1 u_1\left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) + p_1 u_1\right] = F_{\text{R}} + \left[\rho_2 u_2\left(\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) + p_2 u_2\right] \tag{8.62}$$

式中下标 1 表示热阵面上游沿的量；下标 2 表示热阵面下游沿的量；F_{R} 为沉积于热阵面的辐射能量通量。

该方程组可用来探讨越过热阵面时密度究竟上升还是下降，热阵面处流动速度是亚声速还是超声速(参看 Hatchett 的论文)。所有情形中 $p_2=\rho_2 c_{\text{s}}^2$，并且定义 $c_1^2=p_1/\rho_1$，$M_1=-u_1/c_{\text{s}}$。

一般说来，在热阵面、冲击波阵面和稀疏波高密度端三者之间存在两种可能的关系。图 8.14 表示一个膨胀性热阵面的结构，其中稀疏波终止于此阵面，冲击波被推向更前方的区域。此时有

$$-u_2 = c_{\text{s}}, \quad \rho_1 = \rho_0(\gamma+1)/(\gamma-1)$$

冲击波在热阵面前面传播，实验室参考系中热阵面的速度低于 1/4 冲击波速度(因 $\gamma=5/3$)，对应于 M_1 和 c_1/c_{s} 中较小的值。此时重新组合式(8.60)和式(8.61)，可以证明

$$c_1^2/c_{\text{s}}^2 = 2M_1 - M_1^2 \tag{8.63}$$

这个结果只在 $0\leqslant M_1\leqslant 2$ 范围内才有意义，也就是膨胀性热阵面能够起作用的范围。

另一种可能是压缩性热阵面情形，热阵面处流动是超声速的，延展的稀疏波在其后面，热阵面自身与冲击波阵面合并。设 c_1 可以忽略不计，$\rho_1=\rho_0$，$M_2=-u_2/c_{\text{s}}$，对于 $M_2>1$ 的情形，从上面同样的两个方程中可以得出

$$M_1 = M_2 + 1/M_2 \tag{8.64}$$

应用同样的一些变量进行表述，可以把能量方程改写为

$$\frac{F_{\text{R}}}{\rho_0 c_{\text{s}}^3} = 2\frac{M_1}{M_2} + M_1\left[\frac{M_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(1-\frac{c_1^2}{c_{\text{s}}^2}\right)\right] - \frac{M_1^3}{2} \tag{8.65}$$

正如刚才两个不同情形所述，这个式子也需要进行估算。冲击波跳跃关系 $\rho_2=\rho_1 M_1/M_2$ 和 $p_1=\rho_1 c_1^2$ 总归成立。低通量下膨胀性热阵面得以发展，对于一般低 Z 固体，这种通量相应的辐射温度为数百电子伏特。当式(8.65)左部大约等于 6 时，扩散性热阵面发生向压缩性热阵面的转变。

习题 8.10

假定烧蚀体材料为铍(Be),密度 $\rho_0=1.8\text{g/cm}^3$,估算膨胀性热阵面情形中烧蚀压力 p_1 与辐射温度 T_w 的函数关系(100eV ~ 300eV),并把所得结果与式(8.58)的计算值进行比较。

第 9 章中还要讨论 X 射线烧蚀在惯性约束聚变中的应用。这里重要的是从式(8.58)看出,使用激光加热黑腔就可以方便地得到量级达到 10TPa 的压力。虽然这时黑腔靶的结构更加复杂,但与那些采用匀滑激光束的实验情形不同,这里得到的辐射场是本质上均匀的。因此,对于需要高度均匀辐照的任何实验来说,黑腔是一种值得考虑的选择。

8.2.4　与黑腔有关的其他问题

黑腔除了自身的复杂性之外,还有一些影响其有效应用于某些实验的其他限制。下面讨论其中的问题:**等离子体充填**、等离子体压力脉冲和非对称性。等离子体充填不太容易理解,因为任何黑腔几乎立刻就被某种密度的等离子体所注满。此外,等离子体充填关系到一些条件的形成,即 8.1.4 节论述的激光 - 等离子体不稳定性能否激发的条件。尤其是受激拉曼散射,在体积较大、电子密度接近 $0.1n_c$ 的等离子体中可能变得十分强烈。为此,人们关注从黑腔壁向腔内流动的欠稠密等离子体。具体说来,欠稠密等离子体的动力学行为相当复杂。黑腔中有些激光光斑处的电子温度 2keV 以上(见式(8.50)),有些离开已被辐射加热腔壁的等离子体具有与 T_w 差不多的温度。此外,电子能够在这些区域之间传递热量,因而有些地方的温度也许上升,另外一些地方则可能降低。一方面看来磁场可以限制电子热输运,同时另一方面碰撞又可能限制磁场的这种作用。为了避免等离子体充填黑腔所引起的困难,可能需要进行比较困难而复杂的计算机数值模拟研究。下面讨论等离子体充填的若干问题,更加深入细致的探讨可以参考 Lindl 的著作。

从一些简单计算中可以获得对于等离子体充填主要方面的定性理解。被激光加热的光斑以及被 X 射线加热的腔壁,两者对于等离子体充填黑腔都有贡献。X 射线对腔壁的加热需要经过一定发展时间,因此早期阶段中激光加热的光斑对充填起主要作用。基于式(8.50),激光产生的欠稠密等离子体的声速等于 $\sqrt{ZT_e/M}$,大约为 $3\times10^7\text{cm/s}$,黑腔半径小于 1mm,因此等离子体充填的时间尺度小于 3ns。这正是红外激光辐照黑腔的状况。一旦黑腔壁被充分加热,腔壁等离子体的声速下降约 $\sqrt{10}$ 倍。但是由于此时等离子体以高得多的初始密度开始膨胀,只需要短得多的时间就可对整个黑腔产生影响。把这种膨胀描述为等温稀疏过程(见 4.2.1 节),其密度分布 $n=n_s\mathrm{e}^{-x/c_st}$,这里 n_s 是接近固体物质状态的电子密度,可取 $10^{24}/\text{cm}^3$,c_s 可由式(8.59)计算。经过多少时间,从腔壁的各个面元处运动到黑腔中心的等离子体的密度可以达到 $0.001n_c$,该密度值大约是固体物质电子密度的 e^{-14} 倍。这时黑腔中很大体积内的电子密度已接近 $0.1n_c$,该密度值大约是固体物质电子密度的 e^{-8} 倍。对于半径为 R_{mm}(单位为 mm)的黑腔,可以得到等离子体充填时间为

$$t=0.61\frac{R_{\text{mm}}}{\sqrt{T_w(100\text{eV})}}\ (\text{ns}) \tag{8.66}$$

对于典型的黑腔参数，上式给出的充填时间在 2ns 以下。

第二个模型与可见及紫外谱段激光辐照的黑腔更有关系。存在着等离子体堵住黑腔壁面激光束进入孔的潜在可能。不过这些谱段激光的加热作用以及与它们结合的有质动力，两者都倾向于阻止这种**堵孔现象**。

使用黑腔的典型实验至少需要持续若干纳秒，所以毫不奇怪等离子体充填可能成为重要问题。激光－等离子体不稳定性引起的高能电子和激光散射，两者都是高能量密度实验尤其是激光聚变实验十分关心的方面，第 9 章中还要作进一步讨论。应当指出，在用红外激光进行的实验中这些问题更严重得多，因为在同样辐照度下此时的等离子体具有较高振荡速度和较低的碰撞效应。事实上，等离子充填引起的后果之一——热电子的产生，在早期激光聚变实验中是十分严重而且未知的问题。在参加研究的科学家发现和证实等离子体充填效应之前，美国的激光聚变研究计划几乎要被取消。一些观察者（包括本书作者）认为这个问题并不是很快就发现的，因为虽然已经知道存在引起这种问题的现象，但是并没有把它们列入到用来模拟实验的早期编码中去，而且人们很容易把这类局限性很大的计算机模拟结果误认为是真实情况的反映。激光聚变和任何其他学科的学生，应当对此尤为警觉。

值得讨论的第二类现象是等离子体压力的发展。如上面所述那样，平面等温稀疏波中粒子速度的分布为 $v=c_s\zeta$，这里 $\zeta=x/c_st$，质量密度的分布为 $\rho=\rho_0 e^{-\zeta}$。因此，稀疏波中等离子体的动压力 ρv^2 为 $\rho_0c_s^2\zeta^2e^{-\zeta}$。当 $\zeta\approx2$，此动压力的最大值约为 $\rho_0c_s^2/2$。金腔壁处形成的等离子的质量密度 $\rho_0\approx19\text{g/cm}^3$，$c_s$ 按照式(8.59)计算，得到的最大动压力为

$$P_{\text{ram}}\approx\rho_0c_s^2/2=130T_w(\text{TPa})\tag{8.67}$$

式中 T_w 单位为 100eV。

这是相当巨大的压力，但若黑腔壁保温时间足够长，上述数据还是对等离子体压力的低估，因为黑腔中心的压力还会因会聚效应更加增高。从 $\zeta\approx2$ 的腔壁点到达黑腔中心所需的名义时间 $t_{\text{maxp}}=R/(2c_s)$，即

$$t_{\text{maxp}}=8.4R_{\text{mm}}\sqrt{T_w}\ (\text{ns})\tag{8.68}$$

式中 T_w 单位为 100eV。

这个时间通常约为几纳秒，但是对于半径小于 1mm 的黑腔，加热脉冲的持续时间一般为 1ns 左右。因此，金等离子体会聚时真正达到的压力将低于式(8.67)的计算值。尽管如此，与受黑腔辐照的实验组件表面的烧蚀压力相比，这个压力仍然相当大。在这样的时间尺度下，真实黑腔中将发生什么现象？如 Hurricane 等人阐明的那样，这时将有一个巨大的压力脉冲从黑腔中心向外传播。这意味着使用 X 射线烧蚀驱动实验组件的任何实验，在烧蚀作用最终被接踵而来的压力脉冲盖过之前，只有一段有限的可资利用的时间，而且这种情况对企图考察流体动力学现象长期演化行为的实验设计造成了明显的限制。

习题 8.11

假设半径 1mm 的黑腔在 200eV 温度之下被加热了 1ns，试估算当等离子体从金腔壁膨胀运动到达对称轴线时黑腔中心处产生的压力（注意本题不是式(8.67)的应用，而是要求

读者思考在加热脉冲期间形成的稀疏过程）。

第 9 章中将十分详细讨论对于黑腔的最后一个限制，即实际实验中并不形成各向同性的辐照环境。使用本节的方程组，就能在几乎任何实验的设计中使比值（A_L/A_w）最大化。问题在于，在腔内实验组件表面给定点处可以接收到从激光光斑发出的较高的 X 射线发射量（即看到一个较热的环境），但是几乎见不到来自激光进入孔的 X 射线发射（即看到一个较冷的环境）。当沿着激光靶丸（或者平面靶件）表面移动，各点接收到的 X 射线通量有着相当大的变动，从而在受辐照物体表面可能产生不对称的压力分布。结果导致，有效的设计需要使用关于**视角因子**的计算编码，它可以在靶上每一点所张的立体角内把指定的 X 射线源分布积分起来，定性地评估辐照的均匀性。

8.3　Z 箍缩与相关的实验方法

图 8.15 表示在软 X 射线谱段范围观察到的近太阳表面处的一个环圈，因为该处的等离子体比周围等离子体热得多。对这里等离子体的加热有贡献的一个因素是箍缩力，这种力具有驱使通过电流的任何等离子体通道向内收缩的惊人作用。人们将会看到，箍缩力其实是洛伦兹力 $J\times B$ 的一种结果。由于大多数天体物理系统包含磁场，天体物质运动引起电流流动，许多场合下箍缩力就会在一定程度上出现。实验方面，近代脉冲功率装置已能够在负载上产生幅度大于 1MV、持续时间大于 100ns 的脉冲电压，以后将说明这已足以形成高能量密度的状况。下面首先讨论称为 Z 箍缩这方面的传统技术途径，后面还将讨论同类型脉冲功率系统的另一种应用——磁驱动平面飞片。

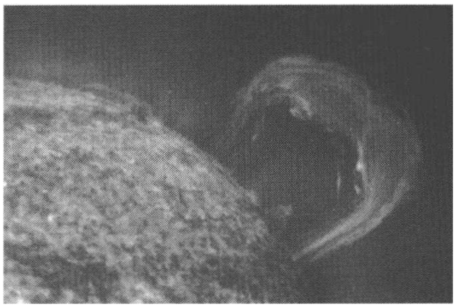


图 8.15　太阳表面附近由磁场维持定位的热等离子体环圈

（引自 SOHO－EIT consortium，ESA，NASA）

8.3.1　应用于高能量密度物理研究的 Z 箍缩技术

安培曾经展示过两根通过电流的导线受到相互的作用力。简短地回顾这个问题，以便为更深入的讨论打下基础。设想有一根无限长的流过恒定电流的直导线，在以导线轴线为中心的圆面积上应用安培定律并积分，再使用斯托克斯定理，在 SI 单位制下得出

$$\mu_0 I_1 = \mu_0 \int_{A_1} \boldsymbol{J}_1 \cdot \hat{n}\mathrm{d}A = \oint_{l_1} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r_1 B_1 \tag{8.69}$$

式中 $\hat{n}$ 为垂直于积分面元的单位法向矢量；下标 1 表示与导线有关的物理量。

根据对称性及不存在磁单极子的假设可以证明，$\boldsymbol{B}_1$ 是纯角向矢量，其方向由右手法则

给定，因为式(8.69)中的线积分按约定是从 $\hat{n}$ 所指方向看去为逆时针的方向。如果另有一根平行的细导线(下标为2)，与前述导线相距为 R，则此细导线单位长度上受到来自前述导线产生磁场的电磁力为

$$\boldsymbol{F}_2 = \int_{A_2}(\boldsymbol{J}_2 \times \boldsymbol{B}_1)\mathrm{d}A = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R}(-\hat{r}_{12}) \tag{8.70}$$

式中 $\hat{r}_{12}$ 为前述导线至细导线的单位方向矢量，负号表示对细导线的吸引力(当 I_1、I_2 同号，即 $J_1 \parallel J_2$ 的情形)，读者可用右手法则校验得知。两个平行电流相互吸引是普遍的规律，这意味着有电流流过的任何可压缩介质都趋于收缩变形。

人们利用这个事实创造了一类称为 Z 箍缩的实验装置，即采用轴向电流(在笛卡儿直角坐标系中设为 z 轴方向)流经导体形成一种自箍缩力，目的是得到高温等离子体，磁约束聚变的一些早期研究途径就是基于这个原理。可以看出，这里存在着一种平衡，即流经等离子体的电流产生的向内箍缩力与等离子体本身向外的膨胀压力相平衡。遗憾的是这种平衡是不稳定的，如果这两种力的平衡是稳定的，人们就可以在 20 世纪 60 年代就建成聚变发电厂了。大多数近代的 Z 箍缩装置属于快 Z 箍缩类型，其中快速上升的电流引起轴对称的物质组件迅速内聚收缩(内爆)。内爆运动的物质被加速趋于轴线，发生自相碰撞而停滞下来(滞止)，使内爆运动的动能转变成热能。通过对运动中加热和加速的调节，可以实现动能高效转化为热能的 Z 箍缩内爆。下面将看出，对于高能量密度物理有意义的 Z 箍缩内爆确实是很剧烈的，非常迅速的内爆箍缩可以避免能够摧毁平衡箍缩的增长较慢的 MHD 不稳定性。但是，内爆也使得第 5 章中论述的瑞利 - 泰勒不稳定性得到瞬间增长，从而对 Z 箍缩内爆的适用范围施加了某些限制。下面讨论快速 Z 箍缩内爆的一些基本问题，关于 Z 箍缩物理学更广泛的论述，可以参阅有关的专业书籍——Liberman、De Groot、Toor 和 Spielman 撰写的“Physics of High - Density Z - Pinch Plasmas”(高密度 Z 箍缩等离子体物理学)，以及 Ryutov、Derzon 和 Matzen 在期刊“Reviews of Modern Physics”上发表的综述论文。

考虑 z 方向均匀电流密度流过的细长圆柱壳的自洽运动行为，给定初始电流(面)密度为半径为 r 的如下函数：

$$\boldsymbol{J} = \begin{cases} \boldsymbol{J}_0, & r_1 < r < r_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{8.71}$$

这样的电流不会产生 z 方向的磁场。根据此点以及不存在磁单极子的假定，就可证明这样电流产生的磁场也没有径向分量。把安培定律应用于该圆柱壳内部，即可证明壳体内部没有角向磁场，因此壳体内部 $\boldsymbol{B}=0$。在壳壁内部($r_1<r<r_2$)应用以 SI 单位制表示的安培定律，得出

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 \int \boldsymbol{J}\cdot \hat{n}\mathrm{d}A = \mu_0 J_0 \pi (r^2 - r_1^2) \approx \mu_0 J_0 \pi (2r\delta r) \tag{8.72}$$

式中 $\delta r = r - r_1$。

把流体的加速度与向内的力密度 $\mathscr{F}$ 关联起来的运动方程为

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mathscr{F} = \boldsymbol{J}\times \boldsymbol{B} = -\hat{r}\frac{\mu_0 J_0^2}{2}\frac{r^2 - r_1^2}{r} \approx -\hat{r}\mu_0 J_0^2 \delta r \tag{8.73}$$

式中 $\hat{r}$ 为半径方向的单位矢量。

根据式(8.73)得出关于壳壁流体微元径向加速度的运动方程为

$$\rho\ddot{r} = -\frac{\mu_0 J_0^2}{2}\frac{r^2 - r_1^2}{r} \approx -\mu_0 J_0^2 \delta r \tag{8.74}$$

式中 ρ 为壳体材料的质量密度。

把式(8.74)在壳体横截面上积分,可以得到单位长度壳体、单位角度上受到的总的内向作用力。再假设运动中壳体厚度可以忽略,其特征半径 r 满足的近似运动方程为

$$\bar{m}\ddot{r} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} \tag{8.75}$$

式中 I 为总电流;$\bar{m}$ 为单位长度圆柱壳的质量,它们都以 SI 单位制表示。

对于恒定电流,把上式积分可得

$$u_r^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \bar{m}} 2\ln\frac{r_0}{r}\ (\text{SI 单位制}) = \frac{I^2}{c^2 \bar{m}} 2\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)(\text{cgs 单位制}) = u_{\text{Alf}}^2 2\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{8.76}$$

式中 u_{Alf} 为箍缩等离子体壳体外表面处初始的阿尔芬波速度(本书不关注阿尔芬波,以后也不用这个概念。读者可以参阅等离子体物理教科书)。积分式(8.76),得到壳体内爆到达半径 r 处所需时间为

$$t_{\text{imp}} = \frac{r_0}{u_{\text{Alf}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\ln(r_0/r)}\right) \tag{8.77}$$

式中 erf(x) 为误差函数。

在实用单位制下有

$$u_{\text{Alf}} = 3.3 \times 10^6 I_{\text{MA}}/\sqrt{\bar{m}}\ (\text{cm/s}) \tag{8.78}$$

式中 I_{MA} 是以兆安培(MA)为单位的总电流;$\bar{m}$ 的单位为 mg/cm。

图 8.16 画出了式(8.76)和式(8.77)的函数性态。可以看出,电流开始时壳体向内缓慢运动,只是在内爆后期其加速度才大大提高。真实的 Z 箍缩内爆中箍缩电流逐渐增大,运动进行得更加缓慢。根据边界条件 $r=0$;$u_r=0$,运动方程式(8.75)反映了一个重要现象,即在到达圆柱壳轴线之前箍缩物质的内爆运动一定会停滞下来,从而在该轴线处聚积。

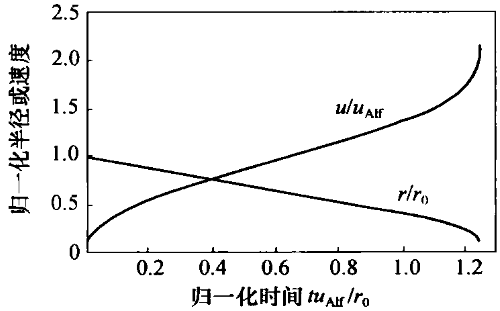


图 8.16　恒定电流 Z 箍缩内爆等离子体运动性态

无量纲半径 r/r_0、归一化内爆速度 u/u_{Alf} 与以 r_0/u_{Alf} 作归一化的时间的关系。

用最简单的概念来说，箍缩物质向内加速，动能增加，当它们对称到达并滞止于轴线处时，则受到冲击和压缩使其动能转变为热能，然后再转换为辐射，并转变为向外膨胀的等离子体。

收缩比 r_0/r 出现于上面几个式子中，估算中可以先设定内爆物质的一个滞止半径 r_s，以便确定最大收缩比。例如，采用物质密度为 $10g/cm^3$ 的金属圆柱壳，初始质量为 1mg/cm，经过内爆并在轴线处受冲击的物质密度达到 $40g/cm^3$（这些都是虚拟的数据），则内爆箍缩的最小半径约为 30μm。如果圆柱壳的初始半径为 1cm，则最大收缩比 $r_0/r_s \approx 300$。真实情况下，不稳定性将限制内爆收缩可以达到的程度，通常内爆终止于 $r_0/r_s \approx 10 \sim 20$。虽然这个范围内仍有 2 倍左右的差别，其实对于内爆最终速度的影响很小，因为收缩比只出现于对数项中。事实上，即使把收缩比增大到 300 左右，u_r 的增加仍小于 50%。20 世纪 50 年代的箍缩技术研究关注于形成可能发生聚变的高密度物质，高收缩比对于这种概念是最重要的。Z 箍缩技术对于高能量密度物理的近代应用，首先更加依赖于能量（及其有效地转换为辐射），对于收缩比的要求并不敏感。

回到式(8.77)表示的简单模型，设 $r_0/r_s = 10$，可以计算恰好停滞时箍缩物质的动能，令人惊奇的是这个能量只与箍缩电流有关，即有

$$\text{K. E.}(\text{动能}) = 2.3\,\bar{m}u_{\text{Alf}}^2 = 2.3\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}(\text{SI 单位制}) = 2.3\frac{I^2}{c^2}(\text{cgs 单位制}) = 2.3 I_{\text{MA}}^2(\text{kJ/cm}) \tag{8.79}$$

如果箍缩电流为 20MA（目前已能做到），上述动能将超过 1MJ/cm。箍缩物质的总能量可能高于其动能，因为该物质已被焦耳热（即 $J \cdot E$）所加热，而且被 $p\mathrm{d}V$ 功所压缩，但是在内爆结束之前还可能因辐射而损失能量。假设已被加热的物质对称地滞止于轴线处，所有剩余的能量瞬间都转变为热能。滞止时物质的能量起初存在于离子之中（因为离子携带着动能），然后通过碰撞转移至电子。一旦电子与离子的温度均衡之后，式(8.79)的动能产生的加热将给出电子温度为

$$T_{\text{eV}} = \frac{\text{K. E.} \times A m_p}{k_B \bar{m}(Z+1)} = 20\frac{I_{\text{MA}}^2}{\bar{m}}\frac{A}{Z+1}(\text{eV}) \tag{8.80}$$

式中 $\bar{m}$ 的单位为 mg/cm。

推导上式时，本来还可以引入 Z 对于 T_e 的依赖关系（见第 3 章）。稠密物质典型的滞止温度在 1keV 以上，是十分强烈的辐射体。通过调整单位长度的壳体质量就可以调节滞止温度，寻求适合于研究目的的最佳参数值。

如上所述，真实箍缩实验的电流不是恒定的，实际上往往是时间的正弦波形，从而导致内爆的发展要比图 8.16 所示的更加平缓。但是，当以更加真实的电流 - 时间波形作为输入时，箍缩运动方程只有很少几种解析解。使问题变得更加复杂的是，箍缩电流基本上与箍缩及其动力学过程有关。脉冲功率装置向负载提供与时间有关的电压脉冲，这里的负载是箍缩组件及其支撑结构，对于流经箍缩组件电流的主要限制是其自身的电感量，因此更准确的箍缩过程数值模拟需要指定施加于箍缩组件的与时间有关的电压波形，通过计算箍缩组件自身即时的电感量再求解电路方程，并且与类似于式(8.75)的箍缩内爆运动方程联立求

解，就可以确定箍缩电流。这种电路模拟计算结果之一就是，近年来箍缩时间变得越来越短，并且箍缩组件的高度通常只是其初始半径的几分之一。通过箍缩组件高度的减小，可以降低其电感量并提高负载电流。

上述电路模拟计算可以考虑箍缩内爆的时间。真实的 Z 箍缩实验中，内爆时间必须与脉冲功率系统产生的电压脉冲持续时间相匹配。使用式(8.77)和式(8.78)，当初始半径为数厘米，单位长度质量为 5mg/cm 的若干倍，电流幅度 3MA ~ 10MA，可以看出内爆时间大概在 100ns 量级之内。实际上，这种推理显然应当倒过来做，即给定向负载提供具有一定持续时间的电压脉冲参数，然后选择 Z 箍缩组件的初始质量和半径，从而得到在计算给定的电流之下具有同样持续时间的内爆过程性态。下面具体探讨这个问题。

高度 H、半径 r 的载流圆柱壳，其外围设置更大半径 r_{ret} 的同轴回流壳，容易求得它们之间的电感量为

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} H \ln \frac{r_{\text{ret}}}{r} \tag{8.81}$$

在持续时间 τ、幅度 V 的脉冲电压驱动下，求解电路方程 $V = L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \approx LI/\tau$，其中 $\tau = t_{\text{imp}}$ 可由式(8.77)得到，从而解出所需箍缩电流幅值为

$$I_{\text{MA}} = 10^{-4}\sqrt{\frac{V_{\text{MV}}\sqrt{\bar{m}}}{\sqrt{2}\mu_0^{3/2}}\,\frac{r_0}{H}\,\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{\ln(r_0/r_s)})}{\ln(r_{\text{ret}}/r_0)}} = 1.47(\bar{m})^{1/4}\sqrt{V_{\text{MV}}\frac{r_0}{H}} \tag{8.82}$$

式中 r_0、H 必须采用同样单位；第二个等式是假设 $r_{\text{ret}}/r_0 = 10$，$r_0/r_s = 20$ 而得到的，这两个比数的确切值对所得结果影响不大。我们看到，幅度为若干兆安的电流比较容易实现。从式(8.82)看来，似乎只要增加负载质量 $\bar{m}$（单位为 mg/cm）就能提高电流，但若深入考察式(8.77)可知，为了保持内爆时间接近于加载电压脉冲宽度 τ，必须保持比值 $I_{\text{MA}}/(r_0\sqrt{\bar{m}})$ 不变。在这样的约束下，式(8.82)意味着比值 $V_{\text{MV}}/(r_0\sqrt{\bar{m}})$ 也必须保持不变。在这两种条件的共同约束下，并对于给定的电压幅度 V，只有降低 H 的同时以同样的倍数增大 $r_0\sqrt{\bar{m}}$，才能增大电流幅度 I_{MA}。因此，可以做到只提高 I_{MA} 从而按比例增大内爆物质的动能，因为可以提高 V_{MV} 或者降低 H 的同时 $r_0\sqrt{\bar{m}}$ 应做相应改变，以维持内爆时间 τ 不变。从这些关系式中还可以看出，如果希望按照式(8.80)减小 $\bar{m}$ 从而提高被加热物质的温度，若还要保持 t_{imp} 与 τ 的良好匹配，则需要按照 $\bar{m}$ 减小的比例把 r_0^2 增大。至于与上述想法相关的一些实际限制，需要研制能通过强电流的均匀圆柱壳体去解决。

当前，与高能密度物理最相关的 Z 箍缩应用，主要是产生辐射（Ryutov 等人的评述论文还讨论了一些其他的可能应用）。首先的应用是利用 Z 箍缩实验形成由灼热稠密物体构成的黑体辐射源，产生最大可能的软 X 射线能量。为了这种目的，需要使高 Z 物质（通常是钨）的箍缩组件内爆，在滞止之后其等离子体发射辐射并发生膨胀。对黑体辐射功率 σT^4 与膨胀等离子体含有功率 $(\rho/Am_p)k_BTc_s$ 的比值做如下估计：

$$\frac{\sigma T^4}{(Z\rho/Am_p)k_B Tc_s} = 35\frac{T_{keV}^{5/2}}{\rho}\left(\frac{A}{Z}\right)^{3/2} \tag{8.83}$$

式中 T_{keV}为以 keV 为单位的温度。

上式表明，当温度量级在 1keV 以上时，辐射具有很大的优势地位，这样的 Z 箍缩辐射源通常只是在类似于 8.2 节中讨论的高 Z 黑腔中才能形成。这种黑腔约束住 Z 箍缩辐射，并能够把这种高温热辐射环境维持一段时间。这种黑腔已用于辐照固定于腔壁上的实验组件，以研究烧蚀驱动现象或辐射流动，或用于辐照悬挂于腔内的实验组件，以研究辐射输运或光致电离效应。这种黑腔还可用于辐照靶丸，进行惯性约束聚变研究。

第二种与辐射有关的 Z 箍缩应用是产生 X 射线的线谱辐射。为此，需要使用特别材料制成的细金属丝（如钛丝），其 Kα X 射线光子能量为若干千电子伏特。此时辐射平衡的计算不像黑体辐射情形那样容易，而且要求转换效率高到足以产生具有实际应用价值的 X 射线产额。

为了使得停滞期间 Z 箍缩产生的辐射功率最大化，必须先使得箍缩体的滞止功率 P_s 最大化。由于内爆过程中等离子体的膨胀，预期滞止的持续时间在尺度上可用内爆时间衡量，在设计中已假定这个内爆时间相等于电压脉冲的持续时间 τ。由于箍缩的动能正比于 I_{MA}^2，因此有

$$P_s \propto \frac{HI_{MA}^2}{\tau} \propto \frac{HI_{MA}V_{MV}}{L} \propto \frac{V_{MV}^{3/2}(\sqrt{\bar{m}}r_0)^{1/2}}{H^{1/2}} \propto \frac{V_{MV}^2}{H} \tag{8.84}$$

上式表明，在脉冲功率电参数不变的条件下，只有降低箍缩高度 H 才能提高滞止功率 P_s，但是这种做法存在一定限制，因为箍缩组件两端的内爆运动受到电极牵制而减缓，高度 H 不能过低。尽管如此，在 21 世纪初前后在圣地亚实验室的 Z 机器上，进行了高度 H 小于 1cm 的箍缩内爆实验，得到了良好结果。

习题 8.12

人们用不同实验可以变更 Z 箍缩负载的性质，还可以在较长时间尺度范围内调整脉冲功率装置的参数。这些装置通常用“伏·秒数”来表征，即按照 $V\tau = \text{const}$ 的方式运行。首先考虑并解释，为什么“伏·秒数”是表征脉冲功率装置的合理方法？其次试用 8.3.1 节中论述的标度关系，讨论采用 $V\tau = \text{const}$ 的装置时如何优化箍缩物质的滞止功率。

很多年来，Z 箍缩装置实际产生 X 射线辐射的能力远远低于人们基于上述标度关系作出的预期。20 世纪 90 年代中期随着 Z 箍缩技术的发展，这种情况有了巨大变化。这种技术使用几百根细金属丝（细丝直径通常约为 10μm）沿圆周纵向平行排列构成的丝阵负载。相比之下，以前所有各种负载构形的性能则差得多（包括由若干根粗金属丝构成的丝阵，固态导体圆柱壳（称为**套筒**）和各种使用气体介质的结构等）。人们倾向于如下的推测：采用许多根细丝的丝阵组件最终汇合形成了相像于简单建模中的均匀等离子体壳筒结构，而以前的各种负载结构则形成不大均匀的等离子体壳体，不能有效地滞止于轴线附近的较小体积内。细丝阵组件结构的成功，导致这类 Z 箍缩装置的 X 射线产额大幅度提高。

所观察到的采用许多根细丝阵的箍缩内爆时间，由滞止时产生的 X 射线的计时来确定，通常与均匀等离子体壳筒模型预计的时间很好相符。因此，有些研究者认为这种丝阵中

各根细丝形成的等离子体细柱膨胀并相互融合，构成了均匀的等离子体壳筒。对于这种看法的进一步支持来自磁流体力学（MHD）数值模拟。这种模拟计算能够再现实验的滞止时间和滞止等离子体的尺寸，虽然在计算中必须对瑞利－泰勒不稳定性预设非常大的初始扰动。然而问题并非如此简单，论证将十分复杂。多根细丝阵的运动形成相对均匀的内爆等离子体壳筒有两种可能的途径。最简单的想法是，细丝发生电爆炸成为细长的等离子体柱，如果各细丝之间相当靠近，则这些等离子体柱将相互连接，使得电流流动在角向均匀分布。但是，实验观察表明细丝并不一开始就发生电爆炸，尤其是在Z箍缩实验中表现良好的铝丝和钨丝。

放电开始时细丝不发生体烧蚀，原因在于电流流过细丝表面，加热十分强烈，使得所产生的等离子体很快向外膨胀流动，离开原来的细丝表面。这样就形成了等离子体和磁场融合的结构，但是细丝的固态芯部仍然残留。此时磁场大致的性态比较复杂，因为它不再冻结于电流线上。根据式（2.72）和图2.2可知，在几分之一毫米距离内以及不足几电子伏特的电子温度下，磁扩散时间约为1ns量级，确实远小于量级为100ns的内爆时间。初始时细丝表面附近处磁场最强，然后向外扩散进入膨胀的等离子体中，再在其中相互融合形成更加对称的结构。磁场的扩散对应于电流的扩散，因此等离子体经受电磁力 $J \times B$ 而向内加速。一般情况下，在内爆最后阶段之前，似乎大约细丝质量的50%已成为向内加速的前驱等离子体。这样的等离子体携有某个磁场，更大部分磁场可能已扩散于等离子体的内部。

本书编写时人们还不清楚，细丝残留的芯部将承受多大的力，以及这些丝芯是否也处于运动之中？一方面如果丝芯逐渐变细以至于发生电爆炸变成为等离子体，则它们很可能发生运动；另一方面有些实验证据表明，一旦丝芯自身出现间隙致使电流间断（这很可能是细丝自身的磁流体力学不稳定性导致结果），丝芯的烧蚀立即停止。此时该处不再有等离子体源继续维持丝芯边缘区域的电流和磁场，各根丝芯表面等离子体的外沿向里面内爆，并席卷丝阵内部所有残余质量一起运动，形成雪耙式内爆。也许存在更深层的基本原因，但是目前使人感到惊讶和意外的是，这样极其复杂过程的数值模拟得出的内爆时间竟然与均匀等离子体壳筒模型的简单结果基本相同。无论计算中的细节如何，重要的结论是：金属细丝阵内爆是高能量密度实验可使用的有效X射线辐射源。

8.3.2 动力黑腔

人们利用内爆会聚的几何构形产生强辐射的环境，这种器件称为动力黑腔。Z箍缩研究中利用高 Z 物质细丝构成的圆柱形阵列内爆，冲击压缩中心部位处直径几毫米的低密度物质圆柱芯靶，形成动力黑腔。在高 Z 气体（如氙气）中由激光驱动的圆柱形或球形内爆，也可以形成动力黑腔。本节讨论在怎样的基本条件下可以形成动力黑腔。动力黑腔情形中，依靠辐射壳壁的内爆运动驱动辐射冲击波。下面初步分析动力黑腔的性态和潜力，目的不在于得到符合实际的结果，而是了解这条途径是否可能有益于今后的探索。这是人们经常在旧信封背面做些涂鸦式粗略计算的例子，为的是看看有哪些可能性值得深入考察。

为了加热波前的整个空腔体积，上述冲击波必须是辐射的，而且上游介质一定不能过于不透明，在这些考虑下，人们选择了驱动辐射冲击波穿过低密度介质的途径。但是该介质的密度又不能过低，因为它必须具有足够的光学深度，才能把冲击波后的热能转换为辐射。内

爆器壁提供必要的压力，对受冲击物质压缩做 pdV 功。为简单起见，假定当驱动单个冲击波穿越受冲击物质使其压缩时，冲击波的速度保持不变，还要假定所有来自冲击波的热能被包容在一个固定的体积内。从而可以假设，黑腔中部未受冲击的物质被围在一个牢固的反射十分良好的腔壁内部。从前面关于黑腔的讨论可知，这是对于高 Z 物质腔壁的合理近似。适当的不透明度与对辐射约束的组合，保障了辐射场与受冲击物质将平衡于相同的温度。

假定冲击波是定常的强冲击波，其入射机械能的50%转变为热能（在实验室参考系中考察）。冲击波刚到达对称轴线时，机械能仍然包含于运动物质之中，热能可分为物质的与辐射的两个部分。假设低密度物质的压缩倍数为$(\gamma+1)/(\gamma-1)$，可以得出

$$\frac{4\sigma T^4}{c}+\frac{\rho_0 RT}{\gamma-1}=0.5\frac{\rho_0 u_s^2}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{8.85}$$

式中 ρ_0 为低密度物质的初始密度；u_s 为冲击波速度，ρ 为冲击波后的物质密度，$\rho=\rho_0(\gamma+1)/(\gamma-1)$；$T$ 为受冲击物质与辐射场的平衡温度。

如果辐照置于动力黑腔内的一个物体，在力学撞击开始影响该物体之前，T 也就是它所能到达的最高温度。图 8.17 中以黑实线表示这个初始温度，这里考虑了两种物质密度，并且 $A\approx Z+1$，$\gamma=4/3$。在相当低的速度下，辐射能量密度可以忽略不计，而且如第 4 章所述温度与 u_s^2 成正比。当 u_s 增大时，温度曲线偏离 u_s^2 的标度关系，但在图 8.17 所示范围内所考察的系统始终没有成为辐射主导的。但可以看出，速度数百千米每秒的冲击波就可以产生数百电子伏特的温度。

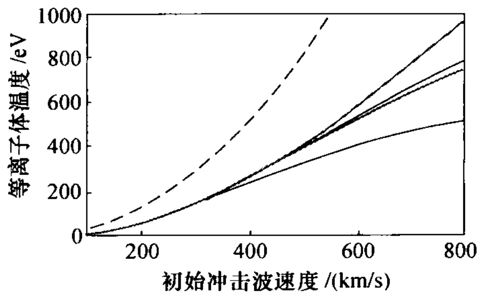


图 8.17　简单动力黑腔模型计算得到的温度

各种情形的温度：初始冲击波（黑实线，位于相应灰线下方），初始冲击波后的滞止物质（灰实线），二次冲击波及相应的滞止（虚线）。图中分开的两组曲线表示密度不同的低密度物质，上下分别为 $\rho=0.01\,\mathrm{g/cm^3}$、$\rho=0.001\,\mathrm{g/cm^3}$。

另一方面，动力黑腔可以通过其圆柱形结构的端部或球形结构的出口提供定向输出的辐射源。这种情形中在冲击波演化的下一阶段，波后向内运动的物质将在黑腔中心滞止，把它们的机械能转变为热能，体积减小，密度再次增加一个$(\gamma+1)/(\gamma-1)$倍数。假定在此期间，内聚运动的反射腔壁所起的作用是维持被压缩物质外表面处的压力。这个过程结束时，能量平衡关系给出

$$\frac{4\sigma T^4}{c}+\frac{\rho_0 RT}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2=\frac{\rho_0 u_s^2}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 \tag{8.86}$$

此式所计算的滞止温度在图 8.17 中以灰线表示。为了从这一阶段得到较大的温度增益，必

须使用相当高的入射冲击波速度。滞止阶段之后由于中心反射的冲击波的再反射，内爆腔壁可能朝低密度物质中发出另一个冲击波。假设腔壁速度和低密度物质多方指数 γ 保持原来的值，所导致的第二个向内传播的冲击波和随后的滞止将使能量加倍，并使已受压缩物质的体积压缩再增加一个强冲击极限压缩度平方的因子，即有

$$\frac{4\sigma T^4}{c}+\frac{\rho_0 RT}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^4=\frac{\rho_0 u_s^2}{2}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^4 \tag{8.87}$$

上式计算的温度在图 8.17 中用虚线表示。如果在这以前的内爆过程中有能量从系统中散逸出去，则上面两个温度计算值显然都是高估的。

图 8.17 的计算中假设 $\gamma=4/3$，如果辐射的能含量不重要，则该图中不同物质密度的两组曲线将发生重叠。甚至当辐射的能含量相对较低时，辐射通量仍可能主导着辐射输运。不难达到 300km/s 的内爆速度，可以看出，在这样的内爆速度下按上面方法估算的第一次冲击波的温度为 150eV，第二次冲击波的温度为 300eV，达到这样的高温肯定是十分有意义的。本书编写期间，人们正在探讨动力黑腔用作为惯性约束聚变驱动器的可能性。放眼未来，Z 箍缩实验中不稳定性和高能电子预热问题对于动力黑腔的限制将远低于激光惯性约束聚变的情形，因此动力黑腔也许能够提供一条使辐射温度达到 1keV 以上的途径。这种途径可以是通过冲击波的来回反射（回射），也可以是依靠非常高的内爆速度。

习题 8.13

思考内爆的辐射冲击波能做些什么的另一种方法是，设想在一个光学薄的系统中驱动一个会聚冲击波。假定这样的冲击波已达到定常状态，画出辐射通量及其特征温度与冲击波速度的函数关系曲线，物质密度分别为 0.01g/cm^3、0.1g/cm^3。把所得结果与以前计算结果进行比较和评述。

8.3.3　磁驱动高速平面飞片

作为驱动 Z 箍缩的脉冲功率技术的最后一个应用，考察如何把这样的电流和电压源应用于物质的等熵压缩和（或）加速飞片样品的实验。传统的 Z 箍缩实验基于这样的事实，即在 8.3 节开始已提到的靠得很近的流过平行电流的两个导体相互吸引，让平行电流通过小质量的金属丝阵，就能使其内爆。Z 箍缩实验中必定要使用回流导体，通常设置在半径较大的地方，如前所述回流导体对丝阵内爆几乎没有影响。但是，同样真实的是流过方向相反电流的两个导体互相排斥。如果这两个流过相反方向电流的导体靠得非常近，就会形成很大的使它们分离的排斥力；如果其中一个导体质量很大，另一个靠近的导体的质量轻得多，则后者将首先被加速向外飞出。这就是此种方法有时称为磁驱动技术的原因。

如果思考上述电流产生的磁场，则可把磁驱动名称的来由看得更加明白。两个平行导体之间产生的磁场与电流方向垂直，并具有右手法则确定的指向。正如前面讨论的 Z 箍缩情形那样，考虑驱动力的产生方法是每个导体都经受洛伦兹力 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$。另一种考虑磁驱动力的方法是，注意到越过导体表面的载流薄层（集肤层）后磁压力下降为零，由此可见磁压力是作用于该导体上的面力。这样的磁场可以达到很强的程度。

习题 8.14

回顾 8.3 节开头部分的推导,设有两个无限宽的平行平面导体,分别流过方向相反的电流,试求它们之间单位面积上的作用力(用磁场强度表达),并讨论这种单位面积上的力如何相当于上述磁场的能量密度。

到此的论述只谈到如何使用很强的磁力去加速物体,这种可能性的另一方面(即进行物质的等熵压缩)也许更有价值。调节负载电流使其幅度随着时间平滑上升,就可以控制上述磁作用力与时间的关系,尤其是可使其较慢地增长,避免在被驱动物质中形成冲击波。观察物质对这种等熵压缩加载的响应,就可提供关于其物态方程的重要见解。此外,通过等熵压缩和烧蚀加速的途径,人们已能发射速度远高于诸如气体炮等传统飞片发射器情形的冷状态平面飞片。本书编写时,磁驱动等熵加速的铝飞片速度已经达到 30 km/s 以上(译注:2010 年圣地亚实验室 ZR 机器上磁驱动平面铝飞片的速度已达到 42km/s 以上)。

第 9 章　惯性约束聚变

第 8 章是本书论述的转折点。在其前面的各章关注于高能量密度物理的物理基础，第 8 章本身则表明如何创建这种高能量密度状况，只有做到此点才可能应用高能量密度系统探求各种实际的目标。本章和下一章更多关注于这些具体的目标。高能量密度研究中一直追求的主要目标，是推进**惯性约束聚变**(Inertial Confinement Fusion, ICF)的发展。

聚变是两个原子核的融合，这将导致一般带有较为可观动能的各种反应产物的产生。核聚变是否释放能量，取决于反应中原子核质量的变化。如果反应产物的总质量小于反应前初始原子核的总质量，差值为 Δm，则该反应释放的净能量为 Δmc^2。正是通过聚变，造成了最轻几个元素以上的所有元素。但并不是所有聚变反应都会释放能量，图 9.1 表示核结合能与相对原子质量的关系曲线。结合能是使原子核解体为其各个组分（质子和中子）所必须投入的能量。结合能正比于组成原子核的质子和中子的总质量与该原子核质量的差数。最稳定的原子核是铁，其相对原子质量为 56。因此，核反应释放能量的途径是，轻于铁的元素发生聚合聚变，重于铁的元素发生裂解裂变。可以看出，一些轻元素具有相对较大的结合能 —— 这就是那些具有封闭核壳层、相应于恒星中所积聚的元素。

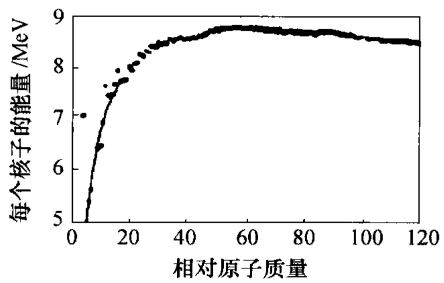


图 9.1　核结合能与相对原子质量 A 的关系曲线（$A = 120$ 之前元素）

恒星的形成开始于非常大量的轻元素的集聚。通过引力压缩，这个集合体的芯部变得极其稠密和灼热，足以引发聚变燃烧。通过聚变，这些轻元素首先转变为较重元素。越重元素的聚变需要越来越高的温度，因为较重的原子核具有较多的核电荷，需要更高的动能去克服库仑排斥力。如太阳之类的小质量恒星，依靠燃烧氢而积聚氦，逐步演变为能够燃烧氦、产生碳和氧组成的芯部，然而这类星球不能再发生进一步的变化。大质量的恒星（大于约 8 倍太阳质量的恒星）能够形成铁以前的所有元素，并在这些转变过程中积聚大量硅元素。铁元素的产生表征这些星球的死亡，因为铁不能再发生核反应释放能量，因而无法维持为抵抗引力收缩所需要的压力。铁芯部最终的坍缩将引发某些类型的超新星爆炸。

关于宇宙中元素的丰度，存在大量问题需要研究。铁及其以下的元素可以由恒星在其寿命期间内生成，最丰富的元素表示天体演化中稳定的终态元素。最终的天体爆炸创造了富含中子和中微子的环境，它们快速作用于已经存在的物质，产生重于铁的元素并改变了较轻元素的布居状况。Arnett 的专著是关于天体演化详细情况的首选参考书。

上述意境自然会引起一些问题。使用高能量密度装置，能够创造高压力和高温度的状

况(即使只是短暂的瞬间)。然而,人们造成的任何质量或能量密集体都受其自身惯性的约束,而不是如天体那样受引力的约束。也就是说,大约在一个声波渡越时间之内,这种密集体就会散开。即便如此,我们能否设法引起轻元素的聚变并释放能量呢?是否能够释放出实际有用的较多能量呢?下面考察这些问题。

首先需要达到怎样的最终的聚变发生条件?然后如何能够创造这样的条件?可能弄错的事情是什么?下面的考察方法是使用简单的论证去鉴别重要的问题,并解答这些问题。这些工作可使人们得到关于惯性约束聚变实际参数的大致估计。但是,实现惯性约束聚变的实际设计必须考虑每一个能够想到的问题,不仅仅限于那些最重要的问题。计算机数值模拟是用来研究许多细致问题的重要工具。关于 ICF 研究更深层次的详细内容,可以参阅 Lindel 的书以及 Atzeni、Meyer ter Vehn 撰写的专著。

9.1 发生聚变的燃料终态条件

为了回答惯性约束聚变是否可能发生,我们将从这个问题的终端追溯到其起点。首先要问什么物质可以作为聚变燃料?然后在怎样的物理状况下能使这种聚变燃料燃烧并释放一定产额的能量?此后再转入如何创建这种状况,以及在试图实现这些目标时可能会遇到怎样的困境。

9.1.1 聚变反应所需燃料及其终态状况

决定后面一系列问题的首要问题是,什么样的元素可以作为聚变燃料?回答这个问题先要考察核反应表,从中找出以下很少几种可能实现的、最容易的实验室聚变体系:

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow {}^4\mathrm{He}(3.5\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(14.1\mathrm{MeV}) \tag{9.1}$$

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow {}^3\mathrm{He}(0.82\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(2.45\mathrm{MeV}) \tag{9.2}$$

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{T}(1.01\mathrm{MeV}) + \mathrm{H}(3.02\mathrm{MeV}) \tag{9.3}$$

$$\mathrm{D} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He}(3.6\mathrm{MeV}) + \mathrm{H}(14.7\mathrm{MeV}) \tag{9.4}$$

以及

$$\mathrm{p} + \mathrm{B}^{11} \rightarrow 3\,{}^4\mathrm{He}(8.68\mathrm{MeV/He}\ 原子) \tag{9.5}$$

这些反应体系中,第一种反应(即 DT 反应)是直至目前几乎所有聚变研究所关注的目标,可看出这条途径的优点,即发生这种反应的任何等离子体同样也能产生下面三种反应。对于生产电力的实际应用来说,这种反应的缺点是其释放的能量主要由中子携带(上面诸式中以 n 表示中子),只有首先把中子的能量转换为热量才能加以利用,而且热循环的效率比较有限(中子的动能转变为热能之后,热循环的能量效率大约为 40%)。这些问题促使人们展望更先进的聚变燃料,例如只产生带电粒子反应产物的质子(p)和硼(B^{11})的反应。从长远来看,这种反应具有避免使用热循环,省去聚变电站中相关硬件的潜在可能。短期来看,把产生大量中子的聚变系统作为裂变电站中乏燃料的孵化器(译注:由聚变中子促进贫化裂变燃料反应的混合堆途径),可能更有用处。但是本书不考虑电力生产问题,还是回到聚变反应究竟能否发生的问题。

图 9.2 表示上述四种聚变反应中反应率系数依赖于能量的关系,这是对参与反应粒子

按麦克斯韦分布取反应截面的平均值而得到的，其做法可参阅第 2 章中对碰撞过程的论述。可以看出，在温度远低于其他反应过程所需温度的范围，DT 反应的反应率系数已变得较高。星球上的情形也许并不需要关心反应率系数，因为那里的环境能在很长时间内把物质保持于某种状态。但是为了实现惯性约束聚变，确实应关注反应率系数，必须在燃料飞散分开之前使它们燃烧，这里甚关紧要的是把反应率系数提高至接近最大值。由此看出，DT（氘氚）显然是实现惯性约束聚变最初努力的首选燃料。

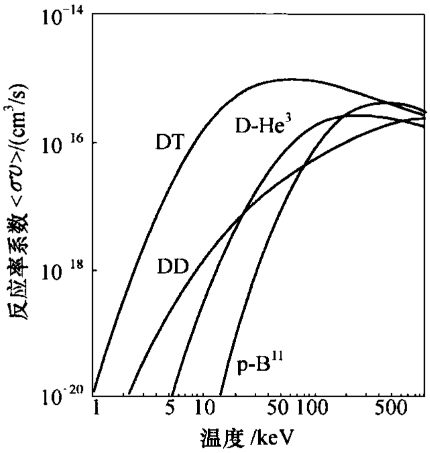


图 9.2　聚变反应 D－T、D－D、D－^{3}He 和 p－B^{11} 的反应率系数

下面假设已经使得一堆 DT 燃料处于可引发聚变燃烧条件的终态，试问它们之中有多少将会烧掉？为此，假设燃料块中氘核的数密度为 N_D，氚核的数密度为 N_T，成对反应产物的数密度为 n，由于只做简单估计而非完备的考虑，可以忽略不计 DD 反应。描述反应产物累积情况的反应率方程为

$$\frac{dn}{dt} = N_D N_T < \sigma v >_{DT} \tag{9.6}$$

式中 $<\sigma v>_{DT}$ 为 DT 反应的反应率系数。

再假设 $N_D = N_T = 0.5N_0 - n$，并定义 $\Phi = 2n/N_0$ 为燃烧分数。式(9.6)变为

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{N_0}{2}(1 - \Phi^2) < \sigma v >_{DT} \tag{9.7}$$

如果假定燃料燃烧时反应率系数 $<\sigma v>_{DT}$ 近似不变，把式(9.7)从时间 0 积分到 τ，τ 是燃料燃尽的时间，得到

$$\frac{\Phi}{1 - \Phi} = \frac{N_0 \tau}{2} < \sigma v >_{DT} \tag{9.8}$$

下一步估计燃料燃尽需要多长时间。这个时间应当与燃料块体半径 r 成正比，与声速 c_s 成反比，但显然应小于比值 r/c_s。考虑到这些因素，取 $\tau = r/3c_s$，这里的因子 3 只是一个猜测值，没有更深意义。为了估算声速和反应率系数，取温度为 30keV，这个估计假定燃烧中燃料的自加热可把温度升高到最大反应率系数所对应的值。把 N_0 做变换，得出

$$\Phi = \frac{\rho r}{\rho r + 6} \tag{9.9}$$

式中首次遇到 ρr 这个量，其意义是单位面积上的质量，也就是质量的面密度，在上式中的 g/cm^2 为单位。上式表明 ρr 控制了燃烧分数 Φ。粒子或光子穿过燃料块的透过率也取决于 ρr。在上述近似式的意义下，可看出当 $\rho r = 3$g/cm^2 时，燃烧分数达到 33%；而当 ρr 提高到 6g/cm^2，燃料分数仅提高到 50%。提高 ρr 的代价很高，回报却越来越低，因此发生燃烧之前的燃料终态应取 $\rho r = 3$g/cm^2 为宜，这样得到的燃烧分数为 33%。

习题 9.1

画出燃烧分数 Φ 对于面质量密度 ρr 的函数曲线。讨论推导燃烧分数时所作假定对于

这条曲线的影响,以及对于设计用来产生一定聚变能量系统尺寸的影响。

上述讨论最接近于整个体积中燃料均匀燃烧的情形。然而人们将看到,真实的聚变反应设计涉及燃烧传播的问题。燃烧的传播好像森林大火,燃料开始燃烧只发生于一个局部区域,周围邻域的燃料被加热之后才接着燃烧起来。通过对释放的聚变总能量(**产额**)的思考,可以进一步细化燃料发生燃烧所需的终态条件。3.5MeV 的 α 粒子(即^{4}He 的原子核)在 DT 燃料中的射程为 $\rho r=0.3\text{g/cm}^2$,因此 α 粒子一般跑不出燃料区域之外,它们的作用只能是自加热。这意味着散逸掉的能量就是由 14.1MeV 中子携带出燃料区之外的那部分能量。容易求出聚变反应的中子产额为

$$Y=\Phi\frac{m_\text{f}}{Am_\text{p}}\times 14.1(\text{MeV})\approx 1.1\times 10^{21}m_\text{mg}(\text{MeV})\approx 180m_\text{mg}(\text{MJ}) \qquad (9.10)$$

式中已取 $\Phi=0.33$,燃料的总质量为 m_f,若以 mg 为单位则记为 m_mg。由于我们认为主要部分的能量是突然释放的,有关讨论必须注意这个情况。1000t TNT 炸药爆炸释放的能量是 4.2TJ,1945 年在广岛爆炸的原子弹释放了大约 10000t 炸药的能量。在很大的实验室设施中也必须把聚变反应产额控制在相当低的程度,以便可在实验设施内进行。根据上面的计算,把聚变产额限制于 0.1t TNT 当量,大约为 500MJ 的释放能量。根据式(9.10),这将需要燃烧 3mg 质量的 DT 燃料。

到此已经知道,燃料的终态面密度 $\rho r=3\text{g/cm}^2$,燃料的总质量为 $4\pi\rho r^3/3=3\text{mg}$。假设燃料块体的形状为球形,这种几何构形无论对于稠密燃料的组装或者燃烧都是最有效的,把质量计算式以 ρr 相除,得到 $4\pi r^2=0.003\text{cm}^2$,从而算出燃料区域终态的半径为 0.015cm (150μm),实际上意味着燃料终态的体密度为 $\rho=190\text{g/cm}^3$。在我们继续考虑如何实现这个终态状况之前,先应了解做这件工作是否值得,也就是知道至少要达到多大产额,惯性约束聚变才是值得去做的。

9.1.2 能量增益:是否值得去做

如果用于造成终态状况的能量大于聚变所释放的能量,则实现对聚变的探求意义不大。

首先考虑压缩。在上述高度压缩但不是非常灼热的物质中,电子是高度费米简并的。质量密度 190g/cm^3 之下,考虑到 $Z=1$ 时 DT 的平均相对原子质量 A 为 2.5,电子密度 $n_\text{e}=190Z/Am_\text{p}=4.5\times10^{25}/\text{cm}^3$。从 3.1 节关于费米简并系统的论述中,已经看到费米能为 $7.9(n_\text{e}/10^{23})^{2/3}$,这里 n_e 的单位为 cm^{-3}。对于已压缩的 DT 燃料,这个费米能为 464eV,相应压力为 1350TPa。更有意义的是内能,由于 $\gamma=5/3$,内能密度为 $(3/2)\rho$,也就是 $2.02\times10^{16}\text{erg/cm}^3=2.02\times10^9\text{J/cm}^3$。由此可知,冷状态下已压缩 DT 燃料的比内能大约为 10^7J/g。相比之下,根据式(9.10),每克燃料聚变的比产额为 $1.8\times10^{11}\text{J/g}$,意味着该产额大约为压缩消耗能量的 18000 倍。这个数字看来确实令人鼓舞,但遗憾的是还没有把燃料如何点火的问题考虑在内。

其次考虑点火。实现点火的最简单方法是压缩全部燃料,使之达到足够灼热的终态发生点火。假设高温下燃料的行为类似于 $\gamma=5/3$ 的理想气体,而且根据十分细致的计算可以认为,温度达到 5keV 就足以使 DT 燃料点火。5 keV 温度下 DT 燃料的比内能为 $6.4\times10^8\text{J/}$

g,表明把聚变燃料整体加热到点火温度所需要的能量,是把它压缩到终态密度所需能量的 64 倍,从而将使聚变产额(中子的动能)与燃料终态内能的比值降低到略小于 300。这个比值看起来仍然很大,其实不然。如果人们希望得到较大的净增益,或者用惯性约束聚变能源生产电力,这个比值并不很充裕。这里的"净增益"是指聚变中子能量产额与用于惯性约束聚变靶丸能量之比值,这是 ICF 领域专著和论文中关于"增益"的最普遍提法。为了得出"净增益",还必须把上述聚变中子能量产额与燃料块总内能的比值再乘以该内能与消耗于靶丸能量的比值,这里第二个比值约为 10%,并且与许多细节问题有关。因此,消耗 1MJ 的能源也许可得到经过压缩后只有 100kJ 内能的聚变燃料块。

继续考虑电力生产的问题,必须估计到一些效率更差的环节。输送至靶丸的能量生产成本很高,由电网转换到该能量的效率可能还不到 10%。这就是讨论如何取得显著净增益问题时,经常会谈到一些相对较为有效的驱动器(如重离子束、KrF 激光器等)的缘故。从聚变产额再到电力的转换效率,如上所述低于 40%。把这些效率综合起来估计可知,聚变产额与压缩-点火聚变燃料所需能量的比值(即"净增益")必须超过 250,才可能达到得失相当(即聚变生产的电能相等于用于产生聚变的能量)。净增益必须明显高于 2500,对于实际电力生产才有意义。因此,聚变燃料整体点火的技术途径基本上毫无价值。

人们似乎处在一种左右为难的境地,为达到聚变不得不使燃料点火,但显然又承担不起。对这个困局的所有解决方法,都围绕着 α 粒子在已压缩 DT 燃料中的射程打主意。上面已经指出,α 粒子跑不出燃料区域。事实上其射程为 $0.3\mathrm{g/cm^2}$,即整个压缩燃料面密度 ρr 值的 10%,对应于燃料体积的 0.1%。如果有什么方法仅仅把这一小部分体积加热到 5 keV,使这个小范围先发生聚变产生聚变产物,其中的 α 粒子再将加热周围的冷燃料使之继续点火,聚变燃烧就能向外传播。在被最先点火的那部分燃料中这个能量成本仍然是 $6.4\times10^8\mathrm{J/g}$,但是放在整个靶丸中取平均,点火成本下降为 $6.4\times10^5\mathrm{J/g}$,大大低于整体压缩的成本。这样,某种**热点点火**途径成为达到高增益聚变的关键,此时从这种聚变中获取的能量将是为压缩燃料并使其局部点火所投入能量的数千倍。由此可见,并不需要使整个燃料体积在一瞬间都发生燃烧,可代之以燃烧推进传播的方式。

人们已经提出造成这种点火热点的若干途径,最简单的、也是探讨得最深入的是,调整内爆过程使之在燃料靶丸中心形成点火热点,称为**中心点火**方案。其他途径称为**快点火**方案。所有快点火途径都需要把某种能源释放并注入已压缩燃料之中。大多数已得到研究的关于此项工作的方案,通常称为"快点火器",包括使用辐照度非常高的短脉冲激光束,产生能够贯穿和加热已压缩物质的相对论粒子束。

9.1.3　压缩状态下氘氚燃料的性质

上面已经论述,已压缩氘氚(DT)燃料的压力至少为 1300TPa,其密度为固态 DT 密度的 1000 倍量级。形成所需压力的代价很高,而且所需终态压力的任何提高都将进一步提高成本或者降低惯性约束聚变系统的性能。由于这个原因,需要深入理解 DT 燃料的压力与压缩过程中可能出现的加热之间的关系。了解压力与熵的关系对此特别有用,因为 1000 倍的压缩实际上必然涉及冲击波,而冲击波一定会引起熵增(见 4.1.4 节)。基于这些考虑,进

一步探讨 DT 燃料的基本性质,可以简捷地把这种燃料视为初等粒子的集合,不考虑如电离和解离等集体效应的影响。

下面考察氘和氚粒子数相等的 DT 燃料的性质。按照 Lindl 的研究,假定该燃料的初始状态为温度 11K、密度 $0.25\mathrm{g/cm^3}$ 的固态氘氚。电子和氚核是费米子,氘核则是玻色子。把式(3.13)用于上述初始状态,可得出电子的费米能为 5.6 eV,比初始温度高出 3 个量级,这意味着在状况发生很大改变之前,电子必须作为费米子处理。相比之下,氚核的初始费米能对应于 7.4K 温度,基于 3.1.3 节的讨论,这意味着在整个压缩、加热过程中氚核可以视为经典气体。

氘核作为玻色子的行为不属于本书第 3 章的讨论范围。参考如朗道和栗弗席兹所著统计物理学教科书可知,玻色子的性态变化分为三个温度范围。

最低温度状况下,粒子累积于最低能态,必须与其他能态分开处理。这个标志温度记为 T_0,低于该温度则属于上述状况,即

$$T_0 = \frac{3.31}{g^{2/3}}\frac{\hbar^2}{4\pi^2}\frac{n_D^{2/3}}{2m_p} \tag{9.11}$$

式中$\hbar$为普朗克常数;m_p 为质子质量;n_D 为氘核的数密度;g 为氘核的简并数(由于氘核的自旋量子数为 1,$g=3$)。

根据这些数据由式(9.11)算出 $T_0 \approx 3.7\mathrm{K}$,这意味着聚变燃料中的氘核没有集合于最低能量的量子态,而是分布于许多能态的范围。

在第二个温度范围中氘核必须作为玻色子处理,可以使用类似 3.1.3 节中积分的分析方法。在更高温度下(具体温度值与所要求的准确度有关),氘核的行为变得与经典气体相像。因而,为了确定如何处理聚变燃料中的氘核,必须把其行为按玻色子进行估算。

玻色子的性质可以方便地利用类似于费米子使用的积分方式来表示。定义

$$G_n(\phi) = \int_0^\infty x^n[\exp(x-\varphi)-1]^{-1}\mathrm{d}x$$

其中

$$\varphi = \mu/k_B T$$

可以得出

$$n_D = \frac{12\sqrt{2}\pi}{\hbar^3}(2m_p k_B T)^{3/2}G_{1/2} \tag{9.12}$$

根据上式有

$$\Theta = 1/(10^4 G_{1/2}) \tag{9.13}$$

式中为方便起见,已再次定义 $\Theta = T/T_d$,T_d 为电子的简并温度,由 $k_B T_d = \varepsilon_F$ 给出。式(9.13)规定了化学势(为负值)与 Θ 之间的关系。氘核的压力为

$$p_D = \frac{8\sqrt{2}\pi}{\hbar^3}(2m_p)^{3/2}(k_B T)^{5/2}G_{3/2} \tag{9.14}$$

同时,DT 燃料中氘的比熵为

$$s_D = \frac{k_B}{5m_p}\left(\frac{5}{3}\frac{G_{3/2}}{G_{1/2}} - \varphi\right) \tag{9.15}$$

注意到为了得到 DT 燃料的比熵，需用 DT 燃料中每个氘粒子的平均质量（$5m_p$）去除每个粒子的熵，把这样计算的结果与经典压力作比较，得出

$$p_{\mathrm{Dcl}} = 5\Theta/4 \tag{9.16}$$

经典的比熵为

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{Dcl}} &= \frac{k_B}{5m_p}\left[\frac{5}{2} + \ln\left(\frac{5m_p}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\ln(k_B T) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi \times 2m_p}{\hbar^2}\right)\right] \\ &= 0.191 \times 10^8\left(15.1 + \frac{3}{2}\ln\Theta\right) \end{aligned} \tag{9.17}$$

可以看到，在任何高于 0.001 的 Θ 值下，经典压力与玻色子压力在很高精度下都是一样的，然而在有意义的所有 Θ 值范围内经典比熵总是比玻色子比熵低 5% ~20%。

习题 9.2

分别把氘核作为玻色子和经典气体来处理，进行上述估算，画出密度为 0.1g/cm³ 的氘中压力与温度的函数关系曲线，比较这两种计算的结果。

上面的讨论可综合归纳如下：

以电子费米压力作归一化的 DT 燃料总压力，是依据 3.1.3 节的电子压力与氘核、氚核两者经典压力（每个都等于 $5\Theta/4$）之和。图 9.3(a) 表示这样计算得到的压力。总比熵是式(3.26)计算的电子比熵与式(9.15)给出的氘核的比熵以及氚核的经典比熵之和，可写为

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{totcl}} &= \frac{k_B}{5m_p}\left[\frac{5}{2} + \ln\left(\frac{5m_p}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\ln(k_B T) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi 3m_p}{\hbar^2}\right)\right] \\ &= 0.191 \times 10^8\left[15.7 + \frac{3}{2}\ln\Theta\right] \end{aligned} \tag{9.18}$$

图 9.3(b) 表示式(9.18)中各项对比熵的贡献。比较图 9.3(a) 和(b)可得出结论：如果从费米简并的冷状态 DT 燃料出发，在压力开始增长之前能够把该燃料加热到 Θ ~0.1。之所以能够如此加热，应归结为简并电子的作用。这种加热导致熵的增加。可以等价地认为，在压力开始增长之前能够把离子为主的 DT 燃料的熵增加一定量。如果熵增主要由冲击波引起，则第二种观点比较适用。

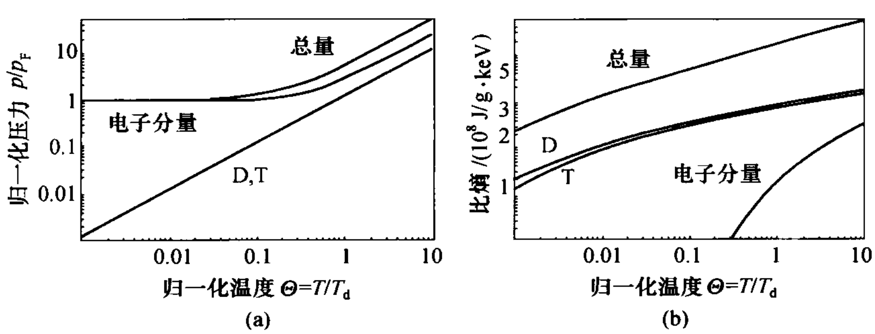


图 9.3　DT 燃料中压力和熵的起源

(a) 以电子费米压力 p_F 作归一化的压力；(b) DT 燃料的比熵。

把图9.3(a)、(b)组合起来得到图9.4,其中黑实线表示归一化压力对于燃料中熵的函数关系。可以看出,在某个熵值之前压力为常数,熵继续增大时压力指数式上升。这种变化方式对于聚变较为有利,因为此时燃料增加了一定量的熵而不用付出代价。

图9.4中的灰实线表示经典气体模型的结果,其推导留给读者作为习题。该图中的虚线表示Lindl给出的如下公式,即

$$p_{\mathrm{DT}}=p_{\mathrm{F}}\exp\left[0.75\left(\frac{\Delta s}{10^8}-4\right)\right] \tag{9.19}$$

式中 Δs 为从初始状态起算的比熵增量。

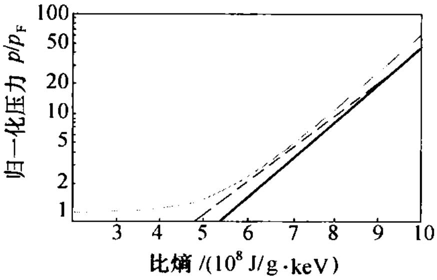


图9.4 仅当熵充分增加之后压力才开始上升,计算模型中燃料的初始熵值为 1.1×10^8J/keV/g

在压力为若干倍费米压力的重要范围中,这个表达式较好地拟合了上面的计算结果。该式计算中初始状态的熵为 1.1×10^8J/keV/g。式(9.19)描述了依据QEOS或者表格式物态方程给出的密度大于5g/cm^{3}范围中DT燃料的压力和熵的性态,这些物态方程考虑了计算中忽略的原子和分子键的作用,这种作用确实会影响到低密度范围的物态方程。由于计算与式(9.19)归纳的更先进模型的结果基本符合,可以得出结论:高度压缩下DT燃料的行为是由每种粒子的行为(电子、氘核和氚核)所主导的,而且在创建燃料终态的过程中熵的增加是可以接受的,不过较为理想的是熵增 Δs 应控制在不大于 4×10^8J/g · keV 的程度。在这样程度以上,达到终态所需的压力将随熵的增加而指数式上升。

表9.1 无点火热点时高增益惯性约束聚变模型系统的终态参数

参 数	量 值	参 数	量 值
燃料质量/mg	3	费米能/eV	460
燃烧分数/%	33	燃料终态压力/TPa	1350
终态面质量密度 ρr/(g/cm^2)	3	允许的最大比熵/J/g · keV	4×10^8
终态质量密度/(g/cm^3)	190	已压缩燃料球的内能/kJ	30
燃料球终态半径/μm	150	靶丸动能/kJ	>60

习题9.3

推导压力与熵之间的经典关系,这里压力已用电子费米压力作归一化。

已经确定了取3mg DT燃料,压缩成为直径300μm、密度190g/cm^3 的小球(压缩过程中不能产生太多的熵增),然后使燃料点火发生聚变反应。表9.1归纳了点火之前燃料终态参数。达到这组参数存在两个困难:首先,固态DT的初始密度为0.25g/cm^3,为了得到惯性

约束聚变释放的能量，又不至于炸掉实验室，必须把 DT 燃料压缩到其液(固)态密度的 1000 倍左右，这显然不是一个简单的冲击波所能做到的；其次，燃料的点火问题也不是简单地能解决的。下面将逐个讨论这些问题。

9.2　燃料终态的形成和聚变点火

我们已经掌握了关于燃料终态的某些知识，但是还未考察如何能够造成这个终态，如何能使燃料点火，或者如何改进这个终态能使燃料点火。本节将讨论如何形成这样的终态，使其点火需要什么条件，以及实现热点点火或快点火需要什么条件。

9.2.1　高度压缩状态的实现

我们面临的下一个问题是如何造成燃料的终态，即使用 30 kJ 压缩能量，把 3mg 氘氚燃料压缩成密度 $190\mathrm{g/cm^2}$、最终压力 1350TPa 的燃料球，达到上述能量和压力的同时还要限制比熵不超过 $4\times10^8\mathrm{J/keV/g}$。实现这种终态的一种途径是，把一个固态 DT 球体加以绝热压缩达到终态，遗憾的是现在还不知道怎样的压缩源可以达到 1350TPa 的压力，需要寻找替代的方法。已提出的一种思路是靶丸内爆，即把燃料物质制作的球壳向内加速到高速度，然后减速滞止成为静止的压缩状态。把这个想法加以具体化，就是把 3mg 的 DT 燃料球壳加速到内爆速度 $v_{\mathrm{imp}}=1.41\times10^7\mathrm{cm/s}$，使之具有 30kJ 的动能。如果没有明显的能量损失，该燃料壳减速到静止状态，使其全部能量变成为压缩燃料的能量，这样的燃料块中的压力就能达到 1350TPa。然而实际中并不如此简单，因为减速不可能无代价地实现，但已明确这种基本观念的关键是，先形成靶丸的动能，再把它转变为内能。

选择的燃料终态几何形状是球形，这是为接近于 9.1 节算出的燃烧分数所需的，这样可以利用球芯部位的物质抵抗并最终使内爆停止，从而使动能转变为内能。这种内芯物质必须是非费米简并的气体，聚变靶丸设计中应包含这个气体芯部分。即使靶丸中未包括气体芯，当引发靶丸内爆的冲击波到达冷燃料壳层内表面时，反射形成第 4 章所述的稀疏波，从而产生这种气体(实际上是等离子体)。根据最简单的观点，内爆的稠密冷燃料层付出动能，对气体做 $p\mathrm{d}V$ 功，燃料层自身逐渐减速以至停止。气体芯同时也对内爆燃料层做 $p\mathrm{d}V$ 功，使其进一步压缩。除了这种机械功之外，还有其他的损失，特别是从气体芯到冷燃料层的电子热传导或辐射。忽略这些损失和对其他因素的考虑，但应认识到气体芯和燃料层之间相互做的功必定相等，所需要的能量还应加倍，这就要求把内爆速度提高到 200km/s。

更细致说来，靶丸的滞止不会只涉及 $p\mathrm{d}V$ 功。如果初始时靶丸内部是真空的，则靶球壳内表面发出的稀疏波将产生一个向心的飞散流动。该流动在球心处滞止并产生一个反射冲击波，影响到冷燃料层球壳继续向内运动。如果初始时靶球中心含有气体，则从靶球壳内表面发出的稀疏波引起的飞散流动将在气体中驱动一个向心冲击波，直至气体和来自靶丸内表面的稀疏飞散物质逐渐滞止。此时也会产生一个中心反射冲击波，影响到冷燃料层继续向内运动。但是无论哪种情形，该中心反射冲击波都要通过燃料层中渐增的密度梯度区，逐渐转变为熵增不是很大的弱冲击波。上述过程中冲击波的来回反射伴随着对内部气体芯的

多次加热和压缩。除了因电子热传导和辐射造成的损失以外，冲击波加热也会提高为实现预期终态所需的冲击波速度和内爆燃料层的能量。下面将会看到中心热点处点火方案中，靶丸内爆速度可能需要超过300km/s。可以利用下面的式子表示上面的想法，即有

$$E_{\mathrm{kin,min}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{f}}V_{\mathrm{min}}^2 = 3p_{\mathrm{f}}V_{\mathrm{f}} \tag{9.20}$$

式中 $E_{\mathrm{kin,min}}$为内爆所需的最小动能；m_{f} 为燃料壳层的质量；V_{min}为所需的最低内爆速度；p_{f} 为燃料终态压力；V_{f} 为燃料终态体积。

式(9.20)最右面的项是冷燃料终态能量的2倍，反映了内爆终止时燃料层减速过程中对热气体芯所做的 $p\mathrm{d}V$ 功。由于 $m_{\mathrm{f}}=\rho_{\mathrm{f}}V_{\mathrm{f}}$，这里 ρ_{f} 是燃料的终态密度，$p_{\mathrm{f}}=0.213\rho_{\mathrm{f}}^{5/3}$(TPa)。根据3.1节所述，这里 ρ_{f} 的单位是 g/cm^3。式(9.20)把固定 ρr 值之下的燃料层的终态动能、终态压力和质量关联起来。图9.5表示在燃料终态形状为球形并且 $\rho r=3\mathrm{g/cm^2}$ 的条件下，上述各物理量如何随着燃料终态密度 ρ_{f} 而变化的情况。十分明显，提高燃料终态密度是很有利的，然而提高密度必须增大内爆速度，这一点并不容易做到。

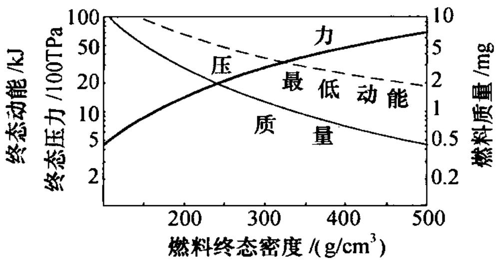


图9.5 燃料终态参数与燃料终态密度的关系

即球形燃料中终态电子压力、最低动能和燃料质量与燃料终态密度的关系。

习题9.4

画出 $\rho r=3\mathrm{g/cm^2}$ 条件下所需的最低内爆速度与燃料终态密度的关系曲线，并讨论所得结果。

这里我们再一次把注意力转移到前面提及的目标，也就是把质量3mg的冷燃料球壳加速到内爆速度300km/s，并且把比熵限制在 4×10^8 J/keV·g 以下。当在一个高能量密度系统中做这件事时，所形成的压力将使得烧蚀加速。这样，向内的会聚运动就是部分物质向外喷射的后果，也可以把这种内爆描述为一种球形火箭。必须向火箭提供一定的火箭燃料，被烧掉的壳层物质称为**烧蚀层**。某些场合下，烧蚀层也可以用冷冻的氘氚制作，然而为了便于被X射线烧蚀，其中还要加入铍和碳元素(参见8.2.1节)。烧蚀层加上燃料层构成了需要加速的整个质量。记烧蚀层的初始质量为 m_{ab}，如果这些质量全部被烧掉，根据式(8.47)残留质量的分数为

$$f_{\mathrm{m}} = \frac{m_{\mathrm{f}}}{m_{\mathrm{f}}+m_{\mathrm{ab}}} = \mathrm{e}^{-v_{\mathrm{imp}}/V_{\mathrm{ex}}} \tag{9.21}$$

式中 V_{ex}为烧蚀物的喷射速度，与烧蚀过程的细节有关，一般为预期内爆速度的1倍~4倍。从式(8.47)看来，烧蚀量达到80%初始质量之前，一直可得益于以较低的喷射速度 V_{ex}提供

一定的内爆速度(图 8.11)。如果这是这两种速度之间的唯一的关系(其实不是这样),则宁愿用 X 射线烧蚀而不用激光烧蚀,因为前者产生较低的喷射速度。具体说来,若设 $V_{ex}=600\text{km/s}$,则燃料约占总质量的 60%,理想的火箭效率为 40%,X 射线辐照下可实现的火箭效率为 20% 左右,激光辐照也许只有 10% 的效率。激光辐照效率较低的原因,在于其包含了一个附加的过程——通过电子热传导,从低于临界密度的区域向烧蚀密度区域传输热量。

现在可知,用烧蚀方法加速燃料层将用去大约一半的总质量。当靶丸运动距离还不太远时,这一点就必须完成,否则在注入能量之前燃料层就开始减速。假如能够在 $r_s/2$(r_s 为靶丸的初始内半径)距离中使靶丸加速,再设加速是在常压力 P_{abl}(P_{abl}称为烧蚀压力)下进行的,此压力对应于质量迁移速率 $\dot{m}=P_{abl}/V_{ex}$。还要假设单位面积上燃料层加上烧蚀层的质量之和 $m_0=\rho_i\Delta r_i/f_m$,这里 ρ_i 为加速开始时初始被压缩燃料的密度,Δr_i 为初始被压缩燃料壳层的厚度(这里使用的薄壳近似对于被压缩燃料层是成立的,但并不适用于初始不可压缩的靶丸)。积分第 8 章中的火箭方程,得到

$$\frac{r_s}{2}=V_{ex}\int_0^{t_a}\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\mathrm{d}t=-V_{ex}\int_0^{t_a}\ln\left(1-\frac{\dot{m}t}{2\rho_i\Delta r_i}\right)\mathrm{d}t \tag{9.22}$$

式中的积分进行到 $\dot{m}t_a=(1-f_m)m_0$ 为止。把上述积分归一化并进行计算,得到燃料靶丸的(初始厚度/ 半径)比值为

$$\frac{r_s}{\Delta r_i}=\frac{2\rho_i v_{imp}^2}{P_{abl}}\eta(\eta e^{1/\eta}-1-\eta)=\frac{2\rho_i v_{imp}^2}{P_{abl}}g(\eta) \tag{9.23}$$

式中 $\eta=V_{ex}/v_{imp}$;厚径比 $r_s/\Delta r_i$ 代表了对于飞行中厚径比的估计。可以看出,这个比值在确定瑞利 - 泰勒不稳定性造成的影响时有重要作用。内爆速度由聚变设计所设定,喷射速度则由烧蚀的实现途径所确定,因而 η 可能从 1 变到 5。在这个变动范围内,$g(\eta)$ 逐渐地从 0.71 下降到 0.53。由于燃料质量是已知的,$m_f=\rho_i 4\pi r_s^2\Delta r_i$,因此式(9.28)确定了 r_s,得出

$$r_s=\left(\frac{1}{2\pi}\frac{m_f v_{imp}^2}{P_{abl}}g(\eta)\right)^{1/3} \tag{9.24}$$

作为一个例子,取 $P_{abl}=10\text{TPa}$,$m_f=3\text{mg}$,$v_{imp}=300\text{km/s}$,$g(\eta)=0.6$,计算 r_s 和其他相关的量,得到 $r_s=1.37\text{mm}$。加速时间 t_a 是式(9.22)中积分的积分限,计算得到

$$t_a=\frac{r_s}{2v_{imp}}\left(\frac{\eta e^{1/\eta}}{g(\eta)}\right) \tag{9.25}$$

对于上面所设诸参数,加速时间约为 5ns。最后基于靶丸球壳的初始厚度 Δr_0,得到靶丸初始厚径比为

$$\frac{r_s}{\Delta r_0}=\left[\left(1+\frac{3\rho_i\Delta r_i}{\rho_0 r_s}\right)^{1/3}-1\right]^{-1}=\left[\left(1+\frac{3}{2g(\eta)}\frac{P_{abl}}{\rho_0 v_{imp}^2}\right)^{1/3}-1\right]^{-1} \tag{9.26}$$

这里第一个等式是纯粹的几何关系,第二个等式用到了式(9.23)。计算出 $\Delta r_0=r_s/3.3$,也就得出 $\Delta r_0=420\mu\text{m}$。

习题 9.5

推导式(9.26)。试问为什么需要用 1/3 幂次来表示这个结果?

在讨论瑞利－泰勒不稳定性时，较低的飞行厚径比非常有利，此时可得到很大的烧蚀压力和较短的脉冲。实际情形中，烧蚀压力大约被限制于 10TPa。激光直接辐照方式下，这种限制是由于激光－等离子体不稳定性的缘故。当辐照度远高于 10^{15} W/cm^2 时，这种不稳定性变得非常严重。使用 X 射线辐照时，激光－等离子体不稳定性可能有些影响，然而在温度高到足以产生较高烧蚀压力之前，与黑腔有关另外一些困难已经变得很严重。

习题 9.6

假设使用某种能源可在时间 t 内施加压力 p，用以加速单位面积上一定的质量 $\rho_0\Delta r$，达到速度 $v_{imp}=300$km/s。设想一个聚变靶丸，利用 12h 之内照射的太阳光的反射压力作为压力源。太阳光可近似看作波长 580nm、辐照度 1kW/cm^2 的光束。试问这个靶丸实现内爆要经过多长时间？

上面得到的结果使得我们的任务看来比较简捷明白，其解决方案显然就是对一个初始尺寸适当的聚变靶丸，在若干纳秒之内作用以 10TPa 的压力，然后只需等待聚变燃料到达其终态，但是还应要求此过程中燃料的比熵控制在 4×10^8J/g · keV 以下。遗憾的是，直接对冷冻 DT 燃料作用 10TPa 的压力，将会引起很大的熵增。费米简并的冷冻 DT 燃料，密度为 0.225g/cm^3 时压力达到 30 GPa。10 TPa 幅度的冲击波作用于这样密度的燃料球上，设其多方指数 γ 具有适当的值（如 5/3），对应的冲击波速度约为 260 km/s，燃料将被加热到 326 eV，远高于该密度下燃料的费米能 5eV，冲击波引起的熵增为 9×10^8J/keV/g，已明显超出了需要控制的熵增阈值。因此，使用幅值 10TPa 的单次冲击波是不可行的。

4.1.4 节曾讨论过如何解决既作用高压力又维持最低熵增的方法。为了达到 10TPa 压力又不致引起太高的熵增，需要分阶段地提高压力，至少利用三次冲击的过程。大多数近代的设计使用四次冲击过程，人们还企图利用精密剪裁压力波形的方法，实现无冲击的压缩。但是压力波形的轻微变动，可能会引起一些未曾预料冲击波的出现，因此使用若干个可控制冲击波的途径也许更加可行。这种做法又产生了冲击波计时的新问题。如果打算以一系列冲击波把烧蚀压力提高到 10TPa，则必须控制这些冲击波的传播时间，使得后来的较强的冲击波不会太快地超越前面较弱的冲击波；否则，这两个冲击波将发生合并形成更强的冲击波，产生更高的熵增。我们希望控制住冲击波的传播时间，使它们恰好在从靶丸内表面透出时发生合并。此外，还企图调节这些冲击波的合并情况，使得从靶丸内表面喷射飞散的物质具有所需要的性质。

9.2.2 聚变燃料点火

尽管已把聚变燃料压缩到很高密度的终态，但还不足以使其发生聚变燃烧，还必须使其在某个热点处点火。人们遇到的挑战是：尽管能量有所损失，仍然必须使得一部分燃料体积达到足够的高温，以维持聚变反应持续下去。也就是说，遇到的问题可归结为一个功率平衡的方程。热点的净加热必须是正的（下标 h 表示热点的物理量），下面讨论这个问题（本节及下面两节的内容主要根据 Atzeni 和 Meyer ter Vehn 的专著）。假定在常密度 ρ_h 之下，（假设热点物质的动能忽略不计）热点内能 ε_h 的方程为

$$V_h\rho_h\frac{d\varepsilon_h}{dt} = P_{dep}V_h - QS_h - F_RS_h - p_hu_hS_h \tag{9.27}$$

式中 V_h 为热点体积；S_h 为热点表面积；ρ_h 和 p_h 分别为热点的密度和压力；P_{dep} 为聚变反应能量在热点中沉积的速率；F_R 和 Q 分别为离开热点的辐射能量通量和热性热能通量。

当热点以径向速度 u_h 向外膨胀时，它对冷燃料做 pdV 功，在式(9.27)中以右部最后一项表示。下面依次考虑式(9.27)中的各项，并假定在稠密燃料物质中 $T_e = T_i = T_h$。

聚变释能的沉积项为

$$P_{dep} = \frac{dn}{dt}E_{fus}f_{dep} = N_DN_T < \sigma v >_{DT}E_{fus}f_{dep} \approx C_\alpha\rho_h^2T_h^2\left(1 - \frac{0.3}{4\rho_hR_h}\right) \tag{9.28}$$

式中 dn/dt 来自式(9.6)。为了得到上式右部中 P_{dep} 的最终表达式，使用关于 8keV～25keV 范围中 $<\sigma v>_{DT}$ 的如下标准拟合式，即

$$< \sigma v >_{DT} \approx 1.1 \times 10^{-24}T_h^2(cm^3/s) \tag{9.29}$$

这里 T_h 以 eV 为单位。热点点火中只是 α 粒子提供了有意义的加热，因此 $E_{fus} = 3.5MeV$。式(9.28)中 f_{dep} 的定义即是沉积于热点中的 α 粒子能量的分数。温度低于 8keV 时，式(9.29)高估了聚变的反应率系数。作为一次近似，可以认为热点尺寸必须大到足以吸收所有 α 粒子的能量，也就是取 $f_{dep} = 1$。更细致说来，带电粒子的能量在物质中的沉积十分复杂，无法用简单的指数函数表达。这是细节问题不再讨论，但是考虑到当 ρr 减小时会发生与假设上述能量被完全吸收的偏离，特地把 f_{dep} 表示为圆括号中的量。由于 $N_D = N_T$，得到 $C_\alpha = 3.8 \times 10^{11}erg \cdot cm^3/(s \cdot g^2 \cdot eV^2)$。在 Atzeni 和 Meyer ter Vehn 书中有更详细的论述。

热通量采用第 8 章中导出的 Spitzer－Harm 热通量模型，即有

$$Q = -\kappa_{th}\nabla T_h \approx \kappa_{th}\frac{T_h}{R_h} \approx C_Q\frac{T_h^{7/2}}{R_h} \tag{9.30}$$

引用式(8.10)和式(8.36)，并考虑到电子－电子碰撞引起的因子$(1+3.3/Z)^{-1}$，计算得到 $C_Q = 5.9 \times 10^8 erg/(eV^{7/2}cm \cdot s)$，这里 T_h 以 eV 为单位，R_h 以 cm 为单位。

辐射通量是因热点处等离子体发射韧致辐射而引起的，如果热点区域为光学厚，则该通量显然为 σT_h^4，但是热点一般并不是光学厚的。在光学薄的极限下，该通量为

$$F_R \approx \kappa_bR_h\sigma T_e^4 = C_b\rho_h^2\sqrt{T_h}R_h \tag{9.31}$$

式中 κ_b 为谱平均的吸收系数，即式(6.39)表示的普朗克平均不透明度。

考虑到通过源体积的途径长度，可以用立体角范围内的积分恰当地确定特征距离，这里假定这样给出的特征距离接近于 R_h，从而可以算出 $C_b = 3.2 \times 10^{21}erg \cdot cm^3/(g^2 \cdot s \cdot eV^{1/2})$。

习题 9.7

推导 DT 燃料对于韧致辐射的谱平均吸收系数。根据美国海军研究实验室(NRL)的《等离子体公式手册》计算的值，核对所得到的结果。

习题 9.8

把辐射输运方程在适当的立体角范围内积分，得到从球形 DT 燃料体积中发出的辐射

通量 F_R，求出特征距离 R_h 的值。所得结果与式(9.31)计算值比较，后者已假定在通过燃料体积的距离所对应的立体角范围内的积分为 πR_h。

加分题：把上述计算推广到任意光学深度的情形，并讨论所得结果。

点火途径决定了热点是否膨胀以及膨胀的程度。一方面，可以把内爆过程设计成在靶丸中心形成热点，从而在燃料层滞止时刻冷燃料与热点处于同样压力下，称为等压构形。此时式(9.27)中的 u_h 初始时为零。热点区受到加热的同时向外膨胀，但是由于聚变反应率随温度剧烈上升，重要的是初始时的加热。因此可以使用式(9.27)，令 $u_h=0$，寻求等压构形的点火阈值。

另一方面，也可以把内爆设计成只是把燃料压缩集合在一起，在此过程完成时再用某种其他手段造成热点。这种情况中，冷燃料和热点开始时具有同样的密度，称为等容构形。热点区在加热的同时向外膨胀，可以合理地估计 u_h 相当于进入冷燃料的强冲击波后的流体粒子速度。根据式(4.23)可得

$$p_h = (\gamma-1)\rho_s u_h^2/2$$

这就确定了 u_h，该式中 ρ_s 是受冲击后冷燃料的密度，即

$$\rho_s = \rho_c(\gamma+1)/(\gamma-1)$$

式中 ρ_c 为该冲击波前方冷燃料的密度。另外有

$$p_h = \rho_h T_h (Z+1) k_B / A m_p$$

这种构形中 $\rho_h=\rho_c$，可以得到

$$p_h u_h = C_h \rho_h T_h^{3/2} \tag{9.32}$$

对于 DT 燃料，$C_h=5.8\times10^{17}\text{erg}\cdot\text{cm}/(\text{g}\cdot\text{eV}^{3/2})$。

回到式(9.27)，可以证明在有意义的参数范围中其右部四个项没有一项始终是小的，结果导致所考察项中 T_h 的幂次决定了该项在什么情况下发挥作用。韧致辐射冷却项的标度关系是 T_h 的最低幂次，因此该项应在低温下起主导作用。下一个是 $p\mathrm{d}V$ 做功项，其标度关系为 $T_h^{3/2}$，因此当此项出现时，它将提高点火所需的最低温度。再下一个是聚变能产生项，其标度关系为 T_h^2，因此聚变能的产生最终能够克服前面两个损失项。然而在高温下还会出现热传导项，其标度关系为 $T_h^{7/2}$，在相当高的温度下此项将使点火熄灭。

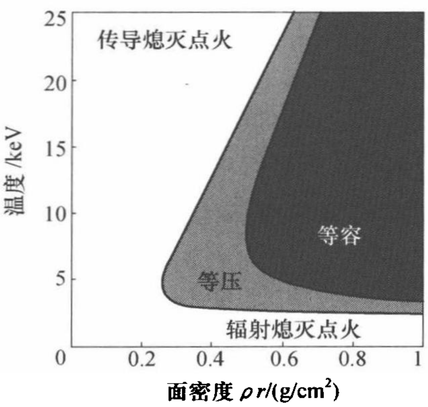


图 9.6　点火阈值

灰色区域中的热点可以产生净加热并实现点火。

当式(9.27)右部为零时，对应于发生点火时的阈值。图 9.6 表示等压构形和等容构形两种情形的点火条件，图中所示各区边界线的定性形状是正确的。但是，该图中点火区最下面的边界位置过低，因为在这样的温度下式(9.29)高估了 $\langle\sigma v\rangle_{DT}$ 值，真实的低边界处于 5keV 左右。等压构形的情形中，确实可以看到面密度 $\rho r\approx0.3\text{g/cm}^3$ 和热点温度 $T_h\approx5\text{keV}$ 是

最低的点火条件。对于与快点火有关的等容构形情形，面密度 ρr 差不多要增加 2 倍，并且点火温度也略高一些。这也许会改变稠密冷燃料的最佳性质，因为在相同密度下要使热点的 ρr 加倍，热点体积即增大 8 倍，向热点投入的能量将增长 8 倍。把冷燃料进一步压缩可能具有、也可能没有更大的意义，这将取决于投入能量的代价。

不满足阈值条件的靶丸实际上也可以实现点火，只要靶丸开始时处于热传导熄灭点火的温度下。这时热点虽然冷却，但加热了其周围的区域，相当于形成了温度较低但 ρr 较大的另一种参数变更的热点 ，也可能实现点火。另外，实现点火并不能在原理上保证所引发的聚变燃烧能够继续传播下去。相对于所产生的聚变能量而言，如果已加热区域膨胀过快，膨胀导致的冷却可能使点火熄灭。但是对于惯性约束聚变有关状况，其参数设计一般都有利于已点火靶丸能够继续燃烧下去。Atzeni 和 Meyer ter Vehn 的专著中，对最后面两种作用有深入的讨论，这些问题被归纳为如下的成功点火和燃烧条件：

$$\rho_h R_h T_h > 6\sqrt{\rho_h/\rho_c}\ (\mathrm{g\cdot keV/cm^2}) \tag{9.33}$$

式中 ρ_c 为已压缩的冷燃料密度，在等压构形情形 ρ_h/ρ_c 的典型值为 1/16。

式(9.33)是惯性约束聚变中类似于磁约束聚变研究中著名的劳逊判据(Lawson Criterion)条件，表示惯性约束聚变中应满足的密度与约束时间乘积的最低值。

习题 9.9

劳逊判据通常可写成 $n\tau > 10^{14}\mathrm{s/cm^3}$，这里 n 为粒子数密度，τ 为约束时间。试找到一种方法把此判据与(9.33)式关联起来，并进行比较和评述。

9.2.3 中心热点点火

人们自然地会想到把制止内爆靶丸运动时所做的功加以利用，使得气体芯变成引发聚变燃烧的热点。这个需求限制热点 ρr 的最终值不能低于 $0.3\mathrm{g/cm^2}$，使得 α 粒子跑不出热点的区域。同时，还限定了热点最终温度必须在 5keV 以上。如果温度过低，热点中的燃料不会点火；但若温度过高，热点区域中的燃料过早开始燃烧。热点压力必须相等于燃料层的压力。知道压力和密度之后，根据公式 $p_h = \rho_h T_h(Z+1)k_B/Am_p$ 可定出热点的密度 ρ_h，然后由 $\rho_h R_h$ 值得到热点的半径 R_h。

如果燃料层的压力是前面已导出的最低值 1350TPa，这将意味着热点的密度 $\rho_h = 3.5\mathrm{g/cm^3}$，半径 $R_h = 850\mu\mathrm{m}$。很遗憾这样的热点太大了，需要大大增加燃料质量才能达到 $\rho r = 3\mathrm{g/cm^2}$ 的要求。根据原先对应于燃料总量的规定，不能采用中心热点的途径。唯一合理的替代方法是提高燃料层的压力，从而减小热点的半径。对这个替代方法的估算如下：

前面已根据 p_h 给出了 R_h，由于已限定 $\rho_c\Delta r_c = 3\mathrm{g/cm^2}$，根据冷燃料的费米简并压力 $p_c = p_h = 2.1\rho_c^{5/3}$，就可给出冷燃料层的厚度 Δr_c，再根据几何形状求出燃料质量为

$$m_f = \rho_c \frac{4\pi}{3}\left((R_h + \Delta r_c)^3 - R_h^3\right) \tag{9.34}$$

上式右部的所有变量都是压力的已知函数。根据此点以及预期的燃料质量 3mg，就可计算出表 9.2 中的各个参数。

表 9.2 带有热点的高增益惯性约束聚变系统模型的参数

参 数	量值	参 数	量值	参 数	量值
燃料质量/mg	3	热点半径 /μm	57	冷燃料的最大比熵/(J/g·keV)	4×10^8
燃烧分数/%	33	热点温度/keV	5	已压缩燃料的内能/kJ	93
终态面质量密度 ρr/(g/cm^2)	3	费米能/eV	1390	靶丸动能/kJ	> 190
终态质量密度/(g/cm^3)	970	燃料压力/TPa	20000	内爆速度/(km/s)	> 350
终态外半径/ μm	88				

这些参数中最关键的要点是,必须把稠密冷燃料层加速到明显超过 300km/s 的速度,让它们提供为形成中心热点点火所需的能量。表 9.2 中压缩燃料所需的能量(内能)比表 9.1 提高了 3 倍,从约 30kJ 变为大于 90kJ。如果燃料质量增加而效率没有变化,则实现中心热点点火的聚变燃烧所需能源将是先压缩冷燃料然后用其他方法点火方案的 3 倍。这就是快点火方案具有潜在吸引力的原因。

习题 9.10

中心热点设计方案的一种考虑是,应当把压力从所需最低值 1350TPa 提高多少?提高压力可以减小热点尺寸,但是需要增加为达到更高压力所需的能量。保持对密度和 ρr 的上述约束条件,试考虑热点中压力标度关系的作用。

内爆过程中热点从 $p\mathrm{d}V$ 功以及最后从聚变燃烧中获得能量,同时通过电子热传导和辐射损失能量。使用类似于式(9.27)的能量平衡方程,可分析内爆过程中能量平衡关系,但此时 ρ_h 不再是常量。正如点火情形那样,相对较冷的热点因辐射而损失较多能量,相对较热的热点因热传导而损失较多能量。为了使构成热点的能量成本为最低,在其密度和温度方面应当进行优化设计。内爆过程中热点密度与温度的关系离开这个优化途径越远,所需要的能量越大。这将影响到冲击波时间历程优化和靶丸中注入的初始气体等细节问题。

中心热点点火设计方案的可选择范围相当有限。例如,可以变动燃料总质量,然后推断相应的燃料终态压力、冷燃料终态密度、内爆速度等参数。即便如此,当考虑应如何选择达到上述最终内爆速度的可能途径、并且避免 9.3 节所述缺点时,挑战性的优化问题仍然有待解决。未来在技术细节方面的新发明和新发现,将为优化设计的改进提供潜在可能。

9.2.4 快点火

与上节所述情形比较,一般说来快点火是复杂得多的问题。人们现在已有控制热点参数的潜在可能,原则上能够通过加热能量、功率和半径(被加热的圆柱形区域半径)的变动使系统优化。此外,还有很多加热的途径。一种是采用电子束(或者离子束、光子束),另外还可应用稠密物质弹丸的撞击、冲击加热稠密的燃料。Jim Hammer 曾经建议,使用磁场形成的磁泡加热。

本节首先讨论点火所需的热点性质,然后讨论造成这些性质的一些方案。最先发表的关于快点火的论述是 Tabak 等人的工作,这里引述的是 Atzeni 专著中的内容。

由于快点火开始于接近等容的状态,引用图 9.6 中曲线计算的分析方法,但采用更细致

研究得到的更精密的数据。温度 12keV 之下点火所需的 p_hR_h 最低值为 0.5g/cm²。如果把这些数据看作最佳热点的参数值，就能估算点火所需的沉积于热点之中的能量值 E_{ig}，这里假定热点的几何形状是长径比等于 1 的圆柱体。由于

$$E_{ig} = \pi R_h^3 \rho_h (1 + Z) k_B T_h / A m_p$$

得到此情形中 $E_{ig} = 36(\rho_h(100\text{g/cm}^3))^{-2}(\text{kJ})$。由于 ρ_h 达到 200g/cm³ 以上似乎是办得到的，又因为简单的标度关系计算表明，产生中心热点的燃料能量的成本大于 60kJ。因此，达到上述参数值还是很有希望的。但是，辐射、热传导和流体力学运动所造成的能量损失，都会使得 E_{ig} 显著增加。

此外，上面所设的参数值并不一定是最佳的热点参数。当 ρR_h 增大时，所需要的温度降低；当 $\rho R_h = 1.2\text{g/cm}^2$ 时，所需温度降为 4keV。再假如人们能够容易有效地产生半径小于 $(0.5/\rho)$(cm) 的能束，$(0.5/\rho)$ 是该能束在预期终态密度燃料中的吸收深度，大约等于燃料的半径，这样就可以得到具有最低 ρr 值的高温热点。相比之下，如果人们能够有效地产生的能束具有高于 1cm²/g 的吸收深度，则优化设计应是把较大半径的热点加热到较低的温度。使得问题更加复杂的是，加热能束的持续时间可能被严格限定或者可以变动，而且能束的最高可用功率也是受限制的。前面已经提及如何有效地产生和沉积加热能量，这个问题很可能是决定快点火在聚变研究中能否具有生命力的关键技术。

处理上述复杂性的一种方法是把问题分解为各个部分，Atzeni 就是这样做的。试问怎样的点火条件可满足更为普遍的一组假定？他假设有一个半径为 r_b 的能束，功率为 W_b，辐照度 I_b，它们之间的关系是 $W_b = I_b \pi r_b^2$。该能束辐照一个密度不变的燃料体，燃料中该能束的吸收深度为 R_b。然后，Atzeni 使用二维数值模拟计算得到点火所需的参数。当 $0.15 \leq R_b \leq 1.2\text{g/cm}^2$ 时，点火需要的各参数是

$$E_{ig} = 140(\rho(100\text{g/cm}^3))^{-1.85}(\text{kJ}) \tag{9.35}$$

$$W_b = 2.6 \times 10^{15}(\rho(100\text{g/cm}^3))^{-1}(\text{W}) \tag{9.36}$$

$$I_b = 2.4 \times 10^{19}(\rho(100\text{g/cm}^3))^{0.95}(\text{W/cm}^2) \tag{9.37}$$

式(9.36)和式(9.37)表明，点火所需能束的半径为 $60(\rho_h(100\text{g/cm}^3))^{-0.975}(\mu\text{m})$，这个数值在实际中也许可以做到，也许并不现实。这些参数公式适用的吸收深度范围很宽，反映了两个方面的平衡：当吸收深度较小时，只是通过热传导作用形成温度较低的较大体积后过热热点才导致点火的事实；以及当吸收深度较大时，加热能量散布于较大区域，需要增加加热能量的事实。这种更加现实的分析所产生的影响是，应把快点火情形的最佳燃料终态密度提高到 300g/cm³ 左右，这样可使得点火需要沉积的能量小于 20kJ。由于最重要问题是，究竟要花费多少能量才可以得到预定的沉积能量。在目前讨论层次上，上面的数据只是一种猜测。能量沉积的效率越低，用于得到所需热点密度的能量越大。接下来的问题是，能束的半径是否可能小到所需要的尺寸？可以看到，热点火确实是一个涉及很多约束(限制)条件与物理、技术两方面相互影响的挑战性问题。

下面考虑以所需的极高辐照度把所需能量发送到稠密燃料之中的若干可能方法。一种简单的途径是把一束非常强的激光束对准已压缩的燃料，希望这样能够导致很充分的能量

耦合。作为此用途的耦合源最可能是由强激光束产生的相对论电子束。事实上，相对论电子束可以由很强的超快激光产生（见第 11 章）。细节问题如下：能否产生足够多的电子？能否以实际可用的能量做成这件事？能否在相当靠近稠密燃料表面处产生电子束，以便它们能够有效地耦合于燃料中？稠密燃料层周围是难以对付的较大量的喷溅等离子体，影响燃料区对激光束的吸收。针对这种情况，人们提出各种方案。一种是在注入加热用的强激光脉冲之前，采用激光预脉冲把等离子体外层钻一个孔；另一种替代方案是，使嵌有高 Z 物质锥壳的靶丸内爆，在锥壳内部提供一个没有喷溅等离子体的、可注入加热用的能束的通道区域。即便如此，电子束通常具有较大的吸收深度（虽然在相关能量范围中不如光子束的吸收深度那样大），而且还受到成丝现象和其他不稳定性的干扰。这些问题导致人们考虑使用更重的粒子束。

广泛说来，较重的粒子可以是质子、轻离子或重离子，还可以试探把相对较少的粒子加速到较高能量或者把相对较多个粒子加速到较低能量。例如在高能量极限下，超快激光实验中已观察到质子束的产生（见第 11 章）。如果可以向这些能束注入足够多的能量，并且能使它们聚焦，则可用作为上述相对论电子束的替代。另一方面，在低能量极限下，可以试探用具有足够动能的固体物质塞子撞击靶燃料，以至于可由冲击波加热引起点火。如果质子不容易被充分吸收，则可考虑其他设计方案，把轻离子或重离子的极高辐照度施加于靶燃料上。本书编写时虽然人们已提出许多方案，但是还不清楚哪一种方案可能胜出。

最后在结束关于快点火的论题时，还应提及其定性上的主要优点之一。基于烧蚀压力对称性和瑞利－泰勒不稳定性影响这两方面的原因，我们认为惯性约束聚变内爆适宜于采取球形构形。然而采用中心热点点火方案时，对球形内爆不大的偏离就可使得热点过冷或者过于卷曲而不能点火。相比之下，快点火时人们并不在乎内爆燃料靶丸中气体芯是什么形状，也不用关心内爆的非对称性有多大。只要能够把能量输送到应使部分燃料点火的部位，聚变燃烧就能够继续下去。

9.3 困境和问题

10TPa 左右的压力比较容易产生。从式(8.42)可以看出，只需用波长 0.35μm、辐照度 $1.6\times10^{15}\,\mathrm{W/cm^2}$ 的激光束照射靶物质，就可得到这样高的压力。内爆加速过程中，初始半径 3.3mm 的靶丸在 2ns 辐照时间内得到的激光能量约为 500kJ。冲击波形成和传播所需的激光能量，将使其总能量比上述值还要增大若干倍。另一种替代方法是使用温度为 220eV 的 X 射线，在黑腔中产生 10TPa 的压力，这似乎也不是非常困难（见第 8 章）。事实上，如果在寻求可用的更高压力方面不存在限制因素，达到这样的压力也许相当容易。但是如下面所讨论的那样，惯性约束聚变面临着三个主要问题的挑战。

9.3.1 瑞利－泰勒不稳定性

惯性约束聚变内爆过程在大部分时间内是瑞利－泰勒（RT）不稳定的。较早阶段中（通常称为加速阶段），低密度灼热烧蚀等离子体中的压力高于被加速的密度较高、较冷燃料层

中的压力，形成了可能激发 RT 不稳定性的密度梯度与压力梯度反向的条件（见第 5 章）。可以形象地说，低密度等离子体推着较高密度等离子体向内加速运动。在减速阶段开始之前很久，加速阶段就已结束，此时靶丸中心的低密度气体顶住向内运动的较稠密的燃料层使之减速，这里再次出现密度梯度与压力梯度反向的情况，构成 RT 不稳定的系统。这些情况使得我们必须了解，瑞利－泰勒（RT）不稳定性给惯性约束聚变内爆设置了怎样的限制。

可简捷地估计 RT 不稳定性增长的 e 倍数 $\gamma_{RT}t$。冷燃料层两边都是密度陡然变化的界面（发生不稳定的时间不同），假设这样的界面处 e 倍增长率 $\gamma_{RT}=\sqrt{A_n kg}$，界面两边密度变化较大，可以认为 $A_n\approx 1$。最不稳定的波长与 RT 扰动增长期间靶壳的厚度 ΔR 有关，波长短于 ΔR 的扰动将会增长并发生饱和，但靶丸结构不会受到很大扰动。波长大于靶壳厚度 ΔR 的扰动将使靶丸扭曲变形，并可能降低内爆靶丸的致密性。但是与波长相当于靶壳厚度 ΔR 的扰动相比，上述两种扰动的影响程度和增长率都比较低，后面这种扰动发展得很大时足以摧毁整个靶丸结构。记 $k=2\pi/\Delta R$，设加速度和减速度都近似为常数，则有

$$R/2=(1/2)g(t/2)^2$$

式中 $t\sqrt{g}=2\sqrt{R}$。

这些参数意味着

$$\gamma_{RT}t=\sqrt{8\pi R/\Delta R}$$

式中 $R/\Delta R$ 为靶丸飞行中的长厚比（IFAR）。

式（9.23）给出其值的初步估计。使用四个左右的冲击波把压力提高到 10TPa，把燃料层密度提高 100 倍左右，这样得出对靶丸飞行中的长厚比的初步估计值为 200。但应注意这里忽略了冲击波合并后出现的减压缩情况。若取 IFAR 为 100，从上述计算可知 RT 不稳定性增长约 50 个 e 倍数。如果在所考察的波长下噪声（初始扰动）对应于原子的位移（约 0.1nm），而且不考虑非线性饱和及球面效应，这将意味着扰动振幅可以增长到 1km。但是这些波长下可以接受的扰动增长量只是几个 e 倍数（一定不能大于 10）。由此得出结论，如果出现具有这样增长率的 RT 不稳定性，惯性约束聚变将不会成功。

幸运的是，实际上 RT 不稳定性的增长率低于 $\sqrt{A_n kg}$，因为出现扰动增长的界面处上密度不是陡然变化的，而是有一个长度尺度 L 的变化区。由于烧蚀使得初始扰动正在增长中的物质向外迁移，也会导致加速阶段中扰动增长进一步大为降低。假设烧蚀使物质以某个特征烧蚀速度 V_A 迁移（这不是喷射速度，而是物质流动离开稠密物质界面的速度），再回想起 RT 模式是具有指数式贯穿深度 $1/k$ 的表面波。给定无烧蚀时的增长率 γ_{RT}，也就设定了一个时间尺度 $1/\gamma_{RT}$，可以预期当 $1/k\sim V_A/\gamma_{RT}$ 或 $kV_A\sim\gamma_{RT}$ 时，烧蚀将抑制住 RT 不稳定性的增长。在相差一个不大的数字因子的意义下，数值模拟计算和细致理论分析确实都已看到这种情况。另一个表示不稳定性净增长率的标准表达式为

$$\gamma_A=\sqrt{\frac{kg}{1+kL}}-\beta kV_A \tag{9.38}$$

式中对于 X 射线烧蚀，$\beta\approx 1$；对于激光烧蚀，$\beta\approx 3$。烧蚀速度 V_A 是物质离开 RT 不稳定区域的速度，相等于质量烧蚀率与烧蚀层密度的比值 $\dot{m}/\rho_2$，这里 ρ_2 为已受冲击烧蚀层的质量密

度。烧蚀速度可以根据第 8 章的论述估算。βV_A 的数量级约为 5×10^5cm/s，而 g 的数量级为每纳秒 3×10^7cm/s，也就是 3×10^{16}cm/s^2。对于十分陡峭的界面，最大不稳定波数 $k=g/(\beta V_A)^2=10^5\text{cm}^{-1}$，对应波长约 1μm。由于加速阶段中燃料层厚度只有几微米(经一系列冲击压缩之后的厚度)，波长与燃料层厚度差不多的扰动将被烧蚀强烈致稳。

应当明白，为了在烧蚀阶段有把握地控制住 RT 不稳定性，细心的 ICF 设计必须考虑到所有可能的 RT 扰动模式。如果烧蚀单独的致稳效应还不够充分，应考虑采用增加烧蚀面长度尺度 L 的措施。把 L 增大几微米，可以发挥重要作用。增大 L 的一种方法是，把靶丸外表面设计得可以产生贯穿烧蚀层的预热作用，但这种预热又不能很强烈，不至于到达和加热燃料层。这种预热在原理上可以用电子束或 X 射线做到，本书编写期间这种设计倾向于使用 X 射线。增大 L 另一种方法是，使用可以很快演变为爆炸波的短暂脉冲加载，向燃料层中射入第一个冲击波。当该爆炸波向靶丸内运动并发生衰减，它在烧蚀层外层中产生的熵增较大，到达燃料层以后所产生产的熵增则较低。不论上述哪一种方法，也许还有其他的方法，对于激光直接烧蚀的聚变研究都很有好处。

减速阶段中几乎不会发生烧蚀，因此只有依靠 L 的作用才能降低 RT 扰动的增长。幸运的是，L 趋向于大到足以降低不稳定性的增长。这是由于靶丸内部被行将合并的几个冲击波加热，已经比冷燃料热得多。作为对这种加热的响应，电子把热量输运到冷燃料的内层中，该层接着发生膨胀，从而增大了燃料层内边界处的长度尺度。Lindl 做了一个典型的估算，燃料层内边界处 L 大约是其终态半径的 15%，得到的结果是：减速阶段中 RT 扰动的增长可限制于大约 3 个 e 倍数。按照这个倍数增长的初始扰动幅度取决于两个因素，即燃料层内界面的粗糙度和该处因烧蚀阶段中 RT 扰动增长而形成的扰动量。物质层外表面与内表面之间不稳定性扰动的耦合，称为**馈通**。

所产生的实际净效果也许是，*RT* 不稳定性可以被限制到足以使聚变成功的相当低的程度，但是这样做实际上只是把困难转移到对靶丸各个表面的初始粗糙度和对烧蚀压力的平滑性等约束条件上。正如第 8 章中所述，探索受激光辐照表面上辐照度平滑化的方法，其原动力来自惯性约束聚变研究，特别是需要降低激光烧蚀形成的结构对 RT 不稳定性造成的初始扰动。现在已能对约束条件做出准确估计，而且通过改进靶丸设计和增进对 RT 不稳定性的理解，有可能使扰动增长不至于那么严重。任何产生聚变的途径，无论采用激光、Z 箍缩还是太阳光进行驱动，总会出现 RT 不稳定性的问题。

习题 9.11

估算习题 9.6 所述以太阳光驱动的聚变系统中，RT 不稳定性扰动的增长量。

9.3.2 对称性

对于球坐标中结构所做的任何分析，人们很自然地采用球谐函数来描述。球谐函数构成一个完备的基集，通过把结构分解为模式的途径描述整个系统，这些模式在 360°向角或者在 90°极角范围内具有整波长数的模数。幅度增长最大的 RT 扰动模式具有数十的模数。若无任何致稳作用，最不稳定的模数还要大得多。如 2 或 4 之类的低模数，对应于较长距离上烧蚀压力不均匀所造成的结构变化。例如，若靶丸两端(即“两极”)受到的驱动比靶丸中部(即“赤道”)强得多，则内爆靶丸将被压扁得像薄饼那样。这样的内爆靶丸确实可称为薄

饼形的,或者说是压扁的。相比之下,如果赤道部分比两极部位受到更强烈的驱动,则内爆靶丸变形成为细长管子形状,普通对此的比喻是腊肠形的。无论哪种情形,在主要的立体角范围中 ρr 值将低于预期值,从而可得到的聚变燃烧产额也将低于期望值。惯性约束聚变若要成功,一定不能把靶丸弄成早餐中薄饼、腊肠之类模样。

对靶丸制备所需的均匀度可做简单估算如下:

通过内爆之后燃料区的最终半径 R_f 大约缩小为其初始半径 R_i 的 1/20。试问怎样的速度差 ΔV 才能引起在某一角度处燃料层的最终半径成为另一角度处到达的最终半径值的 2 倍? 为了回答这个问题,估计燃料层达到完全内爆所需的内爆时间为 R_i/V,上述问题相当于问什么时间可以达到下面情况

$$\Delta V R_i / V = R_f \tag{9.39}$$

这样,为了维持终态的不对称性低于 2 倍,需要限制内爆速度的相对变化量 $\Delta V/V$ 降到低于 $(R_f/R_i) \approx 5\%$ 的程度。由于内爆速度正比于烧蚀压力,因此烧蚀压力的均匀性也必须达到同样程度。实际上 2 倍的不对称性已经太大了,更加现实的限制是,烧蚀压力的均匀性必须达到相对偏差低于 1 % 的精细程度,至少在时间平均意义上是如此。这是一个必须达到的限制条件。激光直接烧蚀的聚变途径可以采用多光束辐照,即便如此,也只会有少数几条光束在靶丸表面给定点处重叠汇合。用黑腔辐照聚变靶丸的方案中,激光束进入孔或者从 Z 箍缩区进入黑腔的能流,构成了与 X 射线加热腔壁发出辐射的明显不对称性。这种由能源造成的不对称性,必须通过细心的设计予以补偿。所有技术途径中当靶丸开始运动时(以及等离子体受到激光照射也开始运动时),辐照的对称性可能发生变化。如同 RT 不稳定性的情形,关于对称性的要求对惯性约束聚变设置了很难满足的限制条件。如果不对内爆对称性情况进行测量,并且精细调节靶丸表面各处的辐照度以产生合适的球形内爆,则这些限制条件看来是无法满足的。

历史上有一件奇怪的事情值得在这里介绍一下。20 世纪 70 年代中,美国的惯性约束聚变计划有些部分企图在黑腔中达到聚变,但未对内爆的对称性进行任何测量。这项努力失败了,因为中子产额一般要比预期值低 100 倍。只是在内爆对称性以及聚变系统其他重要方面得到测量之后, NOVA 激光器上的实验才首次使燃料密度有可能达到其液体密度的 100 倍以上,而且开始看到中子产额测量值并不远低于一维数值模拟计算的预测值。这种工作要求实验与数值模拟之间的密切合作,详细进行实验测量,并利用数值模拟去理解所测到的实验数据的含义。在那个年代之前,人们过于依赖数值模拟编码计算,不进行校核性的实验测量,过于相信这些编码计算反映了真实物理情况。一个从事数值模拟计算的优秀科学家,应该了解数值模拟是一种很重要的工具,但不能完全代表真实情况。本书作者认为,许多惯性约束聚变研究属于保密工作的事实,是它在 70 年代遭遇失败的重要原因。在公开的科学会议介绍结果以及在学术刊物上发表论文的主要好处,在于这些活动能够促进正在进行的科学研究工作提高学术质量。

9.3.3 激光 - 等离子体不稳定性

第 8 章中已经见到,激光 - 等离子体不稳定性使激光发生散射,并且形成高能(超热)电子的集居。在 Z 箍缩驱动的聚变实验中不出现这类不稳定性,但仍存在形成高能电子集居的潜在可能。某些场合下,这些不稳定性(特别是受激拉曼散射和受激布里渊散射)可以

把大部分激射光转变为散射光或高能电子。另一种不稳定性 —— 成丝现象,能够把激光束分裂为许多细丝,可能使得光的传播途径发生变化,或者引发其他的不稳定性。

这些过程具有三种负面后果。首先讨论这些后果,然后考虑如何控制这类散射量的问题。

首先,有关数值模拟表明这些受激散射过程降低了激光与聚变靶丸的耦合效率。如果入射激光的一半朝激光源方向散射回去,则一开始就需要把原来的激光能量加倍才能达成聚变。这样的能源(或驱动器)十分昂贵,以至于散射损失将成为一个主要问题。

其次,受激散射和成丝现象可能使直接驱动靶丸表面上以及黑腔内壁上激光能量的沉积位置发生变动,从而可能影响内爆的对称性,因为这种变动可能导致在未曾预料的地方产生烧蚀压力或软 X 射线。如果这些过程产生的散射光在量和方向方面始终一致,则可以通过一系列测量对称性的实验,把上述位置变化导致的变动纠正回来。若能这么办当然好,但是人们观察到这些散射过程的行为在一些状况下是重复性的,在另一些状况下则是无规则的,因此无法把它们造成的变动调整回去。

再者,受激拉曼散射和衰变不稳定性产生高能电子,这些电子的部分能量传给了聚变燃料,使其加热并增熵。对于熵量的限制为 4×10^{8}J/g · keV,而且这里大部分熵增应属于压缩过程所造成的。为了估算,假设预热造成的熵增应限制于 10^{8}J/g · keV 以下,这个量与预热后燃料的温度有关,因为 $ds = dq/T$。一系列设计必定涉及与时间有关的预热过程。作为粗略的估计,假设当最后的冲击波正在产生时发生预热,此时压力已经达到 3TPa,燃料密度约 5g/cm^3,费米能量约 40eV,还可以假设此时燃料温度约 40eV。在这些假设条件下,如果 3mg 燃料吸收了 12kJ 能量,则可能增加 10^{8}J/g · keV 的熵量。如果靶丸终态能量为 140kJ,火箭式推进的效率为 10%,火箭燃料释放能量的效率为 50%,则驱动器需要的能量约为 3MJ。因此,若驱动器能量中约 0.3% 以预热形式沉积于燃料之中,则燃料的熵增将高于所规定的值,燃料的总压缩度将低于预期值,从而聚变的增益也将降低。

这些看来似乎是相当困难的限制条件,实际上并没有如此严重。唯一起妨碍作用的能量是对燃料预热的能量。但是为了能够到达燃料层,这些高能电子必须先穿透烧蚀层。那些不经多少衰减就能穿透烧蚀层的电子(其能量应明显高于 30keV),同样也能穿过低 Z 的燃料层而不会沉积很多能量。那些穿不过烧蚀层的电子,自然更不会加热燃料。

温度为 30keV 的超热电子分布的平均射程约 3mg/cm^2,大致相当于烧蚀层初始的面质量密度。也就是说,能量低于 30keV 的电子不大可能到达燃料层。另外,由于稠密物质中电子的输运是扩散性的,可以向外散射至靶丸的邻区中,许多电子把它们的能量沉积于其他地方,尤其是黑腔辐照聚变靶丸的情形。与细致的研究有关,即使驱动器能量有约 1 % 或许更多一些成为超热电子的能量,人们期望惯性约束聚变的高增益靶丸构形仍可取得成功。当上述耗于高能电子的能量比例达到 10%,效率问题将同预热问题一样受到重大关注。总之,超热电子的产生必须加以限制,但是没有必要使其完全消除。

如果要使惯性约束聚变实验成功,十分明显的是不能允许任何一种激光 - 等离子体不稳定性增长到较大的幅度。从根本上看,控制这些不稳定性有两种方法。一种是使用短波长(紫外)激光作为驱动源,具有两方面的益处。如表 8.1 所示,所有不稳定性的增长率都

正比于电子在激光光波电场中的振荡速度。而该振荡速度的平方正比于激光辐照度与激光波长平方的乘积(见式(8.9))。因此,缩短激光波长就可以明显降低上述各种不稳定性的增长率。另外,波长较短的激光光波可使碰撞效应变得更加重要,因为临界密度得到提高,而所有激光－等离子体相互作用过程都发生在更高的电子密度之下。电子临界密度较高的一个附带好处是,激光能量将被更多粒子所分享,使得等离子体变冷,从而更加提高了碰撞的重要性。再进一步说,紫外激光产生的等离子体的强碰撞性质,导致激光可在明显低于临界密度的低密度下被吸收,致使临界密度面处发生的过程变得不大重要。惯性约束聚变研究中使用短波长激光的必要性,是经过艰巨历程才被确认的。使用红外激光(波长为 1μm～10μm)的聚变研究计划经受了高能电子造成的严重问题,从而导致了与这些令人担心的惯性约束聚变驱动器候选者分离的漫长过程。

另一种途径是主动抑制这些不稳定性或者至少提高其增长阈值。如果高电子临界密度和碰撞效应对抑制不稳定性相当有效,那么第二条途径就没有必要了。各式各样控制不稳定性的方案不属于本书的考察范围,而且对于具体的惯性约束聚变设施而言,一般也没有实际采用的可能性。从基本道理看来,可以通过增加驱动激光束的带宽,抑制涉及离子波的不稳定性(如受激布里渊散射)。但这种方法对于抑制衰变不稳定性或受激拉曼散射却是不实际的。可以设法使变化较陡的密度剖面光滑化,从而限制受激拉曼散射的增长,因为在较平缓的密度分布下这种散射很难发展。

双等离子衰变一般仅发生于 1/4 临界密度区附近,也许成为或不成为问题。如果这种不稳定性真的成了问题,则可以限制惯性约束聚变实验中使用的辐照度。本书编写时人们还不清楚,惯性约束聚变研究是否确实需要主动控制激光－等离子体不稳定性。

第 10 章　实验天体物理学

第 1 章中我们展望了高能量密度物理与天体物理学之间的潜在联系，有些联系已经得到揭示，这是由于人们已能在实验室内造成天体物理中真实存在的环境条件，并能测量这些实验系统的性质。第 3 章中已经见到物态方程领域的例子，第 6 章中则是不透明度方面的例子。由于高能量密度实验能够形成天体物理系统相关条件下的流体动力学或辐射流体力学行为，其他方面的联系也在探讨之中。依靠这种手段，人们可以依据从实验结果到天体物理过程的严密推理，探讨天体物理中的动力学过程。即便如此，由于天体物理现象涉及的时空尺度要比实验室实验遇到的尺度高出许多个量级（有时达到 25 个量级），人们也许怀疑两者之间是否能进行可信的比较。能否进行和怎样进行这种比较，属于标度关系（或缩比关系）问题（译注：本章中主要指缩比实验应满足的参数比例关系）。当一个实验与一个天体物理系统可以直接相互比较时，则称该实验是适当缩比（well scaled）的。本章关注怎样能够建立联系实验室过程与天体物理过程之间的标度关系，许多内容取自本书作者和 D. D. Ryutov、B. A. Remington 等在 1999 年至 2006 年间发表的一系列论文与评述。

本章开始时专门对于这个研究领域作一些历史评述。1964 年激光刚开始应用时，J. Dawson 提出一个在等离子体物理方面十分聪明的想法，即激光可能在天体物理学研究中很有用处（参见 Dawson 的论文）。使用那个时代的激光器和实验技术，人们可以使物质颗粒很快汽化飞散。如果拍摄一张照片，有人也许惊讶地认为这是一个爆炸的星球，但是这样的图像其实与真实星球的爆炸并无关系。从那时起经过 20 世纪 80 年代，激光器和实验技术的进步开启了使用激光研究天体物理性质和过程的新阶段。90 年代初期开始了两个领域的探索，也就是第 3 章和第 6 章中论述的有关物态方程和不透明度的工作。在天体物理过程研究的早期工作中，有美国海军研究实验室（NRL）进行的与磁层中和天体物理中爆炸波有关的激光实验（分别参见 Ripin 等和 Grun 等的论文）。1993 年 Takabe 发表文章，首次专门建议利用激光研究超新星中流体动力学过程的问题。现在有几篇评述性文章描述了实验天体物理学的早期工作（参见论文：Drake，1999；Remington 等，1999，2000；Takabe，2001；以及 Remington，Drake，Ryutov，2006）。

本章的任务是讨论指导旨在增进我们对天体物理过程理解的实验室实验的一些基本原理，尤其关注于高能量密度实验能够容易阐述的领域——流体动力学和辐射流体力学。在任何具体实验场景中都会提出三项工作：找出问题的主要标度关系（指明有关的无量纲特征参数）；阐述实验所能起到的独特贡献；验证计算机数值模拟编码。

标度关系研究应当回答进行与真实天体物理系统在物理量尺度方面完全缩比（completely well scaled）的实验是否可能，或者按照一定的（而不是所有的）关键性无量纲参数相等条件进行适当缩比的实验是否可能。

实验所能起到的独特贡献工作在于，实验能否解决在天体物理场景中很重要，但当前理

论研究或者数值模拟又回答不了的问题。下面将讨论流体动力学领域的两个例子作为说明。

计算机编码的验证问题是,能否规定一个实验用来对一个天体物理学数值模拟计算编码进行有效并且有意义的试验,能否判断整个系统是可以当缩比的或者是具有独特贡献的。实际上,这三项工作之间不存在所需要的联系。第三项工作(计算机编码验证)通常最容易明确,而且往往是任何具体实验工作的出发点。

下面转向流体动力学领域,首先讨论相关的标度关系问题。本章将以较长的篇幅讨论流体动力学实验普遍的标度关系问题,因为流体力学是说明该问题的极好例子;然后讨论两类有关的实验,分别探讨超新星中的流体动力学不稳定性和冲击波造成粉粹破坏现象;再以辐射喷流作为具体例子,考虑辐射流体力学系统的标度关系。在往下讲述之前应当指出,天体物理过程的实验室研究并不限于高能量密度系统。那些不需要高马赫数流动或辐射的过程,也可以在低能量密度条件下研究。本书编写期间有一个例子,即磁重联问题是很多研究组正在做的工作,这是行星际和恒星际的磁化等离子体中产生高能粒子的来源。另一个例子是磁通管动力学行为的研究。毫无疑问,以后还会见到更多的低能量密度情形的例子。

10.1　流体动力学系统的标度关系

首先考虑可以用流体动力学方程组描述的过程的标度关系。在纯流体动力学系统的特殊情形中,可以得出一些对于所有实验都成立的标度关系的普遍结论。本节推导这些结论并讨论如何把它们应用于各种具体的情形。在 Ryutov 等(1999,2001)以及 Ryutov、Drake 和 Remington 的工作中,读者可以见到更详细的讨论。

读者也许感到奇怪,为什么人们关心具有流体动力学行为的系统之间的比较?我们首先考虑这个问题。人们似乎理解流体动力学,但更确切地说理解的是适用于流体动力学的方程组。这些方程组是非线性的,因此许多场合下能够直接引起很多复杂性,造成下面两种后果。

首先,这意味着存在很多复杂问题难以在计算机模拟中成功表述。后面关于超新星的讨论中可看到这类问题的一个例子。另一个例子与 5.8 节内容中湍流的发生有关。天体物理流动的雷诺数 Re 通常远高于能够引发湍流混合转变的值 10000。相比之下,由于数值黏性,在模拟中等复杂程度的系统时计算机模拟甚至还达不到 $Re \approx 10000$。另外,湍流模型过于不确定,以至于无法知道哪一种湍流综合描述方法是最好的。湍流的另一方面问题是,还不明白演化系统中的精细结构是否会显著影响该系统的大尺度演化,即文献中所称的"随机反向散射"过程(参见 Lindl、Piomelli 等的论文)。为了陈述这些作用在天体物理学场景中的存在和重要性,需要进行设计巧妙的适当缩比实验。

其次,真实流体动力学行为的复杂性意味着,即使对于原理上可以成功模拟的过程来说,计算机编码的验证仍是至关重要的。现在还不明白,人们是否很好理解了应如何数值模拟流体动力学系统强非线性的演化过程?如像微分方程的级数解那样,计算机数值模拟只是对待解的物理方程组真实解的一种近似。但与级数解不一样的是,很难判断这种计算机近似解中含有的误差。另外,相互独立的数值模拟经常得出不同的结果(参见 Glimm、

Grove、Li 等的论文),尤其对于尺度低于初始扰动波长 10% 的计算模型(Kane 等,1997)。由于这些困难,对于一定类型问题计算结果良好的编码,对于其他问题也许算得不好。因此对于每个具体的动力学过程来说,与所研究动力学行为问题直接相关编码的验证十分重要。

现在转向流体动力学标度关系的具体内容。考虑服从欧拉方程式(2.1)~式(2.3)的系统,而且是这个方程组的初值问题。给定流体密度、压力和粒子速度的初始空间分布如下:

$$\rho|_{t=0} = \rho^* f(\boldsymbol{r}/L^*),\ p|_{t=0} = p^* g(\boldsymbol{r}/L^*),\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = u^* \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}/L^*) \tag{10.1}$$

式中 L^* 为所考察问题的特征空间尺度,带星号"*"的量表示某特征点处该参数的值。无量纲函数(以及矢量函数)f、g 和 $\boldsymbol{h}$ 幅度绝对值的量级为 1,它们决定了各流场量初始分布的形状。这里出现确定初始条件的四个有量纲参数,即 L^*、ρ^*、p^* 和 u^*,再引入相应的无量纲变量(以上弯线"~"记号表示):

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/L^*,\quad \tilde{t} = \frac{t}{L^*}\sqrt{\frac{p^*}{\rho^*}},\quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*},\quad \tilde{p} = \frac{p}{p^*},\quad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\sqrt{\frac{\rho^*}{p^*}} \tag{10.2}$$

用上述无量纲变量表示方程式(2.1)~式(2.3),可以看到方程组形式相同,只是所有变量被带有上弯线记号的相应无量纲量所替代。以无量纲变量表述的初始条件形式如下:

$$\tilde{\rho}|_{\tilde{t}=0} = f(\tilde{\boldsymbol{r}}),\quad \tilde{p}|_{\tilde{t}=0} = g(\tilde{\boldsymbol{r}}),\quad \tilde{\boldsymbol{u}}|_{\tilde{t}=0} = u^*\sqrt{\frac{\rho^*}{p^*}}\boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{r}}) \tag{10.3}$$

现在考虑两个不同的系统,一个是天体物理系统,另一个是实验室系统。如果两者的无量纲函数 f、g 和 $\boldsymbol{h}$ 相同,并且问题中出现的唯一的无量纲参数 $u^*\sqrt{\rho^*/p^*}$ 也一样,则这两个系统的初始条件完全相同。换言之,只要上述这个无量纲参数不变,则两个系统的初始状态是几何相似的(即函数 f、g 和 $\boldsymbol{h}$ 是相同的),满足上面条件的任何两个流体动力学系统将具有同样的无量纲方程组和无量纲初始条件。这意味着在缩比意义下这两个系统的演变完全相同。

习题 10.1

试证明在上述变换下欧拉方程组实际上是不变的。

相似性论证通常用于保证具体问题所考察的某参数在两个系统之间成缩比关系(相应的无量纲量相等),例如天体物理喷流中辐射冷却的归一化空间尺度(10.5 节),或者等离子体装置中的能量约束时间(参见 Connor 和 Taylor 的论文)。但是我们的要求还高得多,希望在适当的缩比初始条件下,两个系统的全部动力学演化过程也是相似的。

对于决定系统演化的四个带星号参数只有一个约束条件,第二个系统的长度尺度 L^* 可以任意选择,三个参数 ρ^*、p^* 和 u^* 之中的两个可以任意选择。然后选择余下一个参数的大小,使得第二个系统的 $u^*\sqrt{\rho^*/p^*}$ 与第一个系统的此量相等(即唯一的约束条件),就可以使第二个系统的性态与第一个系统相似。Ryutov 等(1999)把这种相似性称为**欧拉相似性**,把参数 $u^*\sqrt{\rho^*/p^*}$ 称为**欧拉数** Eu。重要的是,欧拉相似性不但包括了欧拉方程组的光滑

解，而且也包括了含有冲击波以至多次冲击波的间断解。关于后一断言的证明可以参阅 Ryutov 等人的论文(2000)。

在天体物理客体(如超新星爆炸)和相应的实验室实验中，经常出现一种十分简单的特殊情形。假设有一个系统具有任意分布的初始密度、某种初始压力剖面以及大小相等于或略低于声速的初始粒子速度。再假设有一个平面(柱面、球面)活塞以远高于初始声速的速度向系统中推进。作为例子我们考虑球面活塞的情形，其运动规律可描述为

$$r = L^* q_P(t/\tau^*) \tag{10.4}$$

式中 τ^* 为活塞运动的特征时间(在此时间内活塞的移动距离约为 L^*)；无量纲函数 q_P 及其变元 t/τ^* 的大小都是 1 的量级，下标 P 表示“活塞”。同以前一样，初始密度分布为$\rho|_{t=0} = \rho^* f(r/L^*)$，函数$f$的大小为 1 的量级。

在活塞前面传播的强冲击波使得等离子体转变为新状态，其特征压力为

$$p^* \approx \rho^*(L^*/\tau^*)^2 \tag{10.5}$$

特征速度为

$$u^* \approx L^* \tau^* \tag{10.6}$$

这个状态实质上与这个十分强的冲击波前方介质的原始压力和速度无关(参见第 4 章)。

如果可使第二个系统中诸尺度因子 τ^*、L^* 和 ρ^* 任意变动，但是式(10.3)中函数f和式(10.4)中函数 q_P 仍与第一个系统中的相同(也就是说，两个系统的初始密度分布是几何相似的，而且活塞位移的时间函数关系也相似)，则在强冲击波极限下这两个系统的演化过程完全相同。

例如第一个系统的尺度因子为 τ_1^*、L_1^* 和 ρ_1^*，密度分布为 $\rho_1(r,t)$，则函数f为 $\rho_1(r,t=0)/\rho_1^*$，第二个系统中密度的演化过程则为 $\rho_2 = (\rho_2^*/\rho_1^*) \times \rho_1(rL_1^*/L_2^*,\ t\tau_1^*/\tau_2^*)$。此时，式(10.5)和式(10.6)已确定两个系统中无量纲特征数 $u^*\sqrt{\rho^*/p^*}$ 具有相同的值 1，没有必要再把两个系统中该特征数相等列为独立的约束条件。这就意味着，即使所有特征参数 τ^*、L^* 和 ρ^* 都独立变动，两个系统行为的相似性仍然能够保持。这种十分宽广的相似性还可推广，包括在运动期间活塞表面作任何方式变形的情形。为了说明这点，只需要采用一个表示活塞表面随时间变化的方程式 $F(r/L^*, t/\tau^*) = 0$ 来描述活塞即可。

欧拉方程组成立的一个必要条件是，作为描述性质更加普遍的流体的项应忽略不计。在第 2 章中已经讨论了这个要求。具体的限制条件是应当使用流体力学的描述而不是动理学的描述、雷诺数必须很大、佩克莱特数也必须很大，并且辐射能量输运必须忽略不计。下面讨论一个具体实验中以及相应天体物理系统中，这些无量纲特征数的值。

经常有这样的情况，一个实验以及与其相似的天体物理系统都满足这些限制条件，但是有一个标度参数的值十分不同。例如，高能量密度实验中雷诺数的范围通常为 $10^5 \sim 10^7$，而其他方面都与之相似的天体物理系统的雷诺数则大得多。此时必须了解这样的差别可能有什么意义，但是本书并不打算再耗费篇幅探讨这个论题。对于雷诺数的具体情况，可以预期惯性范围的存在将有重要的作用(参见 5.8 节)，但是泰勒微尺度 λ_T 与柯尔莫哥洛夫微尺度 η_k 之比值将变得不甚重要。

10.2 一个透彻的例子：Ⅱ型超新星中的流体动力学界面不稳定性

作为适当缩比实验的一个例子，我们将详细讨论研究Ⅱ型超新星中流体动力学界面不稳定性的实验。概而言之，超新星包括范围宽广的多种物理过程，其完全描述需要使用迥然不同的学科领域的知识：一方面是粒子物理和广义相对论等；另一方面则是流体动力学不稳定性和湍流等。用实验室实验研究超新星的行为，在某些方面已做得到，但其他方面仍无可能。

对于超新星现象的出色描述以及关于超新星形成的现有理论，可以参阅 Arnett 撰写的书。其他可作一般性了解的文章有 Bethe、Woosley 以及 Woosley 和 Eastman 的论文。人们认为超新星爆炸有内芯的坍缩（大恒星中）和热核爆炸（诞生时质量小于 8 倍太阳质量的小恒星中）两个基本机制。超新星类型的分类基于其光谱，由于涉及问题太多这里无法讨论。Ia 型超新星不是关注的对象，这类星体中热核爆炸机制是主要的。当主要由碳和氧组成的白矮星质量累积到十分巨大其引力足以压倒其简并电子的压力时，开始发生引力坍缩，释放的能量足以引起燃烧碳和氧的聚变爆炸，从而出现这一类超新星。本节研究的目标则在于以芯部坍缩为主导机制的Ⅱ型超新星。

10.2.1 关于Ⅱ型超新星的天体物理学基本知识

任何相当大的爆前超新星体（超新星的前身星）在其铁芯外面都形成物质的壳层。由于铁原子核最稳定（参见第 9 章），所以铁元素在星体芯部聚集。星体最里面的壳层主要由硅和钙元素组成，第二个壳层主要由碳和氧组成，第三个壳层主要是氦，最外面的壳层主要是氢。有一个这样构成的星体变成了超新星 SN1987A。任何这样的星体初始时主要由氢组成，通过引力压力对正在积累的将要形成下一壳层的物质造成压缩和点火，逐步形成星体内的各个物质壳层。这样的过程终止于铁元素，因为该星体不可能再从铁转变为其他物质元素的反应中得到能量。但是一旦星体中铁元素积累到一个“钱德拉塞卡质量”（等于 1.4 个太阳质量），对铁芯的引力压力将超过简并电子的压力，使其发生坍缩。坍缩的芯核成为中子星，作为一种脉冲星以后可能被探测到。

铁芯的坍缩伴随着一个短暂而又十分强烈的中微子暴的发生，带走了约 99% 释放出来的能量。中微子的部分能量被耦合于主要接近于芯部的未发生坍缩的剩余物质中。典型的超新星爆发中爆炸物质的动能约为 10^{51} erg。能量的短暂沉积形成了几乎是经典的点爆炸状况（除了在星体中间有小孔以外），爆炸波形成并穿过星体向外传播（参看第 4 章），使得星体飞散解体。当爆炸波透出星体表面时，可以观察到其发光度的剧烈增高。只有百分之几的流体动力学能量作为可见光被发射出来。更具体些，所有刚才描述过的元素必然出现，但还不足以解释爆炸波产生的真实情况。爆炸波产生过程中也许包括芯部坍缩过程中一些非对称运动，甚至喷流的产生。

图 10.1 示出了三种类型超新星的典型发光曲线。用光学望远镜探测到的光并不来自已发生能量释放的芯部，而是来自于依靠流体动力学流动和辐射输运的复杂组合输入能量的光球

部分。超新星芯部的能量释放与探测到的可见光曲线之间如何联系,仍是一个重大的挑战性问题。十分重要的是正确描述物质的不透明度以及物质和辐射的输运。本节关注物质的输运。

在与超新星爆炸有关的各种各样问题中,我们主要关注Ⅱ型超新星爆炸中的流体动力学现象的实验室模拟,尤其是这种星体中各界面处流体动力学不稳定性的演化过程。选择这样一个论题的原因是:一方面人们都认为多维流体动力学效应十分重要;另一方面与冲击波穿过 He - H 界面有关的这类实验早已成功。另外,这个论题的**可标度性**(或可缩比性)和其他限制条件件的分析能得到很好说明,这个例子可以作为类似分析其他问题的样板。

星体爆炸期间流体动力学不稳定性是这样发生的:在壳层之间各个界面处都有显著的密度降低,这些界面并不光滑,这里的流场具有对流、转动和其他的动力学结构。爆炸波像是与中微子对流所生成结构一起产生的。中微子对流的一种模型所导出的这种结构示于图 10.2。另外,爆炸波在向外传播时受到各界面处流场结构的扰动。虽然如 5.7.1 节所述,在爆炸波前面传播的冲击波趋向于减小扰动的影响,但只有相当小的扰动才会完全被抑制掉。结果是,每一个具有结构的界面将依次经受一个有结构的爆炸波的通过,也就是说这个爆炸波使各个界面之间产生了联系,以至于内部界面的结构形成了外部界面的附加结构。在爆炸波之后的减速阶段,界面处结构的发展首先是通过里希特迈耶 - 缅希柯夫(RM)不稳定性(见 5.7.3 节),然后是通过瑞利 - 泰勒(RT)不稳定性(见 5.1.2 节)。人们理解这些情况已有些时间了,但是在 SN1987A 超新星出现之前,对于它们最终的非线性后果并不清楚。

对 SN1987A 超新星的观察中,来自重元素的发射及其存在于超新星外层中的其他迹象,仅在爆炸后的几个月内可以看到。SN1987A 超新星光球中所观察到的重元素(如^{56}Ni和^{56}Co)的早期形貌(参见 Sutherland 的论文(1990)及其所引文献),与星体的球对称膨胀运动并不协调,似乎表明不稳定性有着看得出来的重要影响。即便如此,对该超新星爆炸进行当时所能做到的二维数值模拟(参见 Arnett 等, Fryxell 等, Burrows 等, Kifonides 等的论文(2000)),并未得到足够快的穿透运动可以解释所观察到的结果。部分三维数值模拟也指出,三维计算中见到的更快速的穿透运动也还未大到足以说明这个差异。

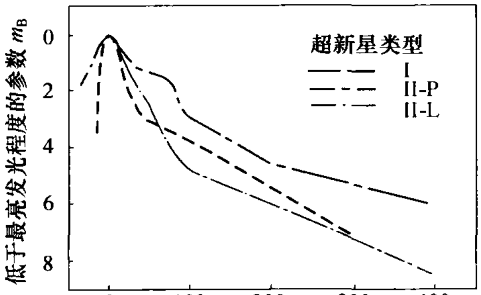


图 10.1　Ⅰ型和Ⅱ型超新星的发光曲线

(已以各自的最大发光度值做归一化)

本图引自 Doggett 和 Branch 的论文(1985)。

注意到Ⅱ型超新星有两个子类,其中之一(Ⅱ-P)的发光曲线有凸起平台,另一子类(Ⅱ-L)的曲线则呈现规则的衰减。

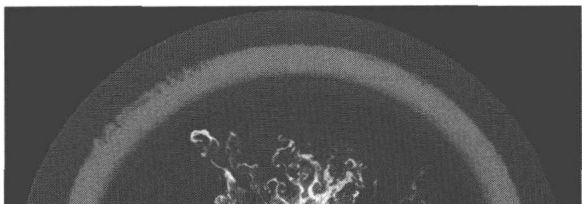


图 10.2　SN1987A 超新星爆炸的二维数值模拟

(Kifonides、Plewa、Janka and Muller, Astrophys. J. Lett., 531, L123(2000))

上面讨论的内容以及本章的引言已表明这些情况对实验有两个作用:第一个作用是计算机编码的验证,希望能够确定这类系统行为的某个方面是不是当前数值模拟所不能复现的。一个具有二维流场结构的适当缩比实验足以达到这个目的,下面将讨论这样的一种实验。第二个作用是具有真实复杂性情形的直接观察,当前年代的数值模拟所不能回答的一个重要问题是,在怎样的三维程度上通过发散爆炸波形成的各界面之间的耦合能够增强内层物质向外的贯穿运动?这个问题不但与 SN1987A 超新星有关,而且与诸如仙后座 A 之类天体的情形也有关。预计在 21 世纪早期建成的一些激光设施将有能力实现上述第二个作用。

10.2.2 超新星中界面不稳定性的标度参数问题

现在讨论进行适当缩比实验模拟研究 SN1987A 超新星中界面不稳定性的挑战性问题,尤其是在 He - H 界面处发生的不稳定性。这个问题可以作为如何设计实验室缩比实验的范例,使人们清楚地认定实验室缩比实验设计方案最重要的步骤是:①确认所考察问题的流体动力学描述是合适的;②估计输运过程的作用(质量、动量和能量的输运);③确定物态方程;④建立初始条件;⑤考虑在几何方面能否做些简化(例如,利用平面系统在某个时段的演变情况恰当描述球面发散系统的演化)。

在 He - H 界面过渡区中有代表性的一组等离子体参数列于表 10.1。取自 E. Muller 等人论文(1991)的这组参数当然来自数值模拟计算,因为不可能进行观察测量。但是由于基本的爆炸波问题相当简单,这些算出的参数还是比较可靠的。以表 10.1 为参考,设 h 为密度梯度的长度尺度,u 为特征速度,T 为等离子体特征温度(假设电子温度与离子温度相等),ρ 为等离子体密度。超新星中 He - H 界面处给定的流体微元在爆炸波到达后所经受的特征减速度可估计为 u/τ,由于 $\tau \sim h/u$,所以 $u/\tau \sim u^2/h \sim 5\times10^5\,\mathrm{cm/s^2}$。引力加速度则小得多,在将要讨论的实验室实验中也可以忽略不计。表 10.1 还展示了实验室实验的参数,它们也是基于数值模拟计算得到的,虽然有些测量数据为这里给出的具体数字提供了参考。根据表 10.1 中的参数,得出表 10.2 中所列的标度参数(特征尺度或特征数)。

表 10.1 超新星实验中的流体动力学基本参数

参　数	SN1987A 超新星	实验
总时间/s	2000	21×10^{-9}
长度尺度/cm	9×10^{10}	0.0180
速度/(km/s)	2000	35
密度/(g/cm^3)	0.0075	0.4
压力(dyn/cm^2)	3.5×10^{13}	5.2×10^{11}
温度/eV	900	7.4
Z_i	2.0	0.6
A	4.0	11.4
核密度/cm^{-3}	1.1×10^{21}	2.1×10^{22}

表 10.2 数值模拟导出的超新星实验的标度参数(特征参数)

导出的(标度)参数	SN1987A 超新星	实验
欧拉数 $u^*/\sqrt{p^*/\rho^*}$	2.9	3.1
碰撞平均自由程/cm	3.5×10^{-3}	7.9×10^{-8}
运动黏性系数/(cm^2/s)	7.0×10^7	0.334
雷诺数	2.6×10^{11}	1.9×10^5
热扩散率/(cm^2/s)	1.2×10^6	15
佩克莱特数	1.5×10^{13}	4.2×10^3
辐射平均自由程/cm	6.8×10^2	2.0×10^{-4}
辐射佩克莱特数	10^6	2.5×10^9

我们继续按前述步骤进行讨论，首先考虑欧拉方程组是否适用于这些系统。实验情况是简单明了的 —— 等离子体完全是碰撞主导的，辐射并不重要。超新星的情况更为复杂，具体说来需要讨论 He 等离子体的性质。$T = 800\text{eV}$ 时该等离子体完全电离，电子 - 离子碰撞(λ_{ei})和离子 - 离子碰撞(λ_{ii})的平均自由程非常短，$\lambda_{ei} \approx 10^{-3}\text{cm}$，$\lambda_{ii} \approx 2 \times 10^{-2}\text{cm}$。电子 - 离子的能量均衡时间小于 10^{-9}s。因此，电子 - 离子组分的行为如同电子、离子温度相同的强碰撞气体。$\rho = 4 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3$、$T = 800\text{eV}$ 的 He 等离子体的粒子压力 $p = 230\text{GPa}$，$T = 800\text{eV}$ 下的辐射压力 $p_R = 2\text{TPa}$，换言之，辐射压力占主导地位。

尽管辐射占主导地位，由于物质中夹带着光子，欧拉方程组仍可适用。相对于康普顿散射(在这些低温度下是汤姆逊散射)光子的平均自由程 l_c 很短，$l_c \approx 10^3\text{cm}$，逆轫致过程的光子平均自由程则长得多。换言之，含有光子气体的等离子体可以用单流体模型描述，其压力是光子(辐射)压力和粒子(物质)压力之和，而且可以用一个单一的速度——粒子流动速度 u 来表征。在光子(辐射)压力为主导的情形中，单位体积中的能量 $E_R = 3p_R$，也就是相应于 $\gamma = 4/3$ 的多方气体。由此可见，欧拉方程组适用于超新星和实验室两种系统。

第二项工作是以表 10.2 列出的参数作为参考，估算 2.3 节所述的无量纲(标度)参数并考虑其含义。首先讨论超新星系统的参数。估算黏性作用时，必须考虑到所有的黏性来源。对于 $T \approx 800\text{eV}$，$\rho \approx 8 \times 10^{-3}\text{cm}^{-3}$ 以及 $\ln\Lambda = 10$ 的 He 等离子体，依据式(2.39)通常的(粒子)黏性系数约 $2000\text{cm}^2/\text{s}$。由式(2.40)可知，光子黏性系数比通常的黏性系数大得多，$\nu_{rad} \sim 7 \times 10^7\text{cm}^2/\text{s}$。对于 $h \sim 10^{11}\text{cm}$，$u \sim 2 \times 10^8\text{cm/s}$，$\nu \sim \nu_{rad}$ 的情形，估算相应的雷诺数为 2.6×10^{11}。由此可见，黏性的作用非常小。

依据式(2.33)的电子热扩散率(其数值见表 10.2 第 5、6 行)估算的佩克莱特数十分大，但事实上热传导是由光子主导的。光子的平均自由程 l 远小于问题的特征长度尺度 h。根据泽尔道维奇与莱伊捷尔的书估算光子热扩散率 χ，得到 $\chi \sim cl$。对于所考察的情形，l 是康普顿散射的光子平均自由程 l_c，即可得出 $\chi \sim 2 \times 10^{13}\text{cm}^2/\text{s}$，相应的辐射佩克莱特数约高达 10^6。这意味着该系统实质上是绝热的。

下面考虑实验系统的情形。基于数值模拟结果，假定离子的平均电荷数为 0.6，取库仑对数为 1。从式(2.39)算出，CH_2 等离子体的黏性系数约为 $0.3\text{cm}^2/\text{s}$，相应的雷诺数 $Re \sim 2 \times 10^5$。这个参数虽然低于上述超新星系统，但明显高于开始发生剪切流动不稳定性($Re \sim 10^3$)和湍流混合转变($Re \sim 10^4$)时的典型临界雷诺数。因此十分清楚，黏性作用并不决定实验室实验中等离子体的行为。

根据式(2.33)，激光实验中电子热扩散率 $\chi \sim 15\text{cm}^2/\text{s}$，因此与这种特殊的热输运对应的佩克莱特数很高，约 4200。由于这些实验中的等离子体只是勉强可看作理想的，前述关于 ν 和 χ 的值应视为数量级意义的估算。

考虑辐射损失在实验中的作用，这个问题由于光学深度的潜在影响而变得更加复杂。表 10.2 中表示的辐射佩克莱数的大数值意味着辐射引起的扩散热传导较小，但是并不排除非光学厚的等离子体中有较大的辐射损失。可以对辐射的作用作出如下的上界估计。从等离子体层表面处最大可能的能量损失，是与该等离子体温度相应的单位面积上的黑体辐射功率 $2\sigma T^4$。另一方面，等离子体表面单位面积上具有的能量含量为 $(3/2)h(n_e + n_i)k_B T$。

第二个量被第一个量相除，就得到关于等离子体特征冷却时间的下界估计。采用表 10.2 中的参数计算出这个特征时间为 1.8μs，比流动特征时间大了 90 倍，流动特征时间即 $h/u \sim 2 \times 10^{-8}$s。换言之，辐射热输运也不会影响到等离子体的动力学行为。综合上述可得出结论，He－H 界面处流体动力学不稳定运动中的耗散过程可以忽略不计，欧拉方程组是一种正当合理的描述。

前面列出的第三个步骤是选择物态方程。物态方程的差别不大时，流体动力学方程组是结构性稳定的，因此物态方程的差别不会改变天体物理系统及其实验室对照系统之间的一般相似性。重要问题在于相变的出现，此时所考察的冲击波后演变期间中两者之间不再存在任何相似性。由此可知，实验室实验能够正确地模拟冲击波通过其前身星传播的阶段中真实超新星流体动力学行为的所有方面。至于时空尺度方面，实验室中的 21ns 对应于超新星中的 2000s，实验室中的 20μm 对应于超新星中的 10^{10}cm。

第四个步骤是建立初始条件。图 10.3 表示计算机模拟得到的超新星中和实验室实验中等离子体的密度和压力剖面的算例。如果两者是相同的，并且实验室实验是球面构形的，则实验的演化过程将完全相同于星体情形。实际上任何实验室实验只能重现一个有限时间段内的真实天体过程。人们能够创造的条件是，实验系统中所有重要参数的缩尺空间分布，在较长时段中的某瞬间与天体物理系统中相应参数的空间分布相似(至少在所考察区域附近是如此)。上述相似性论证表明，这样的两个系统从此将以相似方式演化。使用平面构形的这类实验可以合理地模拟球形爆炸的一个有限部分，但只是在星体发散流动不大明显时，这种平面实验才是该星体情形的良好模拟。一个更大的限制是，初始条件的相似性只能在有限空间区域中达到，结果导致只在某个有限时段内两个系统的时间演化彼此相似，该时段由流体动力学扰动在初始相似性存在区域两端之间的传播时间确定。

实验的具体设计包括靶结构的性能和激光(或其他手段)驱动参数，对设计的限制是现有制靶工艺和激光系统的技术水平。设计步骤通常包括概念分析，再使用一维流体动力学数值模拟计算确定可行的技术途径，例如在前述实验中以激光脉冲驱动一个定常的冲击波，靶的尺度应使得在其前表面处形成并在激光脉冲终止后发展起来的稀疏波，能够在上述冲击波到达靶内所考察区域之前追赶上它，从而形成所需要的爆炸波(参看图 4.23)。二维和三维

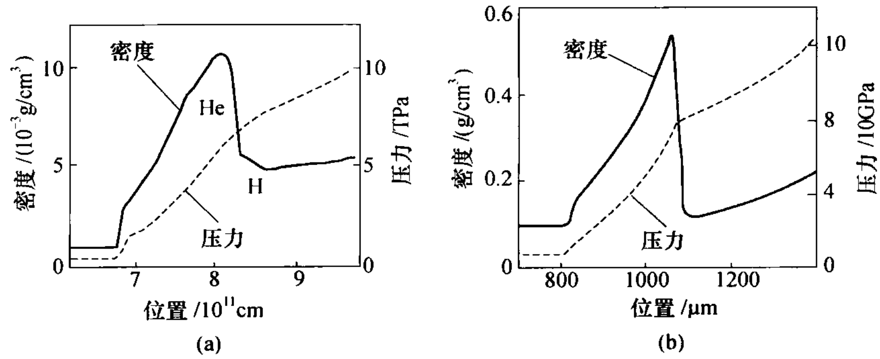


图 10.3 数值模拟计算得到的实验系统和超新星系统等离子体的密度和压力剖面

(a) 超新星 SN1987A 中 2000s 时 He－H 界面处的剖面；(b)实验中 21ns 时 CHBr－泡沫材料界面处的剖面。

数值模拟可用来估算实验构形的有限尺寸和人们预料的不稳定性增长量的影响。一个挑战性问题是,如何在这两个系统保持相似的有限时间段内,使得不稳定性得到充分的增长。

10.2.3　Ⅱ型超新星中界面不稳定性的模拟实验

不同于对天体物理物体性质的测量工作,进行实验对一个天体物理过程进行适当缩比研究,其最早的工作之一是 21 世纪之交前后几年中一个研究组完成的针对 He - H 界面处流体动力学不稳定性问题的一系列实验,其重点是在适当缩比的环境中观察这种过程的动力学行为。所有这些实验都应用初始烧蚀压力,这可以通过激光直接辐照产生或者间接通过 X 射线辐照而产生。这些实验中都产生了爆炸波,都是先发出一个冲击波,然后让一个稀疏波追赶超过该冲击波而形成所需要的爆炸波(参见 4.3 节)。靶中后继产生的波系结构决定了观察到的是不稳定性动力学的哪些方面。引自 Robey 等人论文(2001)的图 10.4,比较了这种实验中界面速度随时间的变化关系与超新星 SN1987A 情形中的 He - H 界面速度,后者是通过对超新星爆炸的数值模拟得到的。

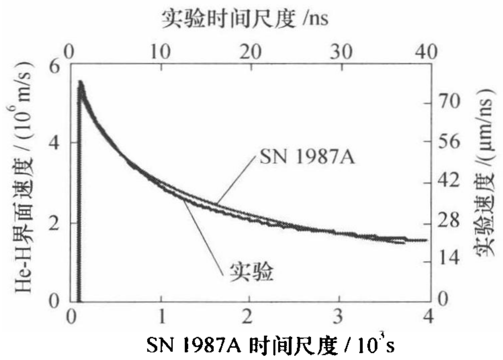


图 10.4　计算机数值模拟得到的超新星 SN1987A 中和实验室测量的界面速度历史的比较

第一批这样的实验(Remington 等 1997;Kane 等 1997,1999a,2000)使用 Nova 激光器考察了平面界面处单模初始扰动引起的 RT 不稳定性的增长。这种不稳定性一直增长到所观察的扰动幅度的峰谷至峰尖的距离(通常称为气泡 - 尖刺距离)变得相等于初始扰动波长 200μm 时为止。这个过程是强非线性的(参看 5.7 节)。使用天体物理学计算编码 PROMETHEUS(Fryxell 等编制)和实验室流体力学计算编码 CALE(Barton,Tipton 编制)再现了这个结果,但是计算得出的流场结构细节与依据这个首次实验的相当差数据好像看出的情形并不很相像。同一时期,一个法国研究组也进行了有关的实验(Benuzzi - Mounaix 等)。

后继的实验工作(Drake 2004,Robey、Kane 等 2001,Robey、Miles 等 2003,Robey、Zhou 等 2003,Miles 2004,Miles、Blue 等 2004,Miles、Braun 等 2004,Miles、Edwards 等 2004)改善了实验数据的质量。从这些实验得到表 10.1 和表 10.2 所列的标度参数。图 10.3 表示基于数值模拟计算得到的超新星 SN1987A 中和上述实验设计的密度、压力剖面,可以看出这些剖面是相似的,换言之即函数 f 和 g 是相似的(图 10.4 表明这两个系统的界面运动迹线也是相似的)。可以认为,这些结果表明了两个系统中强冲击波运动广义时间依赖关系的相似性,或者意味着标量函数 h 的相似性。根据这些表格和图形的数据可以得出结论:上述实验是

超新星爆炸过程片段情况的适当缩比模型(虽然还不是完全缩比的)。直至实验中界面呈现明显的非球面行为之前、此界面还未受到来自靶体边缘扰动的影响时,上面的结论依然成立。

图 10.5 表示这样一个实验得到的数据,即该实验中 18ns 时刻拍摄的 X 射线相片。图中较暗区域表示较弱的 X 射线强度,主要由于包含于靶件稠密物质中示踪层内的溴(Br)渗入物吸收了 X 射线而造成。此时,初始空间波长 50μm 、初始峰 - 谷幅度 5μm 的单模扰动已增长到很大幅度。该图中尖刺的顶部已由于开尔文 - 亥姆霍兹(KH)不稳定性而展宽,而且即将开始相互作用(Miles、Blue 等,2004)。刚才提及的实验是应对前述挑战的后续实验的先行阶段,也就是研究在更复杂、三维、(最终应是)真实的初始条件下进行的适当缩比实验中不稳定性将如何发展(Robey、Miles 等,2003;Drake、Leibrandt 等,2004;Kuranz、Drake 等 2004;Kuranz、Drake 等,2004)。

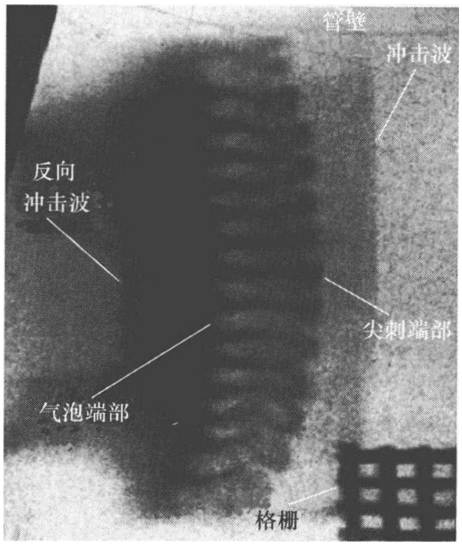


图 10.5　超新星模拟实验中 18ns 时刻的 X 射线照相图

有关实验曾经探索研究了 10.2.1 节讨论的界面之间的耦合对于瑞利 - 泰勒(RT)不稳定性的影响。这些实验值得注意的原因在于,它们已成为计算机编码综合验证研究的明显焦点。Kane 等(2001)进行了研究这个问题的实验,给出图 1.4 所示的数据。从图中看到第一个界面上铜的尖刺向右边延伸以及第二个界面上的预制扰动,该界面右方塑料中的示踪带可使这些扰动成为可见图像。作为编码验证研究的一部分工作,对该实验进行了细致的数值模拟(Calder 等),所验证的是具有自适应网格和其他先进功能的天体物理学计算编码 FLASH。模拟计算结果与实验得到图形的细致比较,支持与前面情形同样的结论,表明数值模拟很好再现了实验结果的定性特点,但一些定量上的细节未能准确重现,包括尖刺的准确长度、界面处流场结构的高度以及系统边沿处流场的性态等。在 FLASH 编码模拟的在这个具体实验情形中,铜尖刺的长度随着计算网格加细层次数而变化,并没有出现向实验值收敛的趋势。

习题 10.2

设计一个发散构形的实验,研究受到一个爆炸波影响的两个有结构并且不稳定界面的耦合。除了流体动力学标度关系的基本要求之外,试认定对该系统动力学有重要意义的其他具体参数。(提示:复习爆炸波传播和冲击波稳定性,作为思考此题的准备工作。)

这样,适当缩比实验能够用来回答纯流体动力学的天体物理系统的重要问题。上述这些例子详细研究了一类情形,其中初始的一些实验用于验证计算机编码,最后的一些实验则研究在天体物理动力学完整数值模拟中也不能解决的物理问题。另外,进行这些实验的过程引起了天体物理学数据、实验室实验和计算机数值模拟之间富有成效的互动,我们拭目以待其未来的成果。

10.3　另一个例子：星际云团破碎中的相互作用

上节讨论了一个适当缩比系统的情况，它在全局意义下可产生有用的结果。在 10.1 节中也已看到，形成正确的密度结构和非常的强冲击波，在许多流体动力学系统中已足以得到很好的标度参数关系。但是即使可能做到这种程度，也许还不足以得到真正有用的结果，尤其当人们试图超越编码验证工作，去解决数值模拟所不能回答的复杂问题时。为了得到真正有用的结果，往往需要考虑一些附加的参数，以保证实验具有为探讨所考察动力学规律而需要的时空尺度。

下面讨论一个这样的情形，涉及冲击波或爆炸波与物质块体的相互作用，这是天体物理中的普遍现象。超新星产生的冲击波通常通过星际介质（或分子云）而传播，星际介质本质上是块体群落状的。我们想观察实验室实验中造成的这些块群的解体，并发展和实验准确模拟这种解体现象的能力。在此过程中，希望能够鉴别存在的是怎样的状况，诸如一个给定块体的动力学行为可能受到其他块体出现所带来的影响等状况。还希望弄明白是否存在缩比的实验室系统中可能发生，但计算机模拟不能产生的任何过程，如湍流的发生。

下面将考察的情形中，实验和天体物理系统两者都是流体动力学的系统，引起团块解体的冲击波无疑是强冲击波。强冲击波遇到具有某种特殊形状稠密块体的任何系统，在流体动力学方面可以适当缩比至受到 10.1 节所述另外限制的任何其他的这类系统。但是我们可以识别出给定实验中表征爆炸波与块体相互作用的两个其他参数。假定爆炸波以给定速度 u_s 在一个密度为 ρ_m 的介质中传播，并与一个具有特征密度 ρ_{cl}、特征半径 r_{cl}、假设为球形的块体（云团）相互作用。描述这个相互作用的最重要标度参数是云团的破碎时间，其定义是 $t_{cc}=(r_{cl}/u_s)\sqrt{\rho_{cl}/\rho_m}$。实验中相应的无量纲参数是作为一个适当缩比系统的实验持续时间与 t_{cc} 之比值，这个持续时间必须大到足以观察到所考察的动力学现象。描述这种相互作用的第二个标度参数是爆炸波压力剖面的半高宽与 r_{cl} 的比值。为了细致模拟一个具体的天体物理系统，还需要把这个参数与天体物理系统中的相应值匹配起来。

习题 10.3

说明为什么刚才定义的 t_{cc} 是与云团破碎相关的时间尺度。

图 10.6 是研究平面爆炸波作用下单个团块解体实验几何情况的示意图（Klein 等，Robey 等，2002）。几个激光束辐照一层塑料物质，驱动一个冲击波在其中传播。当激光终止之后，塑料层前表面发出的稀疏波追赶上前面的冲击波，形成了上节中描述的平面爆炸波，并且最后撞上了一个稠密物质（铜）球。对该爆炸波演化过程的观察持续约若干倍云团破碎时间。从基本意义上看来，这个实验并不如 10.2 节中所述那样是适当缩比的，因为在

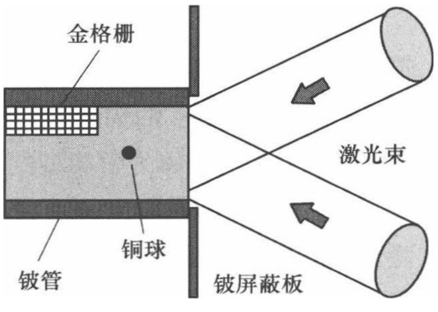
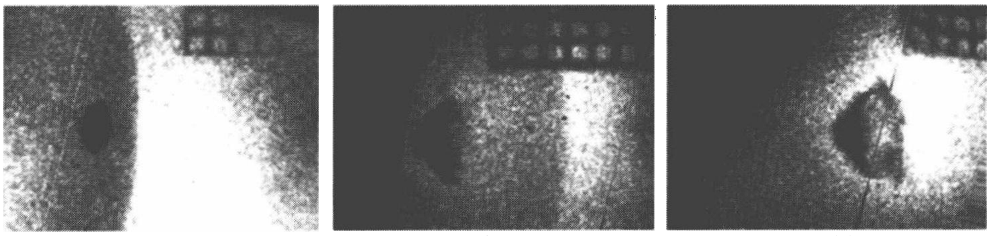


图 10.6　爆炸波与团块相互作用实验示意图

冲击波作用下铜球已经液化但未汽化，因而具有与天体物理云团极不相同的物态方程。后来进行的改进实验使用了能够在冲击波作用下汽化的低密度物质。虽然这个专门实验还未做到完全缩比，但是已按照某些关键的无量纲参数进行了适当缩比，因此其结果对于系统的动力学研究具有指导作用，并可能用于编码的验证。这个初步实验是云团解体的不可压缩流体动力学的恰当模拟。

这些实验观察了若干倍云团破碎时间之内上述球体的演化过程。该球体与冲击波后等离子体流动的相互作用产生了涡环（参看 5.8 节），已示于图 10.7 中。从该图中可看出流体的圆形螺线，其表面开始具有涡量。涡环经受着弯曲不稳定性，通过该环在角向的初始扰动产生了三维的流场结构（参见 Windnall 和 Sullivan，1973，1974）。这些结构的性质和发展，可以用实验数据和相似系统的天体物理学数值模拟进行检验。这样，这些实验就可用来测试天体物理学编码模拟计算这种类型冲击波－云团相互作用的能力。



(a) (b) (c)

图 10.7 爆炸波与团块相互作用实验的图像

这三幅图表示冲击波通过之后球形障碍物变成什么模样，图（a）、（b）中可以看出爆炸波的前沿，但在图（c）中该前沿已超出观察范围。从这些图中还看到球体破碎之后涡环发展的情况。参考格栅线的方格边长尺寸为 63μm（Robey 等，2002）。

习题 10.4

假设所考察的天体物理爆炸波是由超新星爆炸产生的，已知该爆炸波至半径为 r_{cl} 的球状团块的距离为 R。试确定相应的实验室中爆炸波的性质，以及为模拟该系统中冲击波－团块相互作用所需的实验持续时间。

10.4 辐射流体力学系统的标度关系

辐射流体力学系统无论在理论或是实验上都是颇具挑战性的论题。在 7.4 节中已经看到，即使不细致考虑真实的辐射发射及输运，辐射的加入已使冲击波的行为大大复杂化。第 7 章列举了属于辐射流体力学类型的天体物理系统的许多例子。与纯流体动力学类型的系统比较，辐射流体力学在标度关系、数值模拟编码研发和实验方面引入了新的复杂性。这样的实验至少应能作为检验天体物理计算编码中设置辐射流体力学功能的基准。除此以外，还冀望识别出对于天体物理学研究颇为重要能够在实验室中产生但很难甚至不可能进行计算机数值模拟的特殊物理过程。

本节讨论与标度关系有关的问题。只有在抽象的以及有些特殊的情形中也许可能做到

完全的标度分析，真实的实验更可能是按照重要的无量纲参数相等的原则符合缩尺比例的要求，而且也做不到对于辐射系统所有情况的缩比模拟。本节将讨论对于实验室实验似乎可行的两类辐射系统——辐射冲击波和辐射喷流。

我们只考虑辐射的通量状况，辐射为主导实验的标度关系问题可放在这类实验真正能进行时再去讨论。下面的论述参考了 Ryutov 等的论文(2001)。在辐射的通量状况下，欧拉方程组的前两个方程(式(2.1)和式(2.2))不发生变化，但在第三个方程式(2.3)中必须增加一个辐射加热项，成为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{u} - (\gamma - 1)\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} \tag{10.7}$$

如前一样，式中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 是辐射通量。

在理论上可以把 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 表示为密度、压力和天体物理系统中长度尺度变量的幂函数，即有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = A\rho^{\alpha_1} p^{\alpha_2} r^{\alpha_3} \tag{10.8}$$

我们提出，这个公式要求辐射输运是局域性的，这意味着所考察的系统要么是光学薄的，以至于辐射是一个纯损失项；要么是光学厚的，可以采用扩散模型。对于光学薄的系统，α_3 应为零，但对于光学厚的系统则非如此。这里考虑的就是式(10.8)的情形，虽然更一般的情形也有可能，原则上说来 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 可以是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的更复杂的函数，而且还可能包括对于速度的依赖关系。

施行 10.1 节中所述的变量变换，得到

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{p} = -\gamma \tilde{p} \nabla \cdot \tilde{u} - (\gamma - 1)\left[A\rho^{*(\alpha_1+1/2)} p^{*(\alpha_2-3/2)} L^{*\alpha_3}\right] \tilde{\rho}^{\alpha_1} \tilde{p}^{\alpha_2} \tilde{r}^{\alpha_3} \tag{10.9}$$

对于天体物理系统和实验室系统两者来说，如果它们的指数 α_1、α_2、α_3 相同，并且式(10.9)右部方括号中的项也一样，则此式在这两个系统之间是不变的。实际情形中，ρ^* 和 L^*（如果可应用）的值在实验中受到较紧的约束，因此为了进行适当缩比实验所需的调整主要是提高 p^*，使得实验室系统中方括号内项的量值相等于天体物理系统情形相应的值，并调整实验物质的组成，使得上述几个指数相等。

人们也许以为与纯流体动力学情形相比较，辐射流体力学情形在指定参数方面的自由度较小，但是对于进行适当缩比实验真正要紧的事是净冷却率及其对于介质压力、密度的依赖关系，这里微观机制并不重要。这个情况很有意义，因为在光学薄的天体物理系统中辐射冷却几乎总是起因于线谱辐射，而在高能量密度实验中冷却更经常是以热辐射为主导的。遗憾的是，实现这样系统的完全缩比实验是非常高的要求，最低限度需要进行极其高深的设计研究，而且对于任何给定的具体情形这个要求更像是不切实际的，这起码是 21 世纪初大家公认的看法。

事实上在第 7 章中已经看到，辐射输运往往是非局域性的，即使对于局域性辐射输运情形，要在上述两种系统中获得同样的幂次律辐射标度关系也很不现实。此时无法进行这样

的实验，即在缩比意义下其演化过程能够相同于一个具体的天体物理系统。更加麻烦的是，天体物理系统的行为可能主要依赖于与控制其动力学过程有关的某些无量纲参数。我们也许有能力在实验室中观察到一些现象，它们具有与这些实质性无量纲参数相同的值。在辐射冲击波情形中，第 7 章中已看到其控制参数是上、下游区域介质的光学深度。下面考虑辐射喷流的情形。

10.5 辐射天体物理喷流：研究背景和标度关系

许多天体物理喷流是纯流体动力学性质的，10.3 节的讨论适用于旨在研究此类喷流的模拟实验。另外，有些天体物理喷流本质上是磁化的，或者涉及到很强的磁场。人们可以采用相对论高能量密度系统做一些与这种喷流有关的实验，但是相对于我们主要关注的非相对论状况而言，这种做法不见得管用。下面将在辐射流体力学的框架内研究辐射喷流，展开有关论述。

10.5.1 天体物理喷流的基本知识

银河与河外喷流呈现出天体物理中所见到的最令人迷惑的可见光图像。这种天体的一个类别是称作赫比格 - 阿罗（Herbig - Haro，HH）天体的恒星喷流（参见 Reipurth 和 Bally 的论文，2001），被认为是在恒星形成过程中从吸积盘涌现的准直的双极出流。图 10.8 表示一个这样的喷流 HH34 的图像，所示的喷流约以 300km/s 速度从该图近底部处一个原恒星的极点喷出。原恒星本身在该图中隐而未见，只能见到通过围绕它的尘埃反射的光线。相像于其他的 HH 喷流（Hartigan 等，2000），HH34 包含多个弯曲的冲击波，使人联想到这个两极出流应是系列性的事件。典型的情形是，最快的运动物质（速度约 200km/s）出现于轴线处，较慢的但更光亮的物质集中于喷流的侧面（Hartigan 等，1993），这意味着由于沿着喷流侧面发展的开尔文 - 亥姆霍兹（KH）不稳定性对周围物质的裹挟，导致喷流侧面上激起更大的但速度较慢的冲击波激发。HH 喷流通常的尺寸约 10^{17}cm，速度为数百千米每秒，电子密度 n_{jet} 为 $10^2 cm^{-3} \sim 10^3 cm^{-3}$。以密度对比值 η 来表示，相应的 $\eta = n_{jet}/n_{周围} \gg 1$，这里 $n_{周围}$ 为喷流周围物质的电子密度。这种喷流引起的弯曲冲击波往往是辐射冲击波，星体内部的冲击波则可能是，也许不是辐射冲击波。

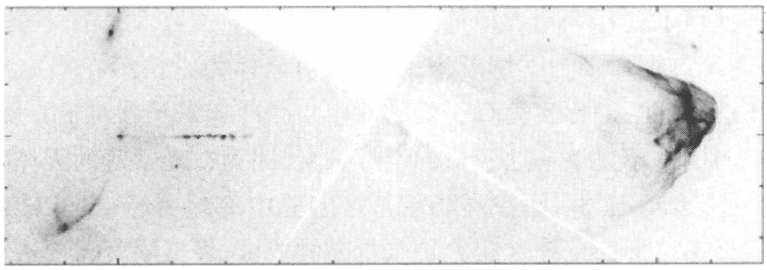


图 10.8 显示氢 H_α 喷发的 HH34 喷流的图像

原恒星位于图中部近左边。本图引自 Riepurth 等论文（2002）

人们认为 HH 喷流是在恒星形成阶段中喷发的，而另一类喷流则在这个演化循环接近终结时才形成。一定质量的恒星通过其演化成为白矮星的过程，能够进入渐近巨星支阶段

(Asymptotic Grant Branch, AGB),然后进入行星状星云或者原行星状星云(Proto - Planetary Nebula, PPN)阶段。在从 AGB 向 PPN 转变的期间中,双极喷流似乎会再次喷发,一个例子是天体 He 3 - 1475(参看 Borkowski、Blondin 和 Harrington 的论文)。这个系统的中心源是一颗距离约为 2kpc(kpc:10^3 秒差距,约 3259 光年)的恒星,处于从被尘埃遮蔽的 AGB 星向 PPN 过渡的中途。该恒星被一个以 12 km/s 速度膨胀的分子物质环圈所围绕。He 3 - 1475 喷流最奇异的特色是光学喷流,以及沿垂直于分子环圈面方向运动的三对对称节结。这些节结的位置相对于中心星是对称的,并以 500 km/s 速度沿径向朝外运动。更接近中心星的地方,喷流状的出流速度高达 850 km/s。人们认为,以速度约 100 km/s 运动的辐射冲击波是所观察到的辐射发射的激励机制。

习题 10.5

磁化喷流中等离子体压力对于磁场压力的比值(等离子体物理中称为 β 参数)不大于 1。对于密度 0.1g/cm^3、温度 10eV 的低 Z 等离子体,试确定为满足上述条件所需的磁场有多大? 试把此磁场与激光 - 等离子体相互作用中通常形成的量级 100T 的磁场作比较。通过十分巧妙设计的磁通量压缩实验也能产生这样量级的磁场。

图 10.9 示意说明了辐射喷流和纯流体力学喷流两种情况中出现的高马赫数喷流的基本特色(Hartigan, 1989),假定存在一个源产生冲入周围介质(标号 2)中的物质流束或喷流(标号 1),驱动了在周围介质中以速度 v_{BS} 传播的向前凸出的弯曲的冲击波。周围介质的存在使得喷流物质的运动减缓,在喷流中形成一个马赫盘。在此描述中,流束或喷流被视为从中心源流向马赫盘的准直的物质流。喷流侧面的剪切变形引发 KH 不稳定性,从而产生涡量和涡流,搅动接触间断面两边物质发生湍流混合。接触间断面至喷流(流束)之间受冲击的喷流物质区域称为"茧壳",其中的 KH 涡量能够驱动多个冲击波进入喷流(流束)之中,起着从喷流内部发射辐射所需的加热机制作用。

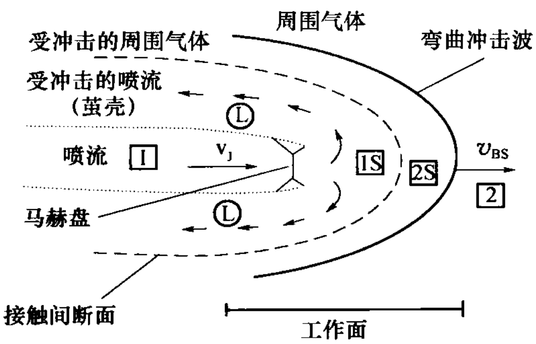


图 10.9　一种天体物理喷流结构的示意图(引自 Hartigan 的论文, 1989)

10.5.2　从辐射天体物理喷流至实验室系统的标度关系

存在三个无量纲参数,表征喷流性质以及辐射对喷流动力学行为重要性程度:

(1) 内马赫数 M_{int},即流动速度与喷流内部物质的声速之比值,表征通过冲击波有可能

转化为热能的动能能量。

（2）冷却参数χ_j，其定义是$\chi_j = L_{cool}/R_{jet}$，这里 R_{jet}为喷流半径，L_{cool}为马赫盘外面物质冷却至某个低温值所经过的一段长度。冷却参数表征辐射能够改变喷流中物质性质有关范围的相对尺度。

（3）密度比值参数 η，上节已经定义。该参数影响到已受冲击的周围介质中的压力值，该介质与马赫盘区域中喷流头部相互作用，并通过茧壳中的压力与喷流沿其长度发生相互作用。

辐射冷却对于天体物理喷流的影响可以很大（参见 Blondin 等，Stone 和 Norman，1994）。图 10.10 表示有关数值模拟计算的结果，这里假定喷流的马赫数非常高，$M_{int} = 20$，其密度相等于周围介质的密度，$\eta = 1$。再假设等离子体是光学薄的，因而喷流中热区域发射的光子逸出该系统。辐射对喷流的这种影响可以用一个与时间无关的冷却函数 $\Lambda(T)$来概括，这里假设等离子体已处于平衡状态（参看 6.2.2 节和图 6.5），冷却参数χ_j 是按照冷却到低温度值 8×10^3K 计算的。辐射冷却参数的大小从纯绝热喷流的$\chi_j \gg 1$（图 10.10(a)）提高到强冷却喷流的$\chi_j = 0.2$ 时（图 10.10(b)），喷流的形貌发生显著变化。辐射冷却使热量从系统中移出，降低了喷流的内部压力。直到压力平衡重新建立之前，起冷却作用的表面一直与喷流相互接触，使得受辐射冷却的喷流增稠和更加紧凑。在更细致的描述中，辐射应作为与时间有关的非平衡过程处理，如果介质不是光学薄的，也许还需要进行完全输运（光子能量非局域的重新沉积）处理。

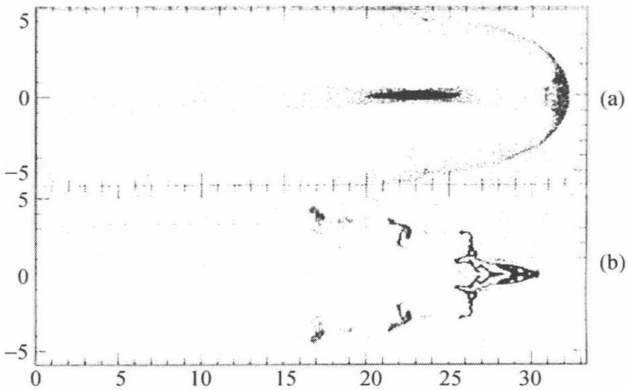


图 10.10 辐射冷却对于喷流结构的明显作用

（a）绝热喷流；（b）强冷却喷流（$x = 0.2$）。

喷流马赫数为 20，其密度相等于周围介质的初始密度（本图引自 Blondin 等论文，1990）。

10.5.3 辐射喷流的实验

高能量密度实验提供了产生高马赫数喷流、诊断其动力学行为和演化过程的手段（参见 Stone 等，2000）。如参数 η、M_{int}、χ_j 的变化对于喷流动力学行为的影响，原则上可以通过实验室实验直接观察。下面论述首次产生辐射喷流实验的例子，这是在美国利弗莫尔国家实验室的 Nova 激光器上进行的（参见 Farley 等和 Stone 等，2000）。该实验布局的简图示于图 10.11(a)，图左是一个金圆盘，中间加工成为一个全张角 120°、底直径 800μm 的锥坑，

Nova 激光器的 5 个 100ps 高辐照度激光束角向对称地照射此锥坑的内壁，平均辐照度 $I_L \approx 3 \times 10^{15} W/cm^2$，所形成的金的高速度烧蚀等离子体垂直于烧蚀壁面向外膨胀出流，其径向速度分量使等离子体内爆运动并在轴线上碰撞滞止，其轴向速度分量则使发生内爆的等离子体向外运动，成为进入图中视场的高速喷流。滞止的热等离子体产生辐射，使得喷流尺寸收缩、密度增大。

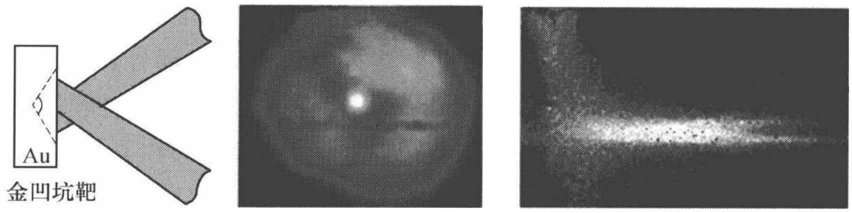


图 10.11　辐射喷流实验

(a) 示意图；(b) 轴向自发射 X 射线图像；(c) 侧向自发射 X 射线图像。

引自 Fareley 等进行的产生辐射坍缩金喷流的实验。

上述实验采用 X 射线成像技术诊断，一台时段选通的 X 射线分幅相机直接对准锥坑，实验结果如图 10.11(b)所示，这是高斯型驱动激光脉冲峰值之后 $t=0.25$ns 时刻自发射的正向 X 射线图像，该图中心附近的小亮点是在轴线上滞止的金内爆等离子体，出纸面方向(即朝着 X 射线记录相机方向)的移动速度约为 750km/s。同一个喷流的侧面像是 1.1ns 时刻自发射的软 X 射线成像(图 10.11(c))，表明时间上较晚的这种辐射发射来自金喷流的侧表面。侧面图像中辐射发射呈现分叉形象的原因是，首先在轴线上滞止(约 0.5ns 时刻)的内爆等离子体区域先发生辐射冷却，以至于在后来时间中形成分叉之间看来颜色较深的(已经冷却)区域。到 1.1ns 时刻由于电子温度 T_e 急剧降落的缘故，喷流前沿区域在软 X 射线谱段的发射停止(这个谱段正是测量仪器所敏感的)。从侧面的 X 射线照相发现，喷流最稠密的部分沿着锥坑的轴线(参见 Farley 等论文)，

对这个实验的数值模拟说明了辐射的重要性。等离子体在轴线上碰撞时自身加热到 1keV 以上，并具有很高的电离态($Z \sim 40$)，但是密度较低($\rho \sim 40 mg/cm^3$)。在这样的状态下，因自身的辐射发射、灼热金等离子体很快冷却，这是由于初始时该等离子体对千电子伏特光子是光学薄的。使用汤姆逊散射技术测量 0.6ns 时的电子温度，此时的 T_e 已经降到 250eV。辐射冷却的后果形成了十分紧致、高度准直的喷流，从锥坑内沿着轴线约以 750km/s 的速度向外运动。但是数值模拟中没有包括辐射冷却，致使计算的喷流宽度大约大了 1 个量级，这是由于滞止的金等离子体中压力很高，使得内爆过早中止的缘故(参见 Mizata 等的论文)。

这方面后续的实验是在日本大阪大学 Gekko－12 激光器上进行的(参见 Shigemori 等的论文)，利用金、铁、铝和碳氢材料的锥形凹坑板产生喷流。这些结果存在明显的相关性：靶物质 Z 值越高，则冷却时间越短、喷流越窄。Gekko－12 激光器实验产生的金喷流，再现了十分接近于这方面最早实验的结果，表明所研究的物理规律是可以重复的，并不依赖于实验设施。在一个利用英国伦敦帝国理工大学 Z 箍缩实验装置 Magpie 进行的补充实验中，也产

生了辐射冷却的高马赫数喷流(参见 Lebedev 等的论文)。这些辐射喷流实验都观察到了与上面所述情形相似的趋势。

在 Nova 和 Gekko - 12 激光器上进行的两次实验,是产生与天体物理相关的辐射流体力学系统最初企图的良好范例。即使实验已经按照重要的无量纲参数进行了缩比,它们仍是不完善的,因为这些实验中没有包括周围介质(因此 $\eta \sim \infty$)。另外,实验中喷流的形成机制还不能解决产生具有一致初态物质的涌出源问题。更棘手的问题是,喷流中首先形成的(最靠近靶件的)部分是涌出来的喷流的尾部。这种喷流的每一部分具有单一的能量输入历史和冷却动力学过程。如果人们企图进行可以直接模拟任何天体物理射流的适当缩比实验,这些最早的实验无法达到这个目的。但是,这些实验确实能够在 $\chi_j = 0.7 \sim 40$ 范围内变动辐射冷却系数,在 $2 \sim 50$ 的范围内变动内马赫数 M_{int}。这些实验给出了少许辐射流体力学实验数据,事实上它们的真正价值在于校核验证天体物理学的计算编码。然而,为了发展至少按照最重要的无量纲参数进行适当缩比的辐射喷流实验,还需要进一步的创新。

习题 10.6

曾经用于形成流体动力学喷流的一条途径是,使冲击波从一个物质中进入到一个真空管道中,在已受冲击物质中形成一个绝热稀疏波,然后这个出流的物质再通过真空管道进入到一个密度更低的"周围介质"之中,得到喷流现象的模拟。使用本书给出的简单标度关系,设计一个产生辐射喷流的相似实验。

第 11 章　相对论高能量密度系统

本章研究第 1 章中已识别的高能量密度物理的低密度、高温状况。这种状况下呈现的现象通常与前面各章讨论的问题有联系，但在基础物理方面有真正的差别。高能量密度的相对论热等离子体的温度至少应达到 511keV，电子密度超过 $10^{18}/\mathrm{cm}^3$。在 21 世纪之交时期实验室中尚不存在这样的等离子体，产生这种等离子可看作是本世纪初的挑战性问题。但是，确实存在具有这样的密度、平均电子能量超过 511keV 的等离子体，通过强激光引起的电子振荡可以使得一些这样的等离子体成为相对论的。相对论激光束是能使电子的平均动能超过 511keV 的激光束。一些受到这种激光束辐照的等离子体引起的电子束，其特征能量达到许多兆电子伏特。另外，由于强相对论电子束在冷背景等离子体中的出现，还存在平均电子能量超过 511keV、但更加稠密的其他等离子体。

把这些系统纳入本书意境之中，应当首先想到高能量密度的定义对应于压力超过 100GPa 或者能量密度超过 $0.1\mathrm{MJ/cm^3}$ 的物质状况。表 11.1 是基于美国国家研究理事会(National Research Council，NRC) Davidson 报告中的表 1.1 作出的。根据第 8 章的论述，已经知道达到这样的状况并不十分困难。下面考察三个相对论系统的具体例子。

表 11.1　与能量密度 $0.1\mathrm{MJ/cm^3}$ 对应的物理量

压力/GPa	100	磁场强度/T	500
激光或相对论粒子束的辐照度/($\mathrm{W/cm^2}$)	3×10^{15}	产生相应烧蚀压力的 1μm 波长激光的辐照度/($\mathrm{W/cm^2}$)	4×10^{12}
黑体辐射温度/eV	400	产生相应烧蚀压力的热辐射温度/eV	75
电场强度/(V/m)	1.5×10^{11}	平均动能为 511keV 时电子的数密度/$\mathrm{cm^{-3}}$	10^{18}

对于激光器的挑战是能否使得振荡电子的动能达到 511keV，这需要满足 $I_{18}\lambda_{\mu m}^2=1.35$ 的条件，这里 I_{18} 是以 $10^{18}\,\mathrm{W/cm^2}$ 为单位的激光辐照度。$\lambda_{\mu m}$ 是以 μm 为单位的激光波长。现在达到上述条件并不困难，只需要把总功率为 $10^{10}\mathrm{W}\sim10^{12}\mathrm{W}$ 的激光束聚焦于直径 1μm～10μm 的光斑即可，这相当于 1ps 脉宽、能量约 1J 的激光，或者 10fs 脉宽、能量为 10mJ 的激光。上述焦斑中电子的能量密度还只是入射激光束能量密度的一个较小的分数。

21 世纪之交时期的电子束技术已能产生 50GeV 能量的电子，束斑直径为 5μm，束团持续时间为 5ps，重复率为 100Hz。每一束团具有 150J 能量，也就是有 2×10^{10} 个电子。电子束团为狭长形状，长度大于 1mm、体积约 $10^{-8}\mathrm{cm}^3$，因此电子密度达到 $2\times10^{18}/\mathrm{cm}^3$。当这个电子束通过电子密度 $2\times10^{23}/\mathrm{cm}^3$ 的固体时，造成的平均电子能量约为 500keV。要使这些电子束沉积其能量并不容易，因此首要问题是研究如何可对它们产生影响或作用。这些研究包括 11.7.2 节论述的关于尾波场加速的重要领域。

21 世纪之交时期的离子束技术，特别是相对论重离子对撞机能够使离子束团以 50MHz

的重复率对撞。这些离子的能量为每原子单位100GeV,或者对金离子为20TeV;全部束团的持续时间约500ps,直径约200μm,能量约3kJ。每个这样的离子束团具有能量密度约$3\times10^{12}erg/cm^3$,含有约10^9个离子。要使这样的离子束把能量沉积于靶件中同样非常困难,研究中遇到的首要问题也是如何对它们产生影响。另外如第8章中所述,非相对论重离子束可用来加热高Z物质,使之进入高能量密度的状况。

本章大部分内容研究在足以引起相对论电子运动的强电磁场作用下物质的行为。能够产生相对论激光束的实验装置称为超快激光器,其意义从该名称就可明白。超快激光器的重要性体现在两个方面,即其宽广的应用前景和产生极高电磁场的潜在能力。本章将论述在粒子加速领域中使用高能电子束所形成的相对论效应。可以预期在21世纪以后年代中,这方面将发展出更多的应用。

如第10章那样,本章引用了比其他各章更多的学术刊物发表论文作为参考资料,反映了该领域相关工作的新颖性。但是本章不是作为文献评述写作的,只是打算作为对相关物理规律和问题的一个导论。

11.1 超快激光器的发展

大约自1980年之后,研制高功率激光器的挑战变得明显不同于研制高能量激光器的问题。前面描述的激光器系统能够把立方毫米体积的物质加热到上百万摄氏度的温度,但是不能产生相对论电子或者具有高达十亿度温度的离子分布,达到这些目标需要更强得多的激射光束。依靠直接放大一个激光脉冲的方法,无法产生这样强的光束,放大器的激光玻璃将会损坏。Gerard Mourou 关于啁啾脉冲放大器(CPA)的发明,使得激光系统不再受到这种限制(参见 Mourou 和 Umstadter 的论文)。任何强激光器放大的激光束,其空间截面积总归远大于最终聚焦后的激光光斑。啁啾脉冲放大器的进展更为深远,因为它使激光脉冲的放大体现在时间维度上。也就是说,在啁啾脉冲放大器中放大的激光脉冲,其持续时间远大于最终到达聚焦光斑上的激光脉冲宽度。下面叙述这种放大器的原理。

尽管人们认为激光器是相干、单色的光源装置,事实上任何激光脉冲都具有有限的带宽。对于一个高斯时间波形的激光脉冲,频带宽度$\Delta\omega$,时间波形为$\exp[-(t/\tau)^2]$,对其进行傅里叶变换可知,$\Delta\omega\tau\sim1$。因此,很短的激光脉冲具有显著的带宽,现在已能产生持续时间只有一个光波周期量级的激光脉冲(对于可见光约为1fs),这样的脉冲有非常宽的带宽。已有多种方法可以产生低能量、低辐照度的这种超短脉冲。啁啾脉冲放大器的贡献是提供一种把这种超短脉冲在时间上展开的方法,使得它们可以在低辐照度状况下得到放大,然后在时间上再被压缩到高辐照度,聚焦到焦斑处就可得到十分巨大的辐照度。

图11.1说明了一个可把激光脉冲在时间上展开的简单压缩器的设计。图中左面第一个光栅把入射的宽带准直激光脉冲在一定角度范围色散分开,使得每一频率的子光线具有不同的折射角。在图中此角度范围以标记"红"和"蓝"的两条射线表示。光栅使波长较长的红色光线以较大的角度衍射。使用一对透镜,使得光束在右面第二个光栅上的入射角相等于在第一个光栅上的反射角,从而从第二个光栅上折射的各子光线又合成为准直的激光

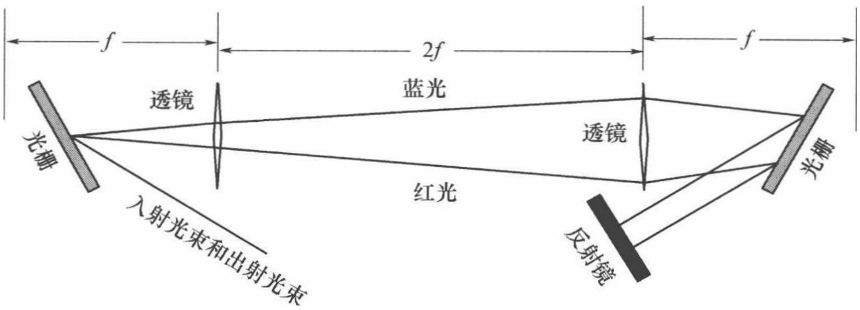


图 11.1　脉冲展开器的示意图(引自 Enam Chowdhury 的论文)

束,但是各子光线具有不同的空间偏置频率。用一块镜子把所有光线反射回去,每个频率的子光线沿各自的原光路返回,最后得到一个与初始光束同样尺寸的出射光束。几何上没有任何改变,但是暂时说来不同频率的子光线走过的距离不同,频率越近红端的光线走过的路程越短。这样就在时间上把光束展开了,形成频率随沿脉冲的距离线性变化的啁啾激光脉冲,频率最靠红端的光线处于脉冲的最前面。

习题 11.1

试设计一个脉冲展开器。假设激光束的中心波长为 800nm,带宽 20nm(对应于一个宽度 20fs 的激光脉冲)。使用两个相同的光栅,第一衍射级的散射波长由公式 $\lambda = d(\sin\alpha + \sin\beta)$ 给定,这里 d 为光栅的线宽,α 和 β 分别为相对于光栅法线方向的入射角和折射角。使用两个同样的透镜,物距 o、像距 i 和焦距 f 之间的关系是 $o^{-1} + i^{-1} = f^{-1}$。为了使脉冲得到展开,初始光栅至透镜的距离必须短于一个焦距长度。

本书编写时,一些超快激光器已经发展为具有优良光束品质但输出能量相当低的脉冲极短的激光器系统。已研制成功的另外一些系统,目的在于能把更多激光能量投射到靶斑上,例如,依据快点火原理的惯性约束聚变研究所需的激光器(参见 8.2.4 节)。这些较高能量的系统通常使用一个高能激光器,完成短激光脉冲的放大。然而上述任何一种激光器都还不能产生为得到孤立的相对论热等离子体所需的足够能量。

11.2　强电磁场中单电子的运动

超快激光能够产生的许多奇妙现象,都是电子作相对论运动的结果。为了进一步了解这种运动可能产生什么现象,我们首先考虑在这种激光电磁场中孤立电子的运动。为此假设电子速度为$\boldsymbol{v}$,电子动量为$\boldsymbol{p}_e$,激光电磁场的矢量势和标量势分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ。如同第 8 章那样,采用库仑规范。在 cgs 单位制中,高速度下电磁波方程的形式不变,然而必须在惯性参考系之间进行电磁场的适当变换。研究相对论中的复杂问题时,使用四元矢量的记法较为方便,但是不打算在这里花费时间,还是采用如下通常形式的电磁波方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A} = 4\pi c\boldsymbol{J}_t \qquad (11.1)$$

式中符号如前一样，J_t 是横向电流密度，而且该方程对于相对论和非相对论系统都一样。注意到上式中待解电磁场的某些特点，对下面的推导将很有帮助。把平面波进行谱分解，每一个谱分量具有各自的 $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，这三个矢量彼此正交，这里已假设波矢 $\boldsymbol{k}$ 平行于 z 轴方向。由于 $\boldsymbol{E}=(-1/c)(\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t)$，只要电场的标量势 $\Phi=0$，并且 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，就可看出对于任何谱分量，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 两者与 $\boldsymbol{A}$ 的位相不一致，但这两者彼此的位相是一致的。如果以前未作思考，也许会感到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同位相和同时为零的事实同直觉不一样。设矢量 $\boldsymbol{A}$，从而电场 $\boldsymbol{E}$ 都沿着 x 轴方向，$\boldsymbol{B}$ 则沿着 y 轴方向。电磁波的输送强度定义为

$$a_0 = \frac{eA}{m_e c^2} \tag{11.2}$$

下面说明这个参数的意义，若以具体单位表示则为

$$a_0 = \sqrt{\frac{I_L \lambda_{\mu m}^2}{1.37\times 10^{18}}} \tag{11.3}$$

式中 I_L 以 $\mathrm{W/cm^2}$ 为单位。现在考虑电子在单一平面电磁波中的运动，该波可以含有任意的谱分量。电子运动方程的基本形式并不改变：动量的时间变化率等于所受的力。但是现在的电子动量 $\boldsymbol{p}_e$ 是相对论的，根据前面的约定，电子动量的 y 分量不随时间变化，电子动量的 x 分量和 z 分量（分别记为 p_x 和 p_z）的运动方程则为

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{c}(cE_x - v_z B_y) \tag{11.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{c}v_x B_y \tag{11.5}$$

式中 $\boldsymbol{p}_e=\gamma_r m_e \boldsymbol{v}$；在 cgs 单位制中有 $E_x=B_y$。为了避免复数记号下实数量乘积的复杂性，假定 E_x 和 B_y 为实数量。然而当粒子遇到电磁场时，这两个分量在空、时方面可以任意变化。这里仍允许动量和速度为复数量。

从粒子的角度观察一个给定频率的电场分量，就会看到电子的细致运动包含无限多个谐波分量。式(11.4)中的电场项引起了按式(11.5)作 z 方向运动的二次谐波响应，该响应接着又通过磁场项引起了 x 方向运动的三次谐波响应，后者再次引起 z 方向运动的四次谐波响应，如此继续。

利用方程式(11.4)和式(11.5)以及相关的约定，可以导出如下用途更广的 p_x 和 p_z 之间的关系式。定义电子的总能量为 ε_e，由于其静止质量为 m_e，静止能量为 $\varepsilon_0=m_e c^2$，得到

$$\varepsilon_e = \sqrt{\varepsilon_0^2 + p_e^2 c^2} \tag{11.6}$$

电子能量随时间的变化率全部起因于电场做功，即有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_e}{\mathrm{d}t} = -ev_x E_x \tag{11.7}$$

把上式与式(11.5)作比较，可以看出

$$\varepsilon_e - cp_z = \text{const.} \equiv \alpha \tag{11.8}$$

式中常数 α 与电场开始时粒子的状态有关，可以方便地确定。如果此时粒子是静止的，则 $\alpha=\varepsilon_0$。一般说来，根据式(11.6)和式(11.8)可以得到

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_e^2 - p_e^2c^2 = (\varepsilon_e - p_zc)(\varepsilon_e + p_zc) - p_x^2c^2 = \alpha(\alpha + 2p_zc) - p_x^2c^2 \tag{11.9}$$

由此可得

$$p_z = \frac{1}{2\alpha c}(\varepsilon_0^2 - \alpha^2 + p_x^2c^2) \tag{11.10}$$

如果初始时粒子处于静止状态，$\alpha = \varepsilon_0 = m_ec^2$，则可得到如下众所周知的结果，即

$$p_z = \frac{p_x^2}{2m_ec} \tag{11.11}$$

这个式子告诉人们一些很有意义的推论。第一，在 x 和 z 两个方向的运动始终是电子对波的部分响应。第二，在约定表达方式之下动量是复数量，z 方向的运动包括了定常的偏移量和以 x 方向振荡的 2 倍频率的振荡，这两个方向运动的组合形成了 8 字形状的粒子轨迹线，当 $p_x < m_ec$ 时此轨迹线在垂直方向伸长。第三，孤立的电子不可能被光波恒久地加速，当初始静止的电子被一个电磁波包超过时，该电子在 x 方向发生振荡，在 z 方向平移；但当波包通过之后这两个运动都将终止，电子停止于平移后的位置并再次成为静止的。如果不存在集体效应，(孤立)电子一定会在光波中形成(如通过电离)，一旦波通过之后此过程带有明显的净能量而终止。第四，在非常强电磁场的极限下，$|p_z| \to \gamma_r m_ec$，该情形中 $|p_x|$ 较小，等于 $\sqrt{2\gamma_r}m_ec$，导致 v_x 下降成为 $v_x = p_x/m_e\gamma_r \to c\sqrt{2/\gamma_r}$。最后，电子运动相对于 z 轴的角度 θ 由下式给出，即

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{2}{\gamma_r - 1}} \tag{11.12}$$

此角度的极限情形很有意义，当 γ_r 趋于 1 时，θ 趋于 90°，但当 γ_r 非常大时，θ 趋于 0。

习题 11.2

假设电子运动由平面单色波所引起，其运动距离小于该光波的波长。试解方程式(11.4)和式(11.5)，求出电子运动的轨迹线，并确定当电子运动速度增大时(但仍远小于 c)该轨迹线如何变化。

用简谐运动的术语进行严密思考，可了解电子运动的一些情况。因为当激光电场增大时，从激光波长的尺度来看，电子沿 z 方向的运动很快变得十分显著。更具体地考虑，电子所经历的真空中 z 方向单色平面波中的电场为

$$E_x(x_p, t) = \hat{E}\cos[kz_p(t) - ct + \phi_0] \tag{11.13}$$

式中

$$z_p(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(t')\mathrm{d}t' \tag{11.14}$$

其中 ϕ_0 为电场的相位角；z_p 为粒子的 z 轴位置，t_0 时的 z_p 即 z_0。

可以看出，仅当 z_p 为时间 t 的线性函数时，粒子经受这个平面波的过程才如同一个简谐电场那样。但是前面已经看到并非如此，只是在该电子沿 z 方向的运动分量消失的极限情形中，它所经受的光波作用才相当于一个简谐电场。在其他极限下(譬如 $z_p \to ct$)，电子将经受一个接近于恒定电场的作用。在此极限下，电子从光斑尺寸为 d 的光波中所能提取的最

大能量为 eE_Ld,这里 E_L 为聚焦光波的电场。

显然,孤立电子可以被引入具有任何相位的波中,从而可以经受电场幅值从零至该电子生成时最大值的变化。如果当电场为零时生成的电子处于静止状态,则在每一循环结束时该电子回归至静止态,并且当波通过之后该电子终止于静止态。如果初始静止的电子生成时振荡电场正好达到最大值,则在波通过之后电子终止于具有最大可能的能量。如果通过电离途径生成电子,原理上它们可以具有相对于波的任何相位。但若电离是由光波自身产生的,则电子趋向于电场最大时生成,并具有接近于零的初始速度。这种情形中,大多数电子将从它们与光波的相互作用中获得显著的净速度。

下面对电子运动作更深入的探讨。洛伦兹因子可写为

$$\gamma_r = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1} \tag{11.15}$$

也就是

$$\gamma_r = \sqrt{1+\frac{p_e^2}{m_e^2c^2}} \tag{11.16}$$

习题 11.3

试证明式(11.15)与式(11.16)关于 γ_r 的定义是等价的。

现在考虑当电子速度增大时式(11.4)和式(11.5)的解。在 v_z 可以忽略的场合,从式(11.2)和式(11.4)可以得出

$$\gamma_r v_x/c = a_0 \tag{11.17}$$

由此可知

$$\frac{v_x}{c} = \frac{a_0}{1+a_0} \tag{11.18}$$

在此场合有

$$\gamma_r = \sqrt{1+a_0^2} \tag{11.19}$$

a_0 较小时,上式相同于第 8 章中关于电子在光波中振荡速度的结果。a_0 增大时,v_x/c 当然也不会超过 1。当 v_z/c 较大时(大多数情形认为在 0.1 以上),式(11.19)不再准确。为了探讨这样的情形,把式(11.18)代入式(11.5),得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_z}{c}\sqrt{1+a_0^2}\right) = \frac{-a_0}{1+a_0}\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t} \tag{11.20}$$

在 a_0 很小的极限下,上式显然有 $v_z/c = a_0^2/2$。利用计算机数值编码求解式(11.20),可以确定什么时候 v_z/c 趋于 0.1。需要添加的假设是,应指定在光波的某个具体位相角下(如 $\pi/4$)v_z 的值(如为零值)。图 11.2 画出了小 a_0 近似下 $Re(v_z)$ 的最大值,以及 $Re(a_0^2)/4$ 与 a_0 幅值的函数关系。可以看出当 a_0 变为十分之几时,上述这些解接近各自的极限值。

一旦 v_z 超过大约 0.1c 之后,方程式(11.4)和式(11.5)关于电子速度和轨迹线的解将变得极其复杂。这里有两个原因:首先必须同时应付式(11.4)右部的两个项,这样的解是

强非线性的;其次必须考虑 v_z 的变化怎样影响到电子在光波中的位相,并改变其行为。为了了解决定电子运动定性性态的最为重要的特性,下面考察电子在光波中的位相问题。

a_0 非常大时,电子与波相互作用的后果体现于电子以接近光速的速度沿 $\boldsymbol{k}$ 方向运动。从式(11.4)可以看出,此时 x 方向的力将大大降低。为了探讨其原因,把输送强度表示为 $a_0\sin\phi$,把波的位相角明确写为 ϕ。为方便起见,下面有关讨论中把所有物理量都按实数量处理,因而有

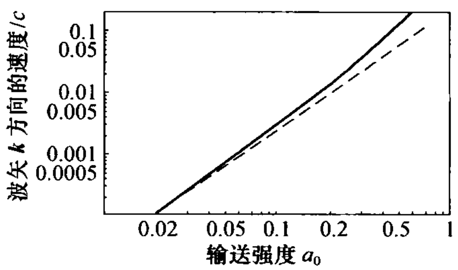


图 11.2　a_0 增大时电子在 $\boldsymbol{k}$ 方向的无量纲振荡速度 (v_z/c)
(虚线表示小 a_0 极限的情形)

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t = kz - \omega t \tag{11.21}$$

无损于当前推导工作的普遍意义,上式中可以假定当 z 和 t 为零时相位角为零。如同前述,取波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 轴方向,选择正、负号使得波朝前方($+z$ 方向)传播。这些做法是传统性的但并非必须如此。前面讨论中曾假定始终有 $z=0$,如果电子在 z 方向实质上是驻定的,则这个假定是合理的。但是 v_z 增大后,电子的移动导致它不再经受纯正弦形的电场。电子位置 z_p 由式(11.14)给出,初始时 $z_0=t_0=0$,电子所经历的位相角为

$$\phi_e = k\int_0^t v_z(t')\mathrm{d}t' - \omega t = \omega\left(\frac{1}{c}\int_0^t v_z(t')\mathrm{d}t' - t\right) \tag{11.22}$$

由于 $B_y=E_x$,式(11.5)即成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_r v_z) = -\omega(v_x a_0\cos\phi_e)\left(1-\frac{v_z}{c}\right) \tag{11.23}$$

可以看出,电子在 z 方向处于加速还是减速运动,取决于 v_x 和 $\cos\phi_e$ 的符号。下面考虑 v_z 对于加速持续时间的影响。从式(11.22)看出,时间增大则 ϕ_e 下降。现在的问题是,ϕ_e 变化一定量 $-\Delta\phi_e$ 所需要的时间 Δt 是多少。假定这段期间中 ϕ_e 变化的平均速度为 $\bar{v}_z/c$,则有 $-\Delta\phi_e=\omega\Delta t[(\bar{v}_z/c)-1]$

因此

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi_e}{\omega(1-\bar{v}_z/c)} \tag{11.24}$$

人们关心的要点是平均速度 $\bar{v}_z$ 比较大的时段,如果电子正沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向被加速,则会出现这样的时段,并且其持续时间将大于 $\bar{v}_z$ 为负值的时段。向前运动时电子"骑"在波上,但是向后运动时电子很快就穿过了波。结果导致向前运动时电子在较长时段内被加速,获取了较高的前向平均速度。

电子断续的向后运动最后会终止,变成为只是向前的接近于光速的运动,这里首先发生变化的是 γ_r 而不是 v_z。为了对这种状况做近似考察,令 $v_z/c=1-\delta$,δ 是一个小量。还要假设电子的总速度 $|\boldsymbol{v}|$ 等于 c,因而 $v_x/c=\sqrt{2\delta}$ 属于最低阶的量。为方便起见记 $\eta=\omega t$,把式

(11.23)展开到δ的最低阶项,成为

$$\frac{d\delta}{d\eta}=4\delta^3 a_0\cos\left(\pi+\int_{\eta_0}^{\eta}\delta(\eta')d\eta'\right) \tag{11.25}$$

这里把位相角增加了π,使得电子初始运动的方向朝前。

通过积分式(11.25),可以了解当时间(即η)增加时δ如何变化。图11.3表示δ值和式(11.25)中的余弦函数值随时间循环数的变化情况,该式积分的初始条件是$\eta=0$,$\delta=0.01$。可以看出,减速的时段比较短暂(减速使v_z下降,δ增大),因此不能使δ增大许多,而且考虑到横坐标是对数方式的,当δ下降时每个循环的周期增大。

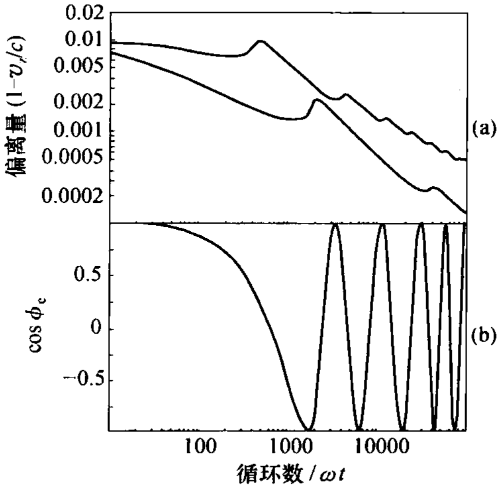


图11.3 电子的加速

(a) 与光速的偏离量δ

(上面曲线$a_0=10$,下面曲线$a_0=100$);

(b) 电子在波中的位相角($a_0=10$)。

习题 11.4

在初始位相角的一个范围中(即把π改变为各种其他值),并取$a_0=100$,$\delta(0)=0.01$,求解方程式(11.25)。讨论上述相位角改变所引起的解性质的变化。

上述简单的分析并不自洽,这里忽略了电子进入光波时因位相角的任意性而造成的初始条件可能范围(不仅是一个值)。Enam Chowdhury(2004)在Delaware大学的博士学位论文中,对一个相关问题做了数值分析。他使用隧道电离模型把电子注入一个对应于聚焦激光束模型的光波电场中,对其论文的某些结果进行评述,将有助于加深对上述问题的理解。

图11.4表示最终动量状态的分布,是不同的离子在聚焦激光束产生的强场中发生电离的结果。即使初始的激光束是极化的,电场沿着x轴方向,光束的聚焦引入了沿y和z方向的不为零的有限电场,从而产生了y轴方向的有限动量,可在该图顶部一排分图中看到。p_z和p_x之间的关系由电子处于静止时的行为所主导,用底部分图中的虚曲线表示,其原因是大多数电子在激光电场接近峰值时电离生成出来,生成时接近处于静止状态。这种电子形成图11.4(f)中最强的尖峰,沿着平均电场的该动量约为±1.5MeV/c。其他电离过程在则产生图中所示电子动量分布范围。

图11.5表示电子运动相对于z轴的角度θ,图(a)、(b)、(c)是电子能量在$x-z$平面的分布云图,其趋势是遵循最高场强下初始静止电子的关系式(11.11)(此关系在这些图中以虚线表示)。图(d)、(e)、(f)表示$y-z$平面上的分布,这些电子受到了聚焦产生的电场y分量的影响。

这样,通过激光脉冲期间形成的电离,能够产生具有如图11.4和图11.5所示能量分布的高能电子束,利用这种技术可得到用于探测或驱动其他过程的短促的高能电子束。相

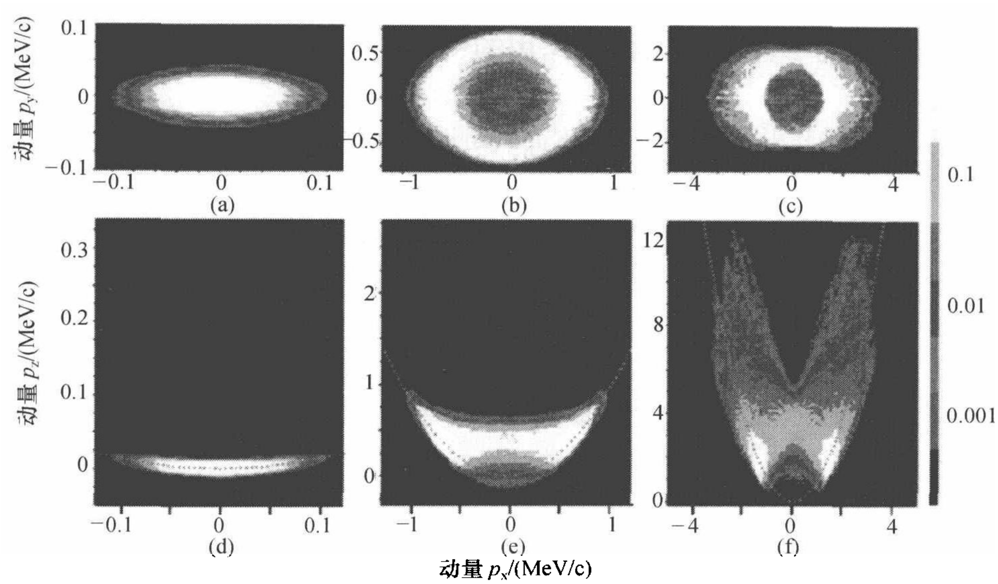


图 11.4　在 f 数 2.5 的激光焦斑中原子电离形成的终态电子动量分布图

点线表示式(11.11)给出的函数关系,图(a)和图(b)表示辐照度 10^{17} W/cm^2 之下的 Ne^{7+},图(c)和图(d)表示辐照度 10^{19} W/cm^2 之下的 Ar^{8+},图(e)和图(f)表示辐照度 10^{20} W/cm^2 之下的 Ar^{15+}。本图引自 Enam Chowdhury 的博士学位论文。

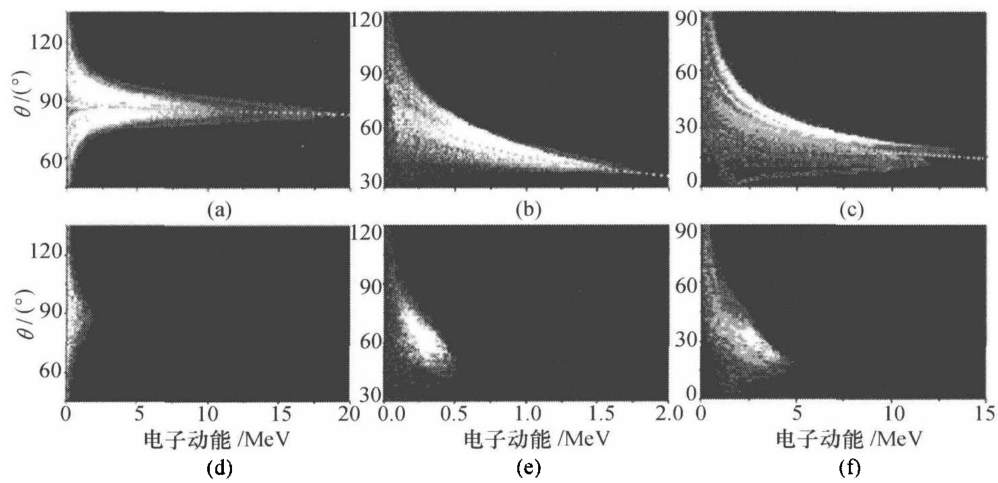


图 11.5　在与图 11.4 相同物理条件下电子的能谱分布图

左边、中间和右边的分图分别对应于辐照度 10^{17} W/cm^2、10^{19} W/cm^2 和 10^{20} W/cm^2 的情形。上图(a)、(b)、(c)表示 $x-z$ 平面上电子运动与 z 轴的偏离角,图(d)、(e)、(f)表示 $y-z$ 平面上与 z 轴的偏离角。虚曲线仍然表示式(11.11)给出的函数关系。本图引自 Enam Chowdhury 的博士学位论文。

比之下,采用加速器产生定向强电子束的技术则还需要研究高能量密度源与等离子体的相互作用。在对激光与等离子体相对论相互作用做了一般介绍之后,在 11.7.1 节中对此问题再进行较详细的讨论。

11.3 激光与等离子体相对论相互作用的引发

人们不可能突然间引发一个其辐照度高到足以产生强相对论效应的激光脉冲,最好的情况也就是产生一个具有高斯时间波形的脉冲,其脉宽(即光强从峰值下降到其 $1/e$ 的特征时间)约为 $1/\Delta\omega$,这里 $\Delta\omega$ 为激光带宽。可能出现的问题是:当激光脉冲到达时,任何靶件都要经受从零至最大值的所有辐照度。为了得到尽可能干净的激光-固体相互作用,激光器和光学系统必须具备三个性质:首先,激光光斑应接近于衍射极限光斑,不会因为激光光斑上复杂的分布结构而使得实验结果难以解释;其次,大部分激光能量必须入射于光斑之中,避免光斑外面的低强度相互作用造成很大干扰信号;第三,激光脉冲的时间波形必须接近高斯形状,而且早期脉冲没有明显的其他结构(这样的早期结构通常称为预脉冲)。

这些要求导致用于强场下相互作用基础研究的激光器系统产生越来越短的激光脉冲,从而使得低强度下的相互作用尽可能减少。这样的激光器还需要使用变形镜作为聚焦光学系统的部件,产生接近于衍射极限的光斑。这些技术发展的终极目的是所谓的 λ^3 激光器(λ 是激光波长),其目标是最大辐照度期间内激光脉冲只有一个光波周期的宽度(即光波在空间的长度为 λ),同时光束聚焦的光斑面积(横向)约为 λ^2。例如中心波长为 800nm 的光,一个周期的时间大约 3fs。相比之下,用于输送较多能量至靶件的激光器(例如用于快点火的激光器,参见第 9 章),只能采用比飞秒(fs)长得多的皮秒(ps)脉冲。一些相关的问题讨论如下。

对于这些要求的讨论很有参考意义的是 20 世纪 90 年代早期的三个激光系统:①英国 Rutherford Appleton Laboratory 的 Vulcan 激光器,在一个输出较大能量的激光器系统中采用啁啾脉冲放大,产生了当时说来能量较高、约 2ps 的激光长脉冲(参见 Danson 等人的论文)。② 英国的 TITANIA 激光器(参见 Chambers 等人的论文),得到 5 倍衍射极限的焦斑,含有很明显的内部结构,而且还存在一个预脉冲。③ 同一时代美国密执安大学超快光学科学中心(Centre for Ultrafast Optical Sciences, CUOS)的激光设施,得到了衍射极限的焦斑,可以很高辐照度加载于靶件,并且不至于产生厚度超过集肤深度的等离子体层。这里集肤深度是指十分短暂的激光脉冲通过一个陡变的反射界面进入介质后的透射距离,是光线不能透过区域中其波数虚部值的倒数。对于密度很高的等离子体锐变界面,集肤深度约为 c/ω_{pe}。

为了只产生很薄的等离子体层,激光器系统必须满足如下三个条件:

(1) 独自通过激光光学部件到达的以及在主脉冲之前若干纳秒到达的杂散激射光,在靶件上造成的辐照度必须控制在 $10^8\,W/cm^2$ 以下,避免在靶件前表面产生蒸汽或等离子体层(参看 Combis 等、Lindley 等和 Sauerbrey 等的论文)。这样的"预脉冲"通常来自激光放大器中被放大的自发辐射,或者来自于普克尔盒泄漏的激光,其时间范围很容易宽达几十纳秒。已经证实,自发辐射导致的预脉冲对于尽可能增大热电子或 X 射线的产额是有利的(分别参见 Kmetec 等和 Rousse 等的论文),但若实验目的是获得有关激光与固体物质相互作用的十分干净的依据,则这种预脉冲是有害的。

(2) 激光主脉冲任何"底部台阶"的辐照度必须控制在 $10^{12}\,W/cm^2$ 以下,以免过早产生

等离子体。这样的底部脉冲的时间宽度一般为几皮秒至几百皮秒，往往由变动激光频谱的激光器子系统内部作用所引起，例如，激光玻璃中群速度弥散或增益带宽变窄等。早期的短脉冲玻璃激光器，其激光脉冲的底部辐照度一般为最高辐照度的千分之一量级。后来由于钛宝石振荡器的出现，这个比例降低到 10^{-5} 以下。1992 年，人们测量了 CUOS 激光器的底部辐照度，约为最大辐照度的 2×10^{-6}，以后又改进为最大红外(基频)辐照度的 10^{-8}(参看 Nantel 等的论文)。把这种激光脉冲倍频，仍可保持底部辐照度低于 $10^{8}\mathrm{W/cm^2}$，甚至当 I_L 趋近 $10^{20}\mathrm{W/cm^2}$ 时也是如此。相比之下，那个年代的能量最高的超快玻璃激光器输出脉冲的底部辐照度在 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$ 以上，宽度达到许多皮秒。

(3) 激光器系统在低辐照度阶段主激光脉冲必须足够快地陡然上升，因为一旦 I_L 超过 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$，固体靶件表面立即形成等离子体并开始膨胀。这里对 I_L 提出要求，是因为预等离子体的发生主要与发射至靶面的激光功率密度有关，但并不排斥存在一些这里没有考虑的与波长和(或)吸收有关的较小效应作用。临界面膨胀的速度为声速量级，正比于 $T_e^{1/2}$，这里 T_e 为电子温度。当 $I_L\sim10^{15}\mathrm{W/cm^2}$，此膨胀速度可达到 100nm/ps 的量级。一旦 $I_L\lambda_{\mu m}^2$ 超过 $10^{15}\mathrm{W\cdot\mu m^2/cm^2}$，反射光波的有质动力压力变得相当大，足以使等离子体停止膨胀(参见 Liu 和 Umstadter 的论文)。更高光强作用下有质动力压力将压缩等离子体，把临界密度层推回到固体物质区中去。足够强的激光脉冲首先使已有的预等离子体参数分布变得陡峭，致使临界密度面处当地密度分布的长度尺度与波长的比值 L/λ 变得十分小，然后能够把临界面朝里推进，缩短了该面至固体密度面之间的距离 D。注意 L 与 D 的区别，自由膨胀情况下它们之间有着简单的关系，但可能十分不同于膨胀后又受到压缩的等离子体。最后，获得和维持光滑的平面薄层等离子体的唯一方法是限制初始等离子体的膨胀，从而保持 L 与 D 两者在整个考察时间内始终处于低值。

20 世纪 90 年代早期的 CUOS 激光器使一个非常干净的、半高宽 400fs 的高斯形激光脉冲倍频，达到了上述要求。由于在最高光强下倍频效率发生饱和，频率已转换的激光脉冲的半高宽仍然为 400fs 左右。然而在处于上升沿的低光强范围中，正比于一次谐波强度平方的二次谐波强度上升得更为陡峭。波长 527nm 的二次谐波强度在 500fs 时间内从 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$ 上升到了 $10^{19}\mathrm{W/cm^2}$，相当于增大了 16 个 e 倍数。使用 X 射线谱仪对高密度等离子体的研究确证，这个激光系统产生的预脉冲可以忽略不计(参看 Jiang 等 1995 年的论文)。I_L 从 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$ 上升到 $10^{15}\mathrm{W/cm^2}$ 只用了 180fs 时间，在此期间内等离子体的膨胀距离不会大于 10nm，低于固体密度状况下的集肤深度($10^{23}/\mathrm{cm^3}$ 密度下为 17nm)。到达这个辐照度以后，光压本身就能阻止等离子体继续膨胀。

图 11.6 比较了上述三个参考性激光系统输出脉冲的标准剖面。一种激光系统具有干净的高斯脉冲，半高宽为 1ps，I_L 的峰值为 $1.6\times10^{17}\mathrm{W/cm^2}$，$I_L$ 从 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$ 上升到 $10^{15}\mathrm{W/cm^2}$ 需要 700fs，这个期间内等离子体可以膨胀 50nm 以上。如果 TITANIA 激光系统的输出脉冲很干净而且没有底部脉冲或者预脉冲，这种情况是它原本可能达到的。另一个激光系统输出半高宽 2.5ps 的干净高斯脉冲，I_L 的峰值为 $10^{19}\mathrm{W/cm^2}$，I_L 从 $10^{12}\mathrm{W/cm^2}$ 上升到 $10^{15}\mathrm{W/cm^2}$ 需要 1500fs 时间，在此期间内等离子体可能膨胀 100nm 以上。这种情况是 Vulcan 激光系统原本可能达到的(如果它的输出不存在预脉冲)。表 11.2 比较了这三种激光系统的有关参数。

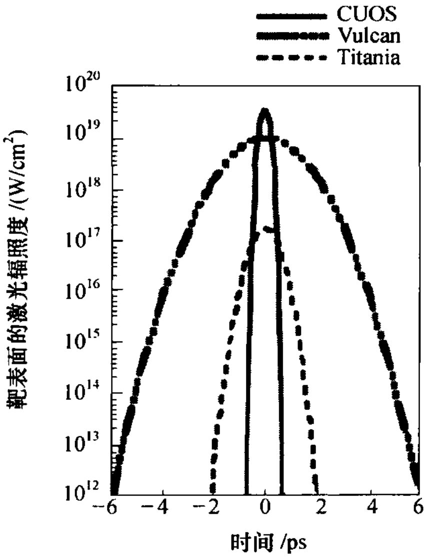


图 11.6　20 世纪 90 年代早期三种参考性激光器系统激光脉冲剖面的比较

示意性的最窄的 CUOS 激光脉冲与半高宽分别为 1ps 和 2.5ps 的两个干净高斯脉冲进行比较。这两个较长的脉冲分别是那个年代中 TITANIA 和 Vulcan 激光器系统原本可能实现的最好脉冲形状。较长的激光脉冲提供了长得多的等离子体形成时间。

表 11.2　平面实验中等离子体尺寸和漂移距离的比较

实　验	$I\lambda^2_{\mu m}$/ (W · μm²/cm²)	等离子体尺度 D/λ	漂移距离 x_{os}/D
Vulcan(1993)	3×10^{15}	0.2	0.04
TITANIA(1998)	1×10^{16}	0.2	0.08
CUOS(1999)	7×10^{18}	0.02	7

对于激光－固体相互作用研究而言，怎样薄的等离子体层才算是足够薄？这个问题也就是问这种相互作用动力学研究是否涉及固态密度物质，还是只涉及其表面附近的低密度等离子体？确定这个问题需要作的判别性估算是比值 x_{os}/D，如下所述，这个参数决定了 Brunel 电子是否参与吸收动力学之中，这里 $x_{os}=a_0c/(\gamma_r\omega)=(\lambda/2\pi)(a_0/\gamma_r)$，是电子在激光电场中的漂移距离。表 11.2 列出了前述三种参考性激光系统中这个参数的比较。

11.4　吸收机制

超快激光与靶件的相互作用中，吸收机制随 I_L 的增大而变化。低辐照度下（$<10^{14}$ W/cm²），激光不可能在一个短脉冲期间里把稠密等离子体加热到很热的程度，十分短暂激光电场的碰撞吸收机制主导了相互作用。正入射和 s 极化（即激光电场平行于靶表面）情形中，观察到的强烈激光吸收与这种碰撞机制的预期相一致。当透入临界密度区激光的短暂电场得到共振增强导致共振吸收（参见 Kruer 的专著），而且长度尺度 L 适中，则对于 p 极化（即激光电场平行于靶面法向）激光的吸收得到增强。

当 I_L 增大到 10^{15} W/cm² 以上，等离子体变得相当热，以至于碰撞效应大为减弱，吸收机制变得更为复杂，出现了许多本书不准备探讨的新机制，包括鞘逆轫致吸收、高频集肤效应和反常集肤效应等，在 Rozmus 等和 Gibbon 与 Forster 撰写的普通教程中都讨论了这些机制。

本书第 8 章中推导的电子温度与激光辐照度之间的简单关系在这里不再适用，因为热物质朝外的对流运动不再是电子能量耗损的重要渠道。即便如此，T_e 的标度关系仍是 I_L 的某个接近 1/2 的幂次。这种状况下共振吸收仍然很强，但是能量传递机制可能不再是碰撞。非碰撞吸收也许由于激光驱动的电子等离子体波的破裂而引起，但是一些数值模拟结果中也存在着重复性"朗缪坍缩"的明显依据，如 Gibbon(1994)的论文所述。又如，Chaker 等和 Meyerhofer 等的论文所述，这种情况下的共振吸收在实验中有着明白无误的证据。

当 I_L 增大到 $10^{18}\,W/cm^2$ 以上时，电子的物理漂移距离变得与固体靶表面等离子体层的厚度相当。此时受到激光光波电场加速的电子漂移进入真空，当它们返回再进入固体时可导致吸收的增强。这种现象通常称为 Brunel 效应，因为这是 Brunel 于 1987 年在理论上首先认识到的，以后又由其他研究者(包括 Bonnaud 等和 Kato 等)在理论和数值模拟上再次阐明，这种效应能够明显增强对 p 极化激光的吸收。当 I_L 增大并且长度尺度减小时，共振吸收让位于真空漂移，但是这种转变很复杂(参见 Gibbon 和 Bell 的论文(1992 年))。正如前面以表 11.2 作为参考的讨论，真空漂移能够引起显著吸收的条件是 $x_{os}/D>1$，这里 x_{os}/D 是 Brunel 给出参数 v_{os}/ω 的相对论推广，这里 v_{os}为激光电场中电子的非相对论振荡速度。

非常早期实验产生的受到有质动力再压缩的等离子体，其密度剖面在局部之处十分陡峭。使用 CO_2 激光器的一些实验(参见 Bach 等和 Fedosejevs 等的论文)以及近年来利用 1μm 波长激光做的实验(参见 Norreys 等的论文)，两者都能产生在临界面处可能满足条件 $x_{os}/L>1$ 的等离子体。但是在再压缩过程中，这些初始时十分厚的等离子体层发生皱褶，无法对相互作用过程进行清楚的诊断。

同样辐照状况下，如果等离子体相当薄，正入射情形中反常集肤效应开始变得较为重要。电子被加热到相当程度，以至于名义的集肤深度变得小于电子漂移长度和电子平均自由程，导致激光电场渗入固体深度的增大。Ruhl 和 Mulser 使用符拉索夫方程模拟研究了这种辐照状况下激光与固体的相互作用，他们把 Brunel 效应和反常集肤效应之间的联系解释为：通过其与入射角的依赖关系而形成的对于电子所受作用力的自然限制。

由于$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 力作用的结果，Brunel 效应最终达到饱和(参见 Brunel 的论文(1988))。当 I_L 增大到进入强相对论状况时，预计将出现更新的效应。激光电场中相对论电子受$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 作用力而发生的运动，开始产生方向指向靶件内部的显著的电子速度(参看 Pukhov 和 Meyer - ter - vehn 的论文)，这将导致 11.8 节中将讨论的钻孔和无碰撞冲击波现象。

无论具体的吸收机制发生什么变化，所有的吸收过程总归涉及激光能量向电子的转移。当激光在固体表面处被吸收，则将产生一种形状通常近似于麦克斯韦分布的电子分布。写出定性描述加热过程的能量通量平衡方程为

$$f_{abs}I_L = n_c k_B T_e v_{eff} \tag{11.26}$$

式中f_{abs}为被吸收的激光能量分数；n_c 为临界电子密度；v_{eff}为等效速度，能流以此速度从吸收区中流出。

在第 8 章所述较慢的(ns)大尺度等离子体状况下，$f_{abs}\sim1$，$v_{eff}\sim c_S\propto T_e^{1/2}$，因此

$$T_e \propto I_L^{2/3} \tag{11.27}$$

当温度上升、碰撞吸收变得较小时，等离子体进入$f_{abs}\propto\nu_{ei}/\omega_0$ 的状况，但 v_{eff}的量级仍为声速

大小。由于$\nu_{ei} \propto T_e^{-3/2}$，在弱碰撞状况下即有

$$T_e \propto I_L^{1/3} \tag{11.28}$$

在这些状况以外的情况，电子的漂移开始变得有关紧要，可以看出f_{abs}对T_e的依赖关系变得更弱，使得漂移状况下T_e随I_L增大的规律近似成为

$$T_e \propto I_L^{1/2} \tag{11.29}$$

当激光辐照度增大到强相对论状况，可以看到电子具有量级为激光电场中电子振荡动能的特征能量。这是一个很自然的结果，因为偏转任何一个电子使其速度转向激光电场方向的过程，同时具有把一部分这样的能量转移到电子随机运动中的作用。一旦吸收不再依赖于温度而且电子以光速c离开，颤动能量必然成为电子能量的尺度。在相对论状况下，这些电子的特征能量为

$$\varepsilon_{hot} = (\sqrt{1 + a_0^2} - 1)m_e c^2 \tag{11.30}$$

作为简单的估算，通常用关系式$k_B T_h = \varepsilon_{hot}$描述这些电子的“温度”。如果$a_0$非常大，则有

$$k_B T_h \sim a_0 m_e c^2 \tag{11.31}$$

11.5 谐波的产生

当I_L增大到10^{17} W/cm^{2}以上时，激光与过度稠密的固体靶相互作用，将导致激光许多谐波的发射。这种现象可用来对相互作用机制进行诊断，并可能作为其他应用所需的相干短脉冲软X射线源。激光辐照固体靶产生谐波的早期理论（参看Bezzerides等和Grebogi等的论文），就是由于在CO_2激光的长脉冲实验中观察到许多谐波而促成的（参看Burnett等和Carman等的论文）。这种状况的重要机制是激光光波电场中临界密度面的振荡。

如果相互作用的几何构形较为简单而且是平面的，则抽运激光将被镜面反射，任何谐波都从反射抽运光的锥角范围内发出。已经弄清楚，这种情形要求等离子体层的展延范围远小于一个光波长。因此，谐波光的角分布可以指明靶等离子体表面的平面程度如何。在TITANIA激光器系统上进行的实验中，当激光脉冲的最大强度超过1.6×10^{17} W/cm^{2}时（这些实验中激光脉冲的半高宽为1ps左右），观察到了镜面发射谐波到漫射谐波的转变。图11.6表示的半高宽1ps激光脉冲对应于该系统输出激光的最高强度，应当指出，这样激光脉冲的前沿所产生的预脉冲量将随I_L增大而显著增加。如图11.6所示在Vulcan激光器系统上进行的实验中，该系统的长脉冲激光产生了非常多的预等离子体，总可观察到漫射谐波的发射（参看Norreys等的论文）。在Toronto的实验中（参看Zhao的论文），当在主脉冲之前1.5 ns时刻引入一个预脉冲，则可观察到谐波从镜面发射到漫发射的转变。对于这些数据以及本书未作讨论的较低强度、较长脉冲实验更多数据的一个一致解释：如Wilks等（1992）所述那样，预等离子体产生得足够多时，反射激光的临界面将发生畸变，谐波产生的可能机制包括因电子团聚引起的皱褶、离子无规则的横向运动以及瑞利－泰勒（RT）不稳定性等。临界面的皱褶将使得激光－等离子体相互作用在很宽角度范围中发生，从而导致激射光线的散

射和反射变成为漫射。对于相互作用动力学的诊断而言，一旦漫散射发生，谐波信号的角分布结构就变得毫无意义。

Gibbon(1997)对 20 世纪 90 年代的理论工作做了很好评述，认为充分强的激光脉冲与固体表面处十分稠密等离子体的相互作用，可以有效地产生谐波。Wilks 等(1993)用一维、二维的 PIC 数值模拟再现了奇次的谐波，在二维模拟中甚至见到了较弱的偶次谐波。临界面的相对论振荡把谐波结构引入了从该表面反射的光线之中。首先可以用发射该反射辐射的驱动电流概念来考虑这种现象。在所有入射角下，有质动力都可驱动具有偶次谐波分量的电子密度振荡，此振荡与以抽运频率 ω 进行的速度振荡的拍频，产生具有奇次谐波分量的电流源(这里没有考虑圆极化光)。

斜入射情形中谐波的分量也与极化情况有关。对于 s 极化光，可以发展的是只具有偶次谐波分量的电流源。对于 p 极化光，电子密度的振荡具有奇次和偶次两种谐波分量，其中具有奇次谐波分量的振荡与频率 ω 的速度振荡产生拍频，形成具有偶次谐波分量的电流源。在 s 极化和 p 极化两种情形中，都可以预料接近正入射时偶次谐波十分微弱，入射角增大时则随之增强。

另一种理解谐波产生过程的途径，是把从临界面上的反射看作从一个振动镜面上的反射，这个思路是 Bulanov 等提出的。Lichters 等进行了这样的研究，得到一个考虑谐波产生的冷等离子体模型，在他们的数值模拟中再现了谐波的产生。他们指出，推迟源项的正确处理在这个振荡中引入了很重要的非谐波分量，考虑到这个作用就可使得某些情形中该模型与 PIC 模拟之间达到定量的符合。由于把一维 PIC 计算框架作为洛伦兹计算框架的第一步(其中电磁波以正入射方式出现)，才有可能做到斜入射情形的高分辨数值模拟。这些作者提出了一个定量模型，包含几个可用于计算预期谐波谱的假定。如图 11.7 所说明的那样，这项工作遇到了 s 极化光斜入射情形中最低阶偶次谐波幅度的困难，他们认为等离子体 - 固体界面处参数分布的陡峭程度极大地影响了这些谐波的产生。

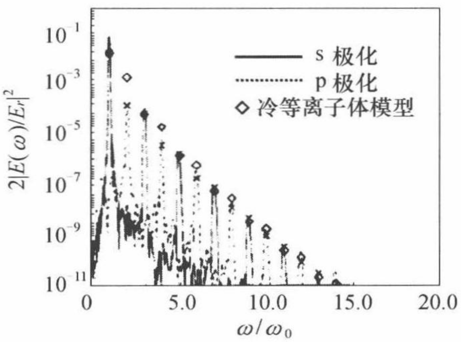


图 11.7　Lichters 等数值模拟计算得到的
谐波发射能谱(曲线)以及他们提出模型的预估(菱形记号)
(斜十字记号表示旨在使表面等离子体影响尽可能降低的一个特定模型的计算结果)

Gibon(1996)讨论了另一种谐波发射源，他论证正在经受真空漂移的粒子当再进入固体并强烈减速时，会形成一种以抽运频率重复运行的强非谐波电流源。Gibbon 指出在以较大角度(如 60°)斜入射的情形中，真空漂移将成为谐波发射的主要成因。

11.6 相对论自聚焦和诱导透明性

等离子体对激光光波有怎样的影响？为了回答这个问题，先回到关于激光光波的波动方程式(11.1)，并取

$$J_t = -en_e v_x = -en_e c a_0/\gamma_r$$

以 a_0 表示 A，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_r} - c^2\nabla^2\right)a_0 = 0 \tag{11.32}$$

式中 ω_{pe}为与电子密度 n_e 相应的等离子体频率。

初看起来，式(11.32)似乎是一个简单的方程式，只是其中的等离子体频率平方被因子 γ_r 所除。但是由于 γ_r 通过 v 与 a_0 有关，而且在与 a_0 相同的时间尺度内随时间而变化。为了求出具体的解，必须设法估算 γ_r 的作用，如可以利用 γ_r 的适当平均值(以下记为$\langle\gamma_r\rangle$)导出所需的解式，得到修正色散关系为

$$\omega^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{<\gamma_r>} - c^2k^2 = 0 \tag{11.33}$$

从此式可得出相速度为

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_{pe}^2}{<\gamma_r>\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{n_e}{<\gamma_r>n_c}}} \tag{11.34}$$

从上面这些式子可以得出如下两个结论：

(1) a_0 较高的区域中波以较慢的速度传播，这种区域对应于聚焦激光束的中心部分，相阵面因而在这里变得弯曲，使得激光束有自聚焦的趋势。这种现象称为**相对论自聚焦**。这种效应正好与激光束的衍射现象相反，但是在激光束功率的某个阈值以上，光束确实是自聚焦的。这个激光束功率的阈值为

$$P_{sf} = 17.4n_c/n_e(\text{GW}) \tag{11.35}$$

式中 n_c 为临界电子密度。

激光束产生相对论高能量密度的条件，一般都要超过式(11.35)表示的功率阈值。如果这样的激光束与体积足够大的等离子体相互作用，则会发生自聚焦。

(2) 相对论激光束能够透入一个比非相对论情形密度更高的等离子体中去。按照式(11.11)的表面意义，反射面(该处相速度趋于零)的电子密度 $n_e = <\gamma_r>n_c$。因此，激光束可以透入到比 n_c 高 $<\gamma_r>$倍的高密度处。具体说来，由于 γ_r 的涨落，这种效应将更加复杂。尽管如此，相对论激光束的净效果是能够透入到比非相对论情形电子密度更高的区域之中。这种现象称为**诱导透明性**。

11.7 粒子的加速

激光与等离子体相对论相互作用更大的意义，在于用这样的激光束来加速粒子。人们

希望这条途径能够产生可用于快点火的粒子束。已经证实这种激光产生的质子束可应用于质子照相技术，另一种可能是使用所得到的强电子束产生辐射照相用的 γ 射线。依靠强激光或粒子束与等离子体的相互作用，研究工作者当前正在研制先进的粒子加速器，这项工作之所以可能，是因为人们已能在等离子体中产生比在真空中电极之间高得多的电场。由于这个缘故，在这里讨论激光加速粒子的机制很有意义。

11.7.1　等离子体内的加速

高能量密度等离子体和能束在电子加速器方面的各种潜在应用，几乎全都与等离子体中的尾流场（波）行为有关。对于尾波场产生机制最好理解，也许是花费一些时间看看把石头掷进湖水之中所产生的现象。石头本身把若干湖水向外推出，产生第一圈向外传播的波，但是石头自身使水移开所得到的响应则是周围其余的水朝中心拥入，然后再反弹向外运动，造成第二圈向外运动的波。当有了向湖水中掷石头的体会后再观察小船的前行，可以看出前一情形中朝外、朝里的两种波分别对应于后面情形中的船首的弯曲波和船后尾随的尾波。尾波的传播与小船运动途径成一定角度，该角度与尾波相对于小船的相速度有关。设想观察者位于水面上并且随着尾波的速度运动（如站在风帆冲浪板上或坐在皮划艇中），就能驾骑于尾波之上使速度增加并从尾波中提取能量。用这个比喻使读者理解**尾波场加速器**，可以省去一些（其实相当多）技术细节的陈述。1979 年 Tajima 和 Danson 撰写了一篇综述性文章，论述等离子体中尾波场加速粒子的应用。

考察等离子体内部情况可知，电子获得加速的关键是生成某种类型的尾波场（在某些极限下，尾波看起来更像是展延的等离子体波）。基本要求是形成一个通过等离子体运动的局部压力源，从而创建一个接近光速运动的具有很强电场的尾波。我们思考重复掷石头的实验，但是把场景改换为在均匀冷等离子体中形成一个具有某尺度 λ_p、局部而且短暂的压力源（与以光速 c 的运动比较，所有真实等离子体都是冷的）。该压力源为“短暂”的意义是：它驱使电子运动但几乎不引起离子的位移。设想等离子体中的局部扰动形成一个球形尾波，基于同样原因，其蕴藏的结构类似于水中向外、向里的两种波。作为对位移的响应电子密度发生振荡，并且电子的位移是局域性的，从而引起尾波传播。从 2.4 节中知道，作为对电荷分离的响应，电子将以电子等离子体频率 ω_{pe} 发生振荡。由于在一个等离子体振荡周期内扰动运动的距离为 λ_p，这种尾波的速度将为

$$v_p = \omega_{pe}/k_p \tag{11.36}$$

式中 $k_p = 2\pi/\lambda_p$。

如果正好有 $v_p \approx c$，并且尾波场十分强，足以俘获一些电子并带着它们一起运动，则上述虚拟的球面波将把这些电子加速到相对论速度。

在真实系统中，实现上述想法的最简单方法是，造成能量密度十分高（从而压力非常高）的光子包或电子包，其特征长度接近于 $\pi c/\omega_{pe}$，因为这样就能最有效地激发起符合 $v_p \sim c$ 条件的尾波。这种高压力包通过等离子体传播时将造成很强的等离子体尾波，处于这样尾波场中的粒子将被其俘获并获得显著加速。紧接高压力包后方形成的强场能够特别有效地产生被加速粒子的束流，具有很窄的能散度和很低的束散度。

尾波场观念更复杂的应用十分丰富多彩,因为它们只需要一些要求不高的实验硬件设备,容易开展实验研究。功率在相对论自聚焦阈值以上的激光束,将趋向于聚束并造成场强特别高的很小区域。一个或多个扩展的激光束相谐地驱动一个波数 $k \sim \omega_{pe}/c$ 的延展的等离子体波,通过不稳定性的作用,该波造成的电场将趋于形成尺度为 ω_{pe}/c 的自调制(如何确切地发生与细节有关)。这个电场依次驱动等离子体中一系列尾波,并加速粒子。在一个等同于受激拉曼散射情形的拍频过程中(参看第 8 章),使用两个激光束通过拍频产生这样的等离子体波,这种加速器称为拍波加速器。在拍波加速器和一些其他技术途径中,不能期望等离子体尾波能够俘获冷粒子,而是必须注入粒子,然后把它们加速到高能量。总而言之存在着各种各样的可能性,用来描写旨在创造加速电子的各种等离子体尾波途径的字首缩写词已有一大堆。把对该领域的探索,留给特别有兴趣的读者。

为了确定对上述各种问题的探求具有怎样的意义,首先似乎应当了解电子能量的增益可能有多大,下面依照 Tajima 和 Dawson 的论文估算这个问题。当尾波变得很大以至破裂时,能量增益达到最高,这种情况出现于一个等离子体振荡周期中电子漂移距离 x_{os} 达到条件 $k_p x_{os} \approx 1$ 的时候。我们在实验室坐标系中观察等离子体的振荡,这里

$$x_{os} = eE_W/(m_e\omega_{pe}^2) \tag{11.37}$$

式中 E_W 为尾波中的电场强度,与电场势 Φ 的关系是 $|E_W| \approx k_p\Phi$。由此实验室坐标系中有

$$e\Phi = m_e\omega_{pe}^2/k_p^2 \approx m_e c^2 \tag{11.38}$$

在等离子体尾波的随动坐标系中估算电子能量增益最为简单,因为该坐标系中电子在定常的势阱中振荡。参考朗道和栗弗席兹的专著“场论”中关于相对论坐标变换的论述,可以用实验室坐标系中物理量写出这个随动坐标系中势阱的深度 $\Phi^{(W)}$ 为

$$e\Phi^{(W)} = \gamma_r e\Phi \approx \gamma_r m_e c^2 \tag{11.39}$$

式中

$$\gamma_r = (1 - v_p^2/c^2)^{-1/2} \tag{11.40}$$

因此,γ_r 是对应于等离子体尾波运动的相对论因子。下面记 $\beta \equiv v_p/c$。当实验室坐标系中电子具有最高能量时,恰好也是它在尾波坐标系中能量为最大时,在后一坐标系中该最大能量为 $\gamma_r m_e c^2$。为了找出在实验室坐标系中它所对应的能量 ε_{lab},做洛伦兹变换使该能量返回到实验室坐标系中,得出

$$\varepsilon_{lab} = \gamma_r[\gamma_r m_e c^2 + \beta c(\gamma_r \beta mc)] = \gamma_r^2 m_e c^2(1 + \beta^2) \approx 2\gamma_r^2 m_e c^2 \tag{11.41}$$

给出实验室坐标系中看到的具有这么高能量的被加速电子的相对论因子 γ_{max} 将很有帮助,显然应有

$$\gamma_{max} = 2\gamma_r^2 \tag{11.42}$$

在使用光脉冲造成压力的特殊情形,最佳光脉冲应具有相等于 v_p 的群速度 v_g,正如第 8 章中所述,该群速度为

$$v_g = c(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)^{-1/2} \tag{11.43}$$

从此式可导出

$$\gamma_{max} = 2\omega^2/\omega_{pe}^2 \tag{11.44}$$

如果使用波长 1μm 的激光驱动电子密度 $10^{17}/cm^3$ 的等离子体中的尾波,可得出 $\gamma_{max}=2\times10^8$,电子能量高达 $\varepsilon_{lab}=10GeV$。然而有些理由表明这个问题并非如此简单,这里需要的激光脉冲宽度为 $\pi/\omega_{pe}=180fs$,而且还必须创建一定长度 l_a 的均匀等离子体区,使加速得以实现,这里

$$l_a \approx \varepsilon_{lab}/|eE_W| = 2c\omega^2/\omega_{pe}^3 \tag{11.45}$$

可计算出 $l_a\approx34cm$。维持这样长的均匀等离子体区并使聚焦激光束均匀通过这么长的距离,将是十分困难的挑战性工作。但是如果提高等离子体的电子密度(也就是提高 ω_{pe}),可使上述距离缩短,然而激光脉冲长度立即应接近于一个激光光波周期。怎样使电子能量达到几十吉电子伏特,将需要十分高明的技术或者使用多台激光器。本书编写期间,这个领域的研究十分活跃。

习题 11.5

试求上述例子中把电子加速到约 30GeV 所需要的时间。

习题 11.6

假设使用一个可聚焦到 10μm 直径光斑、辐照度达到 $10^{20}W/cm^2$ 的激光束,通过隧道电离(参见 11.2 节)或者作为尾波场加速器,是否可能得到更加高能的电子?

在其他可能的应用中可以使用电子束团产生压力,这种情形中等离子体尾波将把许多个这样的束团加速到高能量。本书编写期间,一个约 30GeV 的电子束的能量已提高到 1GeV 以上。基于上述同样理由,这种应用中最佳等离子体密度由电子束团的长度 l_b 所决定,即

$$l_b = \pi c/\omega_{pe} \tag{11.46}$$

为了维持电子束团在传播过程中不发生分散,在束散度和等离子体中自聚焦之间要有适当平衡,这就要求在等离子体电子密度和等离子体进口处束半径 r_{bo} 之间满足如下关系:

$$\omega_{pe}^2 = 2\gamma_b c^2 \varepsilon_b^2/r_{bo}^4 \tag{11.47}$$

式中 γ_b 为电子束团的相对论因子;ε_b 为电子束团的发射度(与发散度有关,其单位的量纲是距离乘以角度)。因此为了得到最佳的加速,必须仔细调节电子束团的形状。这里还有一些关系式仍然成立,如 $\gamma_{max}=2\gamma_r^2$ 以及 $eE_W\approx m_e c\omega_{pe}$,因此加速长度为

$$l_a \approx \gamma_{max}c/\omega_{pe} = 2\gamma_r^2 c/\omega_{pe} \tag{11.48}$$

可以看出,当提高 γ_{max} 时为避免 l_a 随之增大,需要同时提高 ω_{pe},这反过来又需要缩短束团长度并减小其直径。本书编写期间,这种途径也在积极探讨之中。

11.7.2　利用固体靶表面的电场势进行加速

上节讨论的尾波场和拍波过程也许可能发展为下一代粒子加速器的原理。加速器研制对被加速粒子的能散度和束散度提出了必须满足的约束条件,一些其他应用(质子照相等)在这些方面可能没有这样严格的限制。当相对论激光束打到固体靶上,通常可观察到质子

束或其他离子束的产生，产生这些粒子束的一种机制可以称为“离子静电加速”或“空间电荷加速”，从这些名词容易理解其作用方式。激光与电子相互作用，把许多电子从靶中迁移出来，使靶体带正电荷，从而又把离子从靶表面上推出来。由于靶表面是平面，被逐出的离子沿靶表面法线方向运动。又因为激光在靶件前表面产生等离子体，并产生容易穿透不太厚靶件的电子，因而通常容易看到靶件前、后两个表面都发射离子束的现象。

以 4.2 节关于自相似稀疏波的分析为基础，可对上述空间电荷加速机制进行分析，下面的论述思路引自 Mora 的工作。4.2 节中用玻耳兹曼分布描述电子，得出

$$e\Phi = k_B T_e \ln(n_e/n_{eo}) \tag{11.49}$$

式中 Φ 为电场的势；n_{eo} 为靶表面处初始电子密度。只要电子振荡快得足以维持麦克斯韦分布，上式总是成立的，即使超快激光实验中也是如此。因此，可以假定等离子体的膨胀是等温的，至少在膨胀等离子体尚未显著冷却之前大多数高能离子产生的期间是如此。

前面已经导出离子运动的自相似解为

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{x}{c_s t} - 1\right) \tag{11.50}$$

式中 c_s 为声速。

在超快激光实验中，离子几乎没有时间可被加热，因此

$$c_s = \sqrt{Zk_B T_e/m_i}$$

式(11.50)的推导中已经假定等离子体是准中性的，因而有

$$\rho = n_e A m_p/Z$$

第 2 章中已考虑了把这种自相似膨胀解推广到电子密度具有某种初始分布的可能性，这种电子密度分布下与背景气体的相互作用十分普通，这个问题中给定最高电场势能（也就是最高离子能量）的量级为 $20k_B T_e$。容易证明，对应于自相似膨胀解的电场 E_{ss} 为常值，即

$$eE_{ss} = \frac{k_B T_e}{c_s t} \tag{11.51}$$

然而在超快激光实验中自相似模型可能失效，即当等离子体准中性假定不能适用的情形。在德拜长度 λ_D 的尺度范围总会出现电荷的分离，一旦 λ_D 超过离子密度剖面的当地长度尺度 $c_s t$，自相似模型不再成立。此时电子可能处于离子前面，形成膨胀等离子体的前沿，并拉动离子向前运动。发生这种情况的大致条件为

$$\lambda_D = \lambda_{D0}\sqrt{\frac{n_{e0}}{n_e}} = \lambda_{D0}\exp\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{c_s t}\right)\right] \tag{11.52}$$

式中 λ_{D0} 为电子密度为 n_{e0} 时的德拜长度。

根据自相似稀疏波的公式，满足此条件时有

$$x = (c_s t)[2\ln(\omega_{pi} t) - 1]$$

式中 ω_{pi} 为电子密度为 n_{eo} 时离子等离子体振荡频率，$\omega_{pi} = (4\pi n_{eo} Z e^2/m_i)^{1/2}$。对于完全电离的固态密度的铍靶，$\omega_{pi} \approx 3\times10^{14}$ rad/s，因此在几百飞秒之内 $(\omega_{pi} t)$ 约达到 100 的量级。这种情形中，离子前沿处的电场 E_{front} 估计为 $2E_{ss}$，这是由于在更远的 x 位置处电子过剩的缘

故。对于等离子体膨胀的数值模拟表明，下面的公式具有很好的精度：

$$eE_{\text{front}} = \frac{\omega_{\text{pi}}}{c_s}\frac{2k_B T_e}{\sqrt{5.44 + \omega_{\text{pi}}^2 t^2}} \tag{11.53}$$

把此式相等于 $m_i \mathrm{d}v_i/\mathrm{d}t$，然后对 t 积分得到离子速度 v_i 和最高离子能量 $\varepsilon_{\max}$，结果是

$$v_i = c_s[\ln(2\omega_{\text{pi}}^2 t^2) - 1] \tag{11.54}$$

$$\varepsilon_{\max} = 2Zk_B T_e[\ln(\omega_{\text{pi}} t\sqrt{2/2.72})]^2 \tag{11.55}$$

当 $\omega_{\text{pi}} t \approx 100$ 时，给出 $\varepsilon_{\max} \approx 40Zk_B T_e$。在强相对论情况下，$k_B T_e \approx a_0 m_e c^2$，这意味着，$\varepsilon_{\max} \approx 20Za_0(\text{MeV})$。也就是说，依靠空间电荷加速机制，甚至中等 a_0 值的离子似乎也有可能被加速到许多个兆电子伏特的能量。这个过程对于固体靶的前表面可能更为重要，对于很厚的以至于下述库仑爆炸过程不起主导作用的靶件，后表面的空间电荷加速也较为重要。

11.7.3　利用库仑爆炸进行加速

第三种重要的粒子加速机制称为库仑爆炸，主要适合于产生高能离子甚至产生离子束。当用光子或者粒子束辐照分子时产生的库仑爆炸，至少自 20 世纪 70 年代起就已应用于化学研究之中。下面简单介绍，为什么经过较长时间后人们再用激光去产生库仑爆炸？这里的分析部分引自 Zweiback 的论文。

首先考虑离子构成等密度 n_i 的球形分布，其中的电子被移走了，积分高斯定理得到此团簇内部半径 r 处任何离子位置上的电场，在 cgs 制中可写为

$$E = 4\pi n_i Zer \tag{11.56}$$

然后求解方程 $E = -\nabla\Phi$，得出电场势为

$$\Phi = \begin{cases} 2\pi n_i Ze\left[\dfrac{8\pi}{3}r_0^2 + (r_0^2 - r^2)\right], & r < r_0 \\ \\ 2\pi n_i Ze\dfrac{8\pi}{3}\dfrac{r_0^3}{r}, & r > r_0 \end{cases} \tag{11.57}$$

式中 n_i 为离子密度；Z 为离子电荷；e 为电子电荷；r_0 为离子球的初始半径。并已假定当 $r \to \infty$，$\Phi \to 0$。

这样一个离子云团的动力学行为比较简单，所有的离子都朝外作加速运动，最外面的离子得到最大的加速。每个离子的 r 增大时其加速度下降，所以位于里面的任何离子都不会超越任何外面的离子。结果导致每个初始半径为 r 的离子的加速，终止于当半径小于 r 范围内的电荷所形成的静电势能全都转化为动能时。离子球最外沿的离子则一直被加速到剩余的势能可以忽略不计时为止，并在此时获得最高的离子能量，即

$$\varepsilon_{\max} = \frac{8\pi}{3}2\pi n_i Z^2 e^2 r_0^2 \tag{11.58}$$

相应的归一化离子能量分布函数 $f(\varepsilon_i) = (1/N)\,\mathrm{d}N/\mathrm{d}\varepsilon_i$ 的推导留给读者作为习题，其结果为

$$f(\varepsilon_i)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{\varepsilon_i}}{\varepsilon_{max}^{3/2}}, & \varepsilon_i<\varepsilon_{max}\\ 0, & \varepsilon_i>\varepsilon_{max}\end{cases} \tag{11.59}$$

如果 $r_0=10\mu m$（这似乎是可达到的激光焦斑的大小），当 $Z=1$，ε_{max} 值估计为 $0.76n_i/$（MeV），（这里 n_i 的单位为 $10^{18}cm^{-3}$）。因此如果实际产生这样的爆炸，从气态靶中也许可得到能量为兆电子伏特的离子，从固体（薄）靶中则可得到能量更高得多的离子。下面继续考虑这个问题的某些方面。

习题 11.7

求解均匀密度球形离子云团的电场势，以及由这种云团的库仑爆炸所产生离子的能量分布函数。

为了造成库仑爆炸，必须先用激光把电子从离子中剥离，并把它们从离子云团中逐出，为此激光的照射必须开启十分快速并达到相当高的辐照度。有两个时间尺度十分关键，即云团的爆炸时间及其声学膨胀时间。首先考虑后者，声速 $c_s=(Zk_BT_e/m_i)^{1/2}$，因此声学解体时间为

$$\tau_{sonic}=r_0/c_s=[r_0^2m_i/(Zk_BT_e)]^{1/2} \tag{11.60}$$

如果用式（11.31）粗略估计，$k_BT_e=a_0m_ec^2$，则有

$$\tau_{sonic}=140\sqrt{\frac{Ar_{0\mu m}^2}{Za_0}}\quad(fs) \tag{11.61}$$

式中 $r_{0\mu m}$ 表示以 μm 为单位的 r_0 值。

求解位于云团最外表面的离子的运动方程，就可得到爆炸时间。由于云团内的电荷量是相对固定不变的（任何离子即时半径范围内的电荷量相等于其初始值），则可把离子速度与电场势能关联起来。对于最外面离子的速度 v_i 得到如下关系式，

$$\frac{1}{2}m_iv_i^2=\varepsilon_{max}\left(1-\frac{r_0}{r}\right) \tag{11.62}$$

又可改写为

$$\left(\frac{v_i}{v_{imax}}\right)^2=1-\frac{r_0}{r} \tag{11.63}$$

这样建立的运动方程式为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i}{v_{imax}}\right)=\frac{ZeE}{v_{imax}}=\frac{\varepsilon_{max}}{m_ir_0v_{imax}}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{11.64}$$

也就是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i}{v_{imax}}\right)=\frac{v_{imax}}{2r_0}\left(1-\frac{v_i^2}{v_{imax}^2}\right)^2 \tag{11.65}$$

把上式积分，找出能量达到 $\varepsilon_{max}/2$ 的时间，作为爆炸历经时间 τ_{exp} 的合理估算值，得到

$$\tau_{exp}=\frac{3\sqrt{A}}{Z\sqrt{n_{18}}}\ (ps) \tag{11.66}$$

式中 n_{18} 是以 $10^{18}/cm^3$ 为单位的离子密度。

上式表明，τ_{exp}其实与离子云团初始半径无关。在与固体或者气体团簇相当的离子密度下(即 $10^{23}/cm^3$ 的量级)，爆炸时间约为 10fs 量级。

第三个关键要求是激光必须能够把电子驱逐出去。8.1 节中已经论述，电子受到激光光波产生的有质动力的影响，这种力的非相对论表达式可以写成为有质动力电场势的梯度，该势的定义式是 $U = m_e < v_{os}^2 > /2$，这里括号" < > "表示引入一个 2 倍因子意义下的平均值。可以看出，该电场势对于电子的总能量有贡献，可以与其他势能源(如与电荷云团相关的库仑势)相平衡。相对论意义下正确的有质动力势可以写为

$$U = m_e c^2 (\sqrt{1 + a_0^2} - 1) \tag{11.67}$$

令此式相等于最大库仑势(即 ε_{max})，得出当满足如下条件时

$$a_0 > 1.2 \sqrt{n_{18}} \sqrt{2 + 1.5 n_{18}} \tag{11.68}$$

激光光波则具有足够的有质动力势可把电子完全移走。如果不满足该条件，有质动力势只是强到能够移出部分电子，此时离子云团仍然会爆炸，但不会达到最大可能的离子能量。

总之，为了造成库仑爆炸，激光脉冲必须上升得足够快，以避免热膨胀。当激光辐照度提高或者激光光斑(或者云团靶尺寸，如果它小于光斑尺寸)缩小，则这个时间减小。激光脉冲必须上升得足够快，以避免在电子被逐出之前发生过早爆炸，并且激光脉宽还必须足够长，使得爆炸得以发生。当离子密度增加，这个脉宽减小，在固体密度下可降为若干飞秒。最后，激光脉冲的功率还必须高到足以把电子驱逐出去，所需要的辐照度大致随离子密度的平方而增大。

11.8　钻孔现象和无碰撞冲击波

当高密度靶等离子体(已达到 $n_e > n_c$)表面的激光辐照度相当大，造成的有质动力压力不再只是维持住密度剖面的陡峭，实际上像是在等离子体中钻了一个孔，把离子推向前方。在下面考察的场合中，这种过程向等离子体内部驱动一个无碰撞冲击波，该冲击波反射其前方等离子体中的离子，但通常不是相对论的。结果导致被反射的离子获得了大约为冲击波速 2 倍的速度(在实验室坐标中)。这是在空间电荷加速和库仑爆炸之外又一种在超快激光 - 等离子体相互作用中产生高能离子的机制。

Wilks 等(1992)首先讨论了相对论激光引起的钻孔现象。考虑激光束与等离子体离子之间的动量交换，可以理解这种现象的基本性态。电子的质量过于微小，它们携带的动量自然可以忽略不计。每个光子的动量为$\hbar k$，因此总的入射动量通量为$\hbar k \times I_L/\hbar\omega = I_L/c$，由激光传递给等离子体的总动量通量为$(1+\eta)I_L/c$，这里 η 为等离子体表面上激光的反射率。这个动量通量必须由离子的动量通量来平衡。如果离子本来就以速度 v_i 透入靶内运动，则掠过的离子通量为 $n_i v_i$，传递给最近掠过离子的动量通量为 $m_i n_i v_i^2$，因此有

$$\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 = \frac{I_L(1+\eta)}{n_i m_i c^3} \tag{11.69}$$

如果采用 a_0 表示上式，再使用式(8.13)，得到

$$\left(\frac{v_i}{c}\right)^2=\frac{a_0^2(1+\eta)}{m_ic^3}\frac{n_c}{n_i}\frac{1.37\times10^{18}}{1.1\times10^{21}}=2.7\times10^{-4}a_0^2(1+\eta)\frac{n_c}{n_{eo}}\frac{Z}{A}\tag{11.70}$$

式中 n_{eo}为靶中电子密度;n_c 为式(8.13)给出的对应于入射激光的临界电子密度。

式(11.70)适用于非相对论的离子速度范围,只要 a_0 大到足以使其他压力均可忽略不计的程度。这意味着达到 $a_0\sim30$ 的度秒时间尺度的激光脉冲,可以在临界密度等离子体靶中钻出一个约 50μm 深的孔。这种研究也许对于快点火场景比较重要(参看第 9 章)。

下面把离子速度与声速进行比较。对于较大的 a_0,如前所述激光加热下电子温度 T_h 大约是 $k_BT_h\sim a_0m_ec^2$,因此声速为

$$\left(\frac{c_s}{c}\right)^2=\frac{1}{c^2}\frac{Zk_BT_h}{m_i}=a_0\frac{m_e}{m_p}\frac{Z}{A}\tag{11.71}$$

离子透入等离子体运动的马赫数为

$$M^2=\left(\frac{v_i}{c_s}\right)^2=0.5a_0(1+\eta)\frac{n_c}{n_{eo}}\tag{11.72}$$

此式反过来给定了 a_0 的一个阈值,即马赫数 $M>1$ 的条件要求:

$$a_0\geqslant\left(\frac{2}{1+\eta}\right)\frac{n_{eo}}{n_c}\tag{11.73}$$

由此可见,激光驱动超声速离子通量进入临界密度等离子体的运动开始于 $a_0\sim1$ 时,而进入固态密度等离子体的运动则开始于 $a_0\sim100$ 的情况。

在流体动力学框架内可以认为,只要 $M>1$,冲击波就必定形成。但是在这样的靶件中碰撞过于微弱,难以产生通常的冲击波。因此,如果想要形成冲击波,必须利用无碰撞动力学的途径。如下所述,无碰撞冲击波确有实现的可能,深入了解可以参阅 Forslund 和 Shonck 的两篇论文以及 Silva 等的一篇论文。

透入等离子体的过程,对于双流不稳定性而言是不稳定的。一旦透入速度超过这些流体组分之一的热扩散速度时,就会发生双流不稳定性,而且会与等离子体中任何两个组分(电子、离子……)发生共振,因此存在着离子－离子以及离子－电子的双流不稳定性。这两种双流不稳定性的增长率是离子等离子体频率的某个分数,在 cgs 单位制中该频率为 $\omega_{pi}^2=4\pi n_iZ^2e^2/m_i$。这意味着,这类不稳定性在离子运动的时间尺度内迅速增长到较大的幅度,因而称为静电不稳定性,只产生纵向电场而没有磁场。

这类不稳定性导致如下类型的冲击波。静电波变得非常大,并在离子开始透入靶内处俘获当地的电子,所需要时间的量级为 $5\times2\pi/\omega_{pi}$,已由 PIC 数值模拟所确认。被俘获电子的集居,阻止了电子继续穿过相互作用区,结果导致能通过相互作用区的离子建立起正的电势并受到反射,使系统进入定常状况。在冲击波坐标系中可以认为,从上游来的离子一旦通过被俘获电子区后,很大部分即被弹性反射回去,与此同时下游的离子是驻定的,因为它们所处的位置一方面受到被反射离子的动压作用,另一方面受到激光给予的动量通量的作用。在实验室坐标系中,可以认为激光把离子推入靶内,在其前沿处形成一群被俘获的电子,所造成的正电势垒推动其外面的离子,把这些离子以 2 倍的冲击波速度输送到冲击波阵面前方区域。冲击波下游处的离子密度在两方面受到有效的压缩,最终形成的密度稍高于冲击

波前方的离子密度。

图 11.8 表示这种无碰撞冲击波的数值模拟结果。如同 PIC 计算结果最常用的显示方法，该图中许多小点对应于一个给定粒子的 z 位置和 z 方向速度，靶的初始位置位于 500～640 距离单位之间，在靶的两个边缘处可看到由空间电荷加速的粒子。冲击波阵面位于 550 距离单位处，其后方是人们并不关心的流场结构。受冲击波反射的离子是最高能的粒子，可看出它们在冲击波前方的流动，动量超过 $0.15m_pc$。

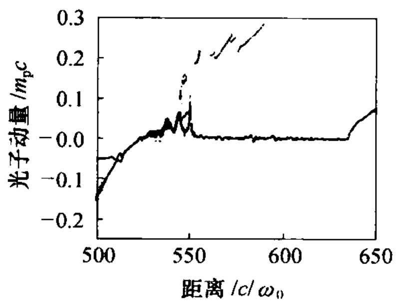


图 11.8　无碰撞冲击波 PIC 数值模拟得到的粒子速度

$a_0=16$ 的激光脉冲人射于初始电子密度 $n_e=10n_c$ 的等离子体，照射时间 $1024/\omega_0$。该图引自 Silva 等的论文。

由于几乎没有离子加入到冲击波后方的离子之中，激光脉冲推动波前方离子的"活塞"速度等于冲击波速度，因而得出被反射离子的速度为

$$\left(\frac{v_{\text{ref}}}{c}\right)=0.03a_0\sqrt{\frac{n_cZ}{n_{eo}A}} \tag{11.74}$$

该式又可写为

$$\left(\frac{v_{\text{ref}}}{c}\right)=\frac{0.06}{1+\eta}\sqrt{\frac{n_{eo}Z}{n_cA}}M^2 \tag{11.75}$$

甚至当马赫数 M 并不比 1 大很多时，反射离子速度也能轻易地达到十分之几的光速。在适当条件（即以 a_0 很大的激光束照射固态密度靶），甚至一个 $M\approx2$ 的冲击波也有可能驱动相对论状况的反射离子。

习题 11.8

推导上面所述理论的相对论版本，并找出式(11.75)的正确的相对论修正形式。

从上面两式似乎看出，只要马赫数 M 充分增大就可简捷地产生相对论离子。然而这条途径实际上并不管用，因为双流不稳定性产生的涨落俘获电子的能力十分有限，结果导致一定能量（在冲击波坐标系中）以上的离子不能被反射。极限的马赫数称为临界马赫数，$M\approx3$。在这个马赫数以上，涨落仍然可被驱动，离子束的透入受其影响，但是不再出现冲击波。更快的离子不能被冲击波所驱动，但可以在"激光活塞"的状况下被驱动，这将在下节中讨论。

激光驱动无碰撞冲击波的机制，对于较薄的靶件最为有效、最为重要，能够更好地使得激光在整个靶内维持着对电子的加热，致使冲击波能够保持低于临界马赫数的状况，又可使得离子运动及时地穿过整个靶件，在靶后表面处受到空间电荷的进一步加速。

十分细小的孤立团簇发生任何真实库仑爆炸的期间中，可以产生另一种不同类型的"冲击波"，其发生过程和原因（参见 Kaplan 等的论文）是，离子的密度剖面永远不会是全部均匀的，另外在初始离子云团的外边沿处，电子的逐出也不可能是完全的，这样导致的后果是 —— 作用于离子的力在云团内部某处达到最大，云团内部一些离子获得的加速比云团表面处的离子更为强烈，结果导致这些内部离子的运动将超越其他离子。如果库仑爆炸确

实只包括冷离子而不涉及电子,则离子透入运动的马赫数将过大,以至于不能驱动前述类型的冲击波。如果离子足够温热或者出现一些被激光加热的电子,使得等离子体声速充分提高,前述类型的冲击波仍有可能发展。但是,即使在不发生不稳定性或者其他离子相互作用的情况下,最终在一定区域中造成三种不同速度离子的重叠,即较慢的离子和两群较快的离子。这两群较快的离子要么恰好起源于最快离子(即受到最强加速的离子)的初始半径内沿,要么正好处于其外沿,导致发生重叠区域中离子密度的增大。另外,在该重叠区域两端处离子浓度相对其速度的导数值较大,这些位置都出现这两群较快的离子,如此形成的结构通常称为“冲击波壳”。

11.9 其他现象

我们已经看到,当激光束以相对论辐照度照射靶件时会产生一大堆现象。下面再讨论几种其他现象。

当激光束的辐照度提高到超过驱动无碰撞冲击波的程度,式(11.70)从动量平衡角度将预言激光能够产生相对论离子。具体说来,激光脉冲推动电子,电子接着产生加速离子的电场。当电子能够在激光脉冲期间把离子加速到相对论速度时,该系统就进入了 Esirkepov 等人论述的“激光活塞”状况。至于达到这种状况的要求,可在一些简单限制下做如下计算。

假设激光束已把所有电子从初始厚度 d 的薄层靶中完全逐出。为简单起见,假设 d 远小于激光光斑的宽度,这意味着电场与电子究竟被推出多远距离无关。电场是由具有相同电荷量的电子层和离子层共同产生的。根据高斯定律可以证明,最靠近电子的离子所经受的电场为

$$E_{/\!/} = 16\pi^2 e n_{eo} d \tag{11.76}$$

这里使用 cgs 单位制,如果使用 SI 制则系数 $16\pi^2$ 应改为 4π。经过相对论修正的离子能量为

$$\varepsilon_i = \sqrt{m_i^2c^4 + \frac{p_i^2}{(2m_i)}} = \sqrt{m_i^2c^4 + (eE_{/\!/}\,ct)^2} \tag{11.77}$$

式中最右面的表达式专门针对以光速通过恒定电场运动而获得能量的离子,这显然是对早期情况的一种近似。离子动能达到其静止质量所对应的能量(从而离子成为相对论),需要的时间近似为

$$t_{rel} = \frac{m_ic^2}{eE_{/\!/}} = \frac{m_ic^2}{16\pi^2e^2n_{eo}d} = \frac{Z(c/d)}{4\pi\omega_{pi}^2} \tag{11.78}$$

如果希望避开该模型中不出现的复杂性,离子的加速过程应当发生于一个激光光波周期之内,因而有 $\omega_0 t_{rel} \approx 2\pi$。人们希望知道实现这个目的需要使用多强的激光,首先认识到激光光波电场 E_L 一定要高于 $E_{/\!/}$,并且应使用式(11.78)确定靶的厚度 d。这意味着靶的厚度

$$d \approx \frac{Zc\omega_0}{8\pi^2\omega_{pi}^2} = \frac{c}{8\pi^2\omega_0}\frac{\omega_0^2}{\omega_{pe}^2}\frac{m_i}{m_e} = \frac{c}{8\pi^2\omega_0}\frac{n_c}{n_{eo}}\frac{m_i}{m_e} \tag{11.79}$$

通常 d 值约为激光波长的几分之一。把这个结果代入式(11.76),$E_L \geqslant E_{/\!/}$,并且 $a_0 = eE_L/m_e\omega_0 c$,得到

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{m_i}{m_e} \tag{11.80}$$

对于质子来说,$I_L\lambda_{\mu m}^2$的量级约为 $1.2\times10^{23}\mathrm{W\cdot\mu m^2/cm^2}$。

激光与固态靶相互作用动力学行为导致的另一类现象是**磁场的产生**。激光产生的电子束携带很强的电流,因此它们能够驱动很强的磁场,做到此点比初看起来要容易些。例如,假设要产生 10^9G 的磁场,从式(8.69)可知,设想通过发送以光速 c 通过直径 10μm 圆孔的电子束驱动一个电子电流,该电子束的密度只需要约 $10^{15}/\mathrm{cm}^3$ 的量级。把密度为 $10^8/\mathrm{cm}^3$ 的电子团簇加速到接近光速 c,就可达到这个目的。然而测量磁场却是十分严重的挑战,本书编写时据说已经得到了 10^9G 的磁场。

电流可以被驱动进入靶内,或者沿靶表面流动。Ruhl 和 Mulser 在他们的计算研究中确认了由有质动力引起的表面磁场的产生,从而形成电荷的分离和斜入射情形的表面电流。这些过程接着造成了直流磁场,上述数值模拟中看到这种磁场随激光辐照度的变化十分强烈,其场强接近 100MG,引起对激光的吸收率随着 I_L 和入射角的剧烈变化。Wilks 等(1992)在正入射情形完全相对论的电磁学二维 PIC 数值模拟中,当激光强度高于 Ruhl 和 Musler 论文情形时也见到了直流磁场的产生,他们把这种现象归结为在光-等离子体界面处电子加热的缘故。另外,在相对论强度的激光辐照下,还有其他的磁场产生机制可能发挥作用(参见 Bychenkov、Tikhonchuk 和 Sudan 的论文)。

对于天体物理领域有着潜在意义的第三种其他现象是正电子的产生。从真空中直接产生电子-正电子对,需要超过 $10^{28}\mathrm{W/cm^2}$ 的激光辐照度,但是在激光光波与固态靶相互作用的情形,有可能在低得多的辐照度下产生电子-正电子对,例如,Liang、Wilks 和 Tabak 所论述的那样。此时首先需要产生具有式(11.20)给定典型能量 E_{hot}的高能电子。通过与原子核相互作用产生电子-正电子对的阈值电子能量为 $2mc^2$,截面的标度关系约为核电荷数的平方 Z_{nuc}^2。定常状态下产生电子对的激光辐照度阈值大约为 $10^{20}\mathrm{W/cm^2}$。对于超快的动态相互作用,Liang 等人找到了一个与此相当的阈值。本书编写期间人们已经观察到了正电子的产生,有待观察的是能否产生其能量密度中电子对占优势的等离子体,以及是否有一种激光-靶系统能够成为有实际意义的正电子源。

相对论激光束能够在靶内引发核反应,其首先的一步是产生能量达到许多个兆电子伏特的高能电子。例如,Cowen 等以辐照度高于 $10^{20}\mathrm{W/cm^2}$、总能量 50J 并具有明显预脉冲的激光束辐照金靶,所产生的电子分布能量高达 100MeV。这些电子接着又与金核相互作用,产生能量为几十兆电子伏特的韧致辐射光子。这些光子的能量已经超过了在金靶中和位于靶附近的铜片中引起光-核反应的能量阈值(约 10MeV),从而引起了这两种元素的嬗变。

前面已经提及电子束团在驱动等离子体中尾波场加速方面的应用,使用高能电子束还能探讨其他的效应现象(参见 Joshi 等的论文)。采用密度剖面经适当剪裁的等离子体,可以使电子束聚焦、散焦或者进行导向,也可以使电子束沿等离子体横向摆动。一方面,如果实验参数可使电子束重复地自聚焦,并且由于电子束相对于其传播方向的自然倾斜,实现横

向摆动就很自然;另一方面,可以设想采用更为主动的措施,形成等离子体中迫使电子束摆动的波。利用横向摆动的电子束,可能产生具有潜在应用价值的可调谐的定向发射的辐射能束。

除了上面的设想以外,高能物理(注意不是“高能量密度物理”)中涉及的粒子碰撞,能够创建产生短暂的极端高能量密度的相对论环境。许多物理性态也许只有用粒子物理的术语才能得到最好的描述,此时人们将会遇到诸如“夸克-胶子等离子体”之类的概念,其实它们与各种等离子体系统有着很多共同点。另外,有些这样的系统也许对天体物理学有所应用(参见 Chen 的论文),可能包括宇宙加速实验、重元素谱仪、与视界面(event horizons)有关的实验以及关于相对论喷流动力学的实验等。

在本书编写的近几年中,相对论高能量密度实验的领域发展十分迅速,我们盼望今后年代中涌现出更加令人振奋的学术思想和科学发现。

附录 A　物理常数，缩写词，变量符号

表 A.1　物理常数

名 称	符号	cgs 单位制中的值	常用其他表示	SI 单位制中的值
玻尔半径	a_0	5.29×10^{-9} cm	0.529Å	5.29×10^{-11} m
光 速	c	3×10^{10} cm/s		3×10^{8} m/s
电子电荷	e	4.8×10^{-10} 静电库仑		1.6×10^{-19} C
普朗克常数	$\hbar$	6.63×10^{-27} erg·s		6.63×10^{-34} J·s
玻耳兹曼常数	k_B	1.6×10^{-12} erg/eV	1.6×10^{-16} J/keV	1.38×10^{-23} J/K
电子静止质量	m_e	9.11×10^{-28} g		9.11×10^{-31} kg
质子质量	m_p	1.67×10^{-24} g	$1836m_e$	1.67×10^{-27} kg
斯忒藩－玻耳兹曼常数	σ	5.67×10^{-5} erg/(cm^2·s·K^4)	1.03×10^{5} W/(cm^2·eV^4)	5.67×10^{-8} W/(m^2·K^4)

表 A.2　缩写词

缩 写 词	全 称 词	专 业 名 词
ASE	Amplified Spontaneous Emission	放大的自发发射
CPA	Chirped Pulse Amplification	啁啾脉冲放大
DPP	Distributed Phase Plate	分布式位相板
DPR	Distributed Polarization Rotator	分布式极化旋转器
ICF	Inertial Confinement Fusion	惯性约束聚变
LTE	Local Thermodynamic Equilibrium	局域热动力学平衡
NLTE	Nonlocal Thermodynamic Equilibrium	非局域热动力学平衡
RT	Rayleigh – Taylor	瑞利 - 泰勒
KH	Kelvin – Helmholtz	开尔文 - 亥姆霍兹
RM	Richtmyer – Meshkov	里希特迈耶 - 缅希科夫
RPP	Random Phase Plate	随机位相板
SBS	Stimulated Brillouin Scattering	受激布里渊散射
SN	Supernova	超新星
SRS	Stimulated Raman Scattering	受激拉曼散射
SSD	Smoothing by Spectral Dispersion	谱色散导致的匀滑化
$\exp^{(\cdots)}$	相当于 $e^{(\cdots)}$	指数函数

表 A.3 变量符号

物理变量	英语名词	本书使用符号
(平均)相对原子质量	Atomic weight (average)	A
矢量势	Vector potential	$\boldsymbol{A}$
Atwood 数	Atwood number	A_n
靶丸面积	Area of capsule	A_c
激光光斑面积	Area of laser spots	A_L
黑腔内壁面积	Area of walls of hohlraum	A_w
磁场(磁感应强度)	Magnetic field	$\boldsymbol{B}$
热强度	Thermal intensity	$B(T)$
谱热强度	Thermal spectral intensity	$B_\nu(T)$
等熵声速	Isentropic sound speed	c_s
比定容热容	Specific heat at constant volume	c_V
小涡旋直径	Small vortex diameter	d
面元	Element of area	$\mathrm{d}A$
至固态密度的临界距离	Critical to solid density distance	D
电子电荷	Electron charge	e
电场强度	Electric field	$\boldsymbol{E}$
谱动能	Spectral kinetic energy	$E(k)$
热能密度	Thermal energy density	E_{BB}
聚变释放的能量	Energy released by fusion	E_{fus}
氢的电离能	Hydrogen ionization energy	E_H
激光束的电场	Electric field of laser beam	E_L
总辐射能量密度	Total radiation energy density	E_R
马夏克(Marshak)波中的能量	Energy in Marshak wave	E_w
谱辐射能量密度	Spectral radiation energy density	E_ν
电离状态 j 与 k 之间的能量差	Energy difference between ionization states j and k	E_{jk}
电子总能量	Electron total energy	ε_e
电子静止质量对应的能量	Electron rest mass energy	ε_0
离子总能量	Ion total energy	ε_i
热通量	Thermal flux	F_{BB}
电子自由能	Electron free energy	F_e
电磁力密度	Electromagnetic force density	F_{EM}
洛伦兹力	Lorentz force	F_L
辐射能量通量	Radiative energy flux	F_R
总辐射通量	Total radiation flux	F_R
光子通量	Photon flux	F_γ
谱辐射通量	Spectral radiation flux	F_ν
爱丁顿因子	Eddington factor	$f_\nu = \frac{p_\nu}{E_\nu}$

（续）

物理变量	英语名词	本书使用符号
分布函数	Distribution function	$f(v)$
"引力"加速	"Gravitational" acceleration	g
激光辐照度	Laser irradiance	I_L
总强度	Total intensity	I_R
谱强度	Spectral intensity	I_v
以 10^{xx} W/cm^2 为单位表示的激光辐照度	Laser irradiance in units of 10^{xx} W/cm^2	I_{xx}
电流密度	Current density	$\boldsymbol{J}$
Richardson 数	Richardson number	J_r
总平均强度	Total mean intensity	J_R
横向电流密度	Transverse current density	J_t
平均谱强度	Mean spectral intensity	J_v
黎曼不变量	Riemann invariants	J_+, J_-
波数	Wave number	k
波矢量	Wave vector	$\boldsymbol{k}$
麦克斯韦方程组的系数	Coefficients in Maxwell's equations	k_1, k_2, k_3
剖面的标尺长度	Scale length of a profile	L
旋涡直径	Eddy diameter	l
康普顿平均自由程	Compton mean free path	l_C
马赫数	Mach number	M
上游马赫数	Upstream Mach number	M_u
内马赫数	Internal Mach number	M_{int}
聚变燃料质量	Fusion fuel mass	m_f
质量烧蚀率	Mass ablation rate	$\dot{m}$
冲击波阵面法向矢量	Shock normal	$\boldsymbol{n}$
电子密度	Electron density	n_e
离子密度	Ion density	n_i
临界密度	Critical density	n_c
标量流体压力	Scalar fluid pressure	p
总标量压力	Total scalar pressure	$\tilde{p}$
电子动量	Electron momentum	p_e, χ_e
费米简并压力	Fermi degenerate pressure	p_F
标量辐射压力	Scalar radiation pressure	p_R
压力张量	Pressure tensor	$\underline{\boldsymbol{P}}$
烧蚀压力	Ablation pressure	P_{abl}
相对论自聚焦的功率阈值	Power threshold for relativistic self - focusing	P_{sf}
湍流能量耗散功率	Turbulent energy dissipation	P_t

（续）

物 理 变 量	英 语 名 词	本书使用符号
谱辐射压力张量	Radiation spectral pressure tensor	$\boldsymbol{P}_{\nu}$
热性热通量	Thermal heat flux	Q
辐射强度参数	Radiation strength parameter	Q
Spitzer – Harm 热通量	Spitzer – Harm heat flux	Q_{SH}
自由流热通量	Free – streaming heat flux	Q_{FS}
内能	Internal energy	R
气体常数 $P/(\rho T)$	Gas constant $P/(\rho T)$	R
离子球半径	Ion sphere radius	R_o
辐射强度参数	Radiation strength parameter	R_r
坡印廷通量	Poynting flux	S
比熵	Specific entropy	s
电子的比熵	Specific entropy of electrons	s_e
物理量 Q 的源	Source of quantity Q	S_Q
谱源函数	Spectral source function	S_{ν}
时间	Time	t
温度	Temperature	T
冲击波阵面后的温度	Immediate post – shock temperature	T_2，T_S
费米简并温度	Fermi degenerate temperature	T_d
电子温度	Electron temperature	T_e
等效温度	Effective temperature	T_{eff}
离子温度	Ion temperature	T_i
辐射通量对应的温度	Temperature corresponding to a radiation flux	T_{min}，T_{eff}
高能电子温度	Energetic electron temperature	T_{hot}
前驱粒子温度	Precursor temperature	T_p
辐射温度	Radiation temperature	T_R
冲击波阵面后的等离子体温度（主要是电子温度）	Immediate post – shock plasma (mainly electron) temperature	T_S
黑腔内壁温度	Hohlraum wall temperature	T_w
流体(粒子)速度	Fluid (particle) velocity	u
零阶流体速度	Zeroth – order fluid velocity	U
作为量纲因子(标尺)的特征速度	Characteristic velocity for scaling arguments	U
流体速度的一阶分量	First – order components of fluid velocity	$u_1 = (u, v, w)$
柯尔莫哥洛夫速度标尺	Kolmogorov velocity scale	u_k
粒子速度	Particle velocity	v
参考系之间的速度差	Velocity difference between frames of reference	v
相速度	Phase velocity	v_p
光波中的电子振荡速度	Oscillating velocity of electron in light wave	v_{os}

（续）

物理变量	英语名词	本书使用符号
电子热运动速度	Electron thermal velocity	v_{th}
火箭速度(靶丸速度)	Rocket velocity (or capsule velocity)	V
喷射速度	Exhaust velocity	V_{ex}
速度的垂直分量	Vertical component of velocity	w
涡量转动速度	Vortex rotational velocity	w
旋涡转动速度	Eddy rotational velocity	w_e
马夏克(Marshak)波标度变量	Marshak wave scaling variable	W
磁能密度	Magnetic energy density	W_B
电能密度	Electric energy density	W_E
空间坐标	Space	x
马夏克(Marshak)波穿透深度	Marshak wave penetration depth	x_M
聚变产额	Fusion yield	Y
离子电荷(平均)	Ionic charge (average)	Z
反照率(漫反射系数)	Albedo	α
各种角度	various angles	$\alpha, \beta, \chi, \varphi$
入射光子引起的电离分数	Fraction of incoming photons ionized	α_i
相对论速度因子(v/c)	Relativistic velocity (v/c)	β
热扩散系数	Coefficient of thermal diffusivity	χ
喷流冷却参数	Jet cooling parameter	χ_j
Rosseland 平均不透明度	Rosseland mean opacity	χ_R
谱总不透明度	Spectral total opacity	χ_v
比内能	Specific internal energy	ε
总比内能密度	Total specific internal energy density	$\tilde{\varepsilon}$
下游发射率	Downstream emissivity	ε_d
比内电子能量	Specific internal electron energy	ε_e
费米能	Fermi energy	ε_F
比内离子能量	Specific internal ion energy	ε_{ii}
比能动离子能量	Specific kinetic ion energy	ε_{ik}
上游发射率	Upstream emissivity	ε_u
理想火箭效率	Efficiency of ideal rocket	ε_R
聚变燃烧分数	Fusion burn fraction	Φ
波的位相	Phase of a wave	ϕ
电子经历的位相	Phase experienced by an electron	ϕ_e
标量电场势	Scalar electric potential	ϕ
多方指数	Polytropic index	γ
相对论 γ	Relativistic γ	γ_r
不稳定性增长率	Instability growth rate	γ_0

（续）

物理变量	英语名词	本书使用符号
强耦合参数	Strong coupling parameter	Γ
物理量 Q 的通量	Flux of quantity Q	Γ_Q
各种角度和分数	various angles and fractions	η
X 射线转换效率	X – ray conversion efficiency	η
柯尔莫哥洛夫长度标尺	Kolmogorov length scale	η_k
谱发射率	Spectral emissivity	η_v
谱散射发射率	Spectral scattering emissivity	η_{vsc}
谱热发射率	Spectral thermal emissivity	η_{vth}
吸收不透明度	Absorption opacity	κ
总热传导系数	Total coefficient of heat conduction	$\tilde{\kappa}$
使用冷却函数的薄层不透明度	Opacity of thin layer using cooling function	κ_{astro}
热轫致吸收系数	Thermal bremsstrahlung absorption coefficient	κ_b
电磁波吸收系数	Electro – magnetic wave absorption coefficient	κ_{EM}
普朗克平均比不透明度	Specific Planck mean opacity	κ_m
普朗克平均不透明度	Planck mean opacity	κ_P
热传导的辐射系数	Radiative coefficient of heat conduction	κ_{rad}
热传导的热系数	Thermal coefficient of heat conduction	κ_{th}
谱吸收不透明度	Spectral absorption opacity	κ_v
波长	Wavelength of a wave	λ
涡旋特征尺度	Vortex characteristic scale	λ
泰勒微尺度	Taylor microscale	λ_T
德拜长度	Debye length	λ_D
电子德拜长度	Electron Debye length	λ_{De}
离子德拜长度	Ion Debye length	λ_{Di}
平均自由程	Mean free path	λ_{mfp}
以微米为单位的波长	Wavelength in microns	λ_μ
天体物理冷却函数	Astrophysical cooling function	Λ
化学势	Chemical potential	μ
经典化学势	Classical chemical potential	μ_C
单位电荷的原子质量(A/Z)	Atomic mass per charge (A/Z)	μ_c
电子 – 离子碰撞率	Electron – ion collision rate	ν_{ei}
光学薄冷却率	Optically thin cooling rate	ν
运动粘性系数	Kinematic viscosity	ν
辐射频率	Radiation frequency	ν
消光率	Extinction rate	ν_e
薄层归一化的冷却率	Cooling rate normalization for thin layer	ν_{rad}^*
冷却率	Cooling rate	ν_1

（续）

物理变量	英语名词	本书使用符号
使用冷却函数的冷却率	Cooling rate using cooling function	ν_{astro}
薄层辐射冷却率	Radiation cooling rate for thin layer	ν_{rad}
光子运动粘性系数	Kinematic photon viscosity	ν_{rad}
标度变量 $n_e/T_e^{3/2}$	Scaling variable $n_e/T_e^{3/2}$	θ
简并参数	Degeneracy parameter	Θ
质量密度	Mass density	ρ
电荷密度	Charge density	ρ_c
物理量 Q 的密度	Density of quantity Q	ρ_Q
散射不透明度	Scattering opacity	σ_S
谱散射不透明度	Spectral scattering opacity	σ_ν
粘性应力张量	Viscosity stress tensor	$\boldsymbol{\sigma}_\nu$
柯尔莫哥洛夫时间标尺	Kolmogorov time scale	τ_k
频率 ν 处的光学深度	Optical depth at frequency ν	τ_ν
光学深度	Optical depth	τ
波的频率	Wave frequency	ω
激光频率	Laser light frequency	ω_o
归一化频率	Normalized frequency	ω_n
电子的等离子体频率	Electron plasma frequency	ω_{pe}
离子的等离子体频率	Ion plasma frequency	ω_{pi}
散射光频率	Scattered light frequency	ω_S
黑腔的辐照度转换率	Irradiance conversion by hohlraum	ξ
相似变量	Similarity variable	ξ
引力势	Gravitational potential	Ψ

附录 B　简单的 Mathematica 计算编码

B.1　基本冲击波关系计算机数学推导的编码文本

■ 开始时先输入准备作图用的程序包

```
<<Graphics`MultipleListPlot`
<<Graphics`Graphics`
<<NumericalMath`ListIntegrate`
$TextStyle =
{FontWeight→"Bold",FontFamily→"Helvetica",FontSize→12}
{FontWeight→Bold,FontFamily→Helvetica,FontSize→12}
```

■ 首先假定 γ 不变化，以下各量取零值时即为质量、动量、能量平衡方程组

```
eq1 = ρ1u1 - ρ2u2
eq2 = ρ1u1^2 + p1 - 2u2^2 - p2
eq3 = (p1u1 + ρ1ε1u1 + ρ1u1^3/2) - (p2u2 + ρ2ε2u2 + ρ2u2^3/2)
```

■三个方程式的分析：首先要知道压力与密度之间的关系，使用物态方程可以消去 ε，然后利用前面两式消去 u1 和 u2。

■ 下一步是项式替换的第一个例子。这是 **Mathematica** 编程中进行代数运算的一项关键技术，不需要强制定义哑元，可以避免很多混淆之处。

```
eq3a = eq3/. {ε1→p1/(ρ1(γ-1)), ε2→p2/(ρ2(γ-1))}
cond1 = Solve[{eq1 = = 0}, u2]
(★ Here we solve an equation to create a condition giving the value of a variable.
It is useful to use a systematic notation for this. Then we substitute the results ★)
eq4 = eq2/. cond1[[1]]
eq5 = (eq3a/. cond1[[1]])
```

■下面两步说明为什么这是一件在纸上作的艰苦工作，我们解出 u1，把它代入能量方程式，最后解出 p2。如果想在纸面上做这个代数运算，则使用 $1/\rho$ 为变量要简单得多。

```
cond2 = Solve[ eq4 = = 0, u1 ]
eq6 = eq5/. cond2
cond3 = Solve[ eq6 = = 0, p2 ]
cond3[ [2] ]
prat = Simplify[ (p2/. cond3[ [2] ])/p1 ]
( ★ creating a normalized ratio of p2/p1 ★ )
pratv = Simplify[ prat/. (ρ1→1/v1, ρ2→1/v2) ]
```

■上面两个结果是压力比的标准表达式，下面计算密度比。

```
cond4 = Solve[ eq6 = = 0, ρ2 ]
rhorat = Simplify[ (ρ2/. cond4[ [1] ])/ρ1 ]
( ★ rhorat is the ratio ρ2/ρ1 ★ )
```

■ 这里建立了一个关于密度比的方程式 eq7 = 0，进而可以寻求其他的解，例如下面所述

```
cond5 = Solve[ eq4 = = 0, p2 ]
cond6 = Solve[ eq7 = = 0/. cond5[ [1] ], ρ2 ]
cond7 = Simplify[ cond6/. p1→ρ1 cs^2/γ ]
( ★ using the standard definition of sound speed ★ )
cond8 = Simplify[ (cond7[ [2] ]/. u1→Mu cs) ]
( ★ Mu is the upstream Mach number ★ )
rhorat2 = (ρ2/. cond8[ [1] ])/ρ1
( ★ get the standard expression for the density ratio ★ )
prat2 = Simplify[ prat/. ρ2→ρ1 rhorat2 ]
( ★ get the standard expression for the pressure ratio ★ )
Trat = Collect[ Simplify[ prat2/rhorat2 ], Mu ]
( ★ get the standard expression for the temperature ratio ★ )
test = Simplify[ Trat/. Mu→1 ] ( ★ check sensibility ★ )
p2a = Simplify[ p1 (prat2/. Mu^2→(ρ1 us^2/(γp1))) ]
p2b = ρ2/Amp kB(Z + 1)T/. ρ2→ρ1 rhorat2
p2b = p2b/. Mu^2→(ρ1 us^2/(γp1))
cond9 = Solve[ p2b - p2a = = 0, T]
T2 = Collect[ T/. cond9[ [1] ], us]
Ten = T2/. kB - > 1
Tenig = Ten/. γ→5/3
( ★ with p1 = 0, this is the "standard" result ★ )
```

B.2　费米分布和有关计算的编码文本

■ 从输入需要使用的程序包开始

```
<<Graphics`MultipleListPlot`
<<Graphics`Graphics`
<<NumericalMath`ListIntegrate`
$TestStyle =
{FontWeight→"Bold",FontFamily→"Helvetica",FontSize→12}
```

■ 选择计算种类:

1. 费米简并分布
2. 经典与简并密度以及压力的计算

■ 1. 第一节使用正文中关于电子分布函数的表达式,得到费米简并图

$$f=\frac{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\mathrm{eFermi}}{\mathrm{kT}}\right]+1}{\mathrm{Exp}\left[\frac{-\mathrm{eFermi}+\mathrm{en}}{\mathrm{kT}}\right]+1}$$

$$g=\mathrm{Exp}\left[-\frac{\mathrm{en}}{\mathrm{kT}}\right]$$

```
f1 = Simplify[f/.(en→αeFermi)]
g1 = Simplify[g/.(en→αeFermi)]
```

$$\mathrm{f2}=\mathrm{Simplify}\left[\mathrm{f1}/.\left\{\mathrm{eFermi}\to\frac{1}{\beta}\mathrm{kT}\right\}\right]$$

$$\mathrm{g2}=\mathrm{Simplify}\left[\mathrm{g1}/.\left\{\mathrm{eFermi}\to\frac{1}{\beta}\mathrm{kT}\right\}\right]$$

```
gl = Plot[{f2/.β→.01,f2/.β→1,f2/.β→10,g2/.β→10},
  {α,0,10},PlotRange→{{0,10},{0,1.1}},Frame→True,
  PlotStyle→{{Thickness[0.008]},{Thickness[0.008]},
    {Thickness[0.008]},{Thickness[0.015],GrayLevel[.5]}}]
Export["Fermidistributions.eps",gl,"EPS"]
LinearLogPlot[
  {f2/.β→.01,f2/.β→1,f2/.β→5,g2/.β→5,
  {α,0,10},PlotRange→{{0,10},{.2,1.1}}]
```

■ 2. 第二节是经典和简并密度以及压力计算

2.1 基本关系

$$\mathrm{efermi}=\left(\frac{6\pi^2}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\frac{\mathrm{ne}^{2/3}}{2\mathrm{me}}$$

```
Θ1 = (kBTe)/efermi (★ this is Θ ★)
```

$$\Theta\psi=\mathrm{PowerExpand}[\Theta1/.\ \mathrm{ne}\to(\psi\mathrm{Te}^{3/2})]$$

```
coefΘψ =
```

$$\Theta\psi/.\ \{\psi\to1,\mathrm{me}\to9.1110^{-28},\mathrm{h}\to6.6310^{-27},\mathrm{kB}\to1.610$$

$$\Theta F=\mathrm{PowerExpand}\left[\Theta1/.\ \mathrm{ne}\to\left(\mathrm{Te}^{3/2}\frac{4\pi(2\mathrm{mekB})^{3/2}}{h^3}\mathrm{Fonehalf}\right)\right]$$

下面一些量与 Lindl 撰写的书中结果有关

```
neLindl = 0.25/(2.518369.1110^-28)

eFermiLindl = 7.9 * neLindl/10^23

pFermiLindl = 9.9(0.25/2.5)^(5/3)

ΘLindl = Θ1/. {me→9.1110^-28, h→6.6310^-27, kB→1.610^-12,

Te→(11.5/11604)0.001, ne→neLindl}

(★ the range of ψ of interest is 10^14 to 10^26 ★)

(★ so the range of Θ is ★)

coefΘψ/(10^14)^(2/3) (★ to ★)

coefΘψ/(10^26)^(2/3)

(★ i.e. 0.001 to 10^6 ★)
```

下面画的图表明为什么 Θ 处于这个范围

```
g2 = LogLogPlot[{ni,10ni,20ni,40ni,80ni}, {ni,10^12,10^24},
  PlotRange→{{10^19,10^24}, Frame→True]
N[10^19/1000^(3/2)]
```

计算在 Θ = T/Td 中需要的 μ/(kB Te)

```
Solve[Θψ = = Θ, ψ]
μclassΘ = Log[PowerExpand[
  (h^3/(2(2πmekB)^(3/2)) Θ)/. Θ→(ψ/. Solve[Θψ = Θ, ψ])][[1]]]
μfermiΘ = PowerExpand[((3π^2)^(2/3) (h/(2π))^2 1/(2mekB) Θ^(2/3))]/.
  Θ→(ψ/. Solve[Θψ = = Θ, ψ])][[1]]
Θcrit = N[Θ/. Solve[μclassΘ = = 0, Θ][[1]]]
(★ range of μ us ★)
N[μclassΘ/. Θ→10^6] (★ to ★)
N[μfermiΘ/. Θ→.001]
Θclass = Θ/. Solve[μ1 = = μclassΘ, Θ][[1]]
Θfermi = Θ/. Solve[μ1 = = μfermiΘ, Θ][[1]]
```

2.2 我们希望得到表示化学势如何随温度变化关系的图线，但这是个困难的工作，因为需要根据数值积分的结果构造相应的数值表格，而且 **Mathematica** 软件也不适合于生成表

格。可以采用下述途径画出所要的图线：

（a）建立积分计算程序；

（b）进行积分，填充相应的数值表格。由于势趋于零，数据应采取最细的分辨；

（c）根据作图的要求，排列相应的数组；

（d）画出图线。

```
Clear[μ1]
eq100 = ((3/2) HIntegrate[√x/(1 + Exp[x - μ1]), {x,0,200}])^(-2/3)
eq100/. {μ1→15, HIntegrate→NIntegrate}
eq101 = ((3/2) HIntegrate[√x/(1 + Exp[x - μ1]), {x,0,μend}])^(-2/3)
eq102 = ((3/2) HIntegrate[√x/(1 + Exp[x - μ1]), {x,0,2μ1}])^(-2/3)
t1 = Table[{ - μ1, N[Θclass], N[Θfermi],
   eq101/. {HIntegrate→NIntergrate, μend→Max[200,2μ1]}},
   {μ1, -21, -2, 1}] ;
t2 = Table[{ - μ1, N[Θclass], N[Θfermi],
   eq101/. {HIntegrate→NIntergrate, μend→Max[200,2μ1]}},
   {μ1, -1.99, -.01, .01}] ;
tneg = Join[t1,t2];
thetaplot = Transpose[tneg][[4]];
μplot = Transpose[tneg][[1]];
neglist = Transpose[Append[{thetaplot}, μplot]];
classplotneg = Transpose[tneg][[2]];
negclass = Transpose[Append[{classplotneg}, μplot]];
Null
g1 = LogLogListPlot[neglist, PlotRange→{{10^-3,10^3}, {0.1,20}},
   PlotJoined→True,
   Frame→True, PlotStyle→{Thickness[0.005]}];
g2 = LogLogListPlot[negclass,
   PlotRange→{{10^-3,10^3}, {0.1,20}},
PlotJoined→True, Frame→True, PlotStyle→
   {Thickness[0.008], GrayLevel[0.5], Dashing[{0.02,0.02}]}];
g3 = Show[g1,g2]
g4 = LogLogListPlot[neglist, PlotRange→{{10^2,10^6}, {0.1,25}},
   PlotJoined→True, Frame→True];
g5 = LogLogListPlot[neglist, PlotRange→{{10^2,10^6}, {0.1,25}},
   PlotJoined→True, Frame→True, PlotStyle→
   {Thickness[0.008], GrayLevel[0.5], Dashing[{0.02,0.02}]}];
g6 = Show[g4,g5]
```

2.3 以上的工作是针对负化学势的,下面是关于正化学势的部分:

```
t3 = Table[{μ1, N[Θclass], N[Θfermi],
  eq101/. {HIntegrate→NIntergrate, μend→Max[200, 2μ1]}},
  {μ1, .1, 20, .1}];
t4 = Table[{μ1, N[Θclass], N[Θfermi],
  eq101/. {HIntegrate→NIntergrate, μend→Max[200, 2μ1]}},
  {μ1, 30, 1000, 10}];
tpos = Join[t3, t4];
thetaplot = Transpose[tpos][[4]];
μplot = Transpose[tpos][[1]];
poslist = Transpose[Append[{thetaplot}, μplot]];
posclass = Transpose[Append[{Transpose[tpos][[2]]}, μplot]];
posfermi = Transpose[Append[{Transpose[tpos][[3]]}, μplot]];
g11 =
  LogLogListPlot[poslist, PlotRange→{{10^-3, 10^3}, {0.1, 1000}},
  PlotJoined→True, Frame→True,
  PlotStyle→{Thickness[0.005]}];
g12 = LogLogListPlot[posclass,
  PlotRange→{{10^-3, 10^3}, {0.1, 1000}},
  PlotJoined→True, Frame→True, PlotStyle→
  {Thickness[0.008], GrayLevel[0.5], Dashing[{0.02, 0.02}]}];
g13 = LogLogListPlot[posfermi,
  PlotRange→{{10^-3, 10^3}, {0.1, 1000}},
  PlotJoined→True, Frame→True, PlotStyle→
  {Thickness[0.008], GrayLevel[0.5], Dashing[{0.02, 0.02}]}];
g14 = Show[g11, g12, g13]
```

利用图形软件,可以把这两种状况的图线组合在一起,以供研究

```
Export["muvsthrtaneg.eps", g3, "EPS"]
Export["muvsthrtaneg.eps", g14, "EPS"]
```

2.4 下面进行 pe / (ne kB Te)所需要的压力积分计算:

```
eqF32 = HIntegrate[x^1.5/(1 + Exp[x - μ1]), {x, 0, μend}]
eqF12 = HIntegrate[x^0.5/(1 + Exp[x - μ1]), {x, 0, μend}]
eqF200 = 2/3 eqF32/eqF12
```

可以略去 $\mu < 0$ 的情形,此时显然有 ~ 1

```
pl = Table[
  {μ1, eq200/. {HIntegrate→NIntegrate, μend→Max[200,2μ1]}},
  {μ1,0.11,99.01,.1}]
g100 = LogLogPlot[pl, PlotRange→{{0.1,100},{0.5,40}},
  PlotJoined→True, Frame→True]
Export["pvsμfermi.eps",g100,"EPS"]
```

根据上述计算，μ 很大时有 p/(nekBTe) = (2/5)μ/(kBTe)，但在简并状况下 μ/(kBTe) = 1 / Θ，因此 p = pF = (2/5)μεF

2.5 比较经典状况下电子和离子在能量方面的贡献

```
jmax = IntegratePart[0.63 √Te]

        jmax
eion =  Σ  i^2EH/. EH→13.6
        i=1

        3
eelec = ─0.63 √Te (★ Te and EH in eV here ★)
        2
gener = LogLogPlot[{eion, eelec},
  {Te,5,1000}, PlotPoints→1000, Frame→True]
Export["energy comparison.eps",gener,"EPS"]
```

参 考 文 献

全书通用的有参考意义的专著,在正文中以作者的英文姓氏引用:

[1] W. D. Arnett: Supernova and Nucleosynthesis (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996).

[2] S. Atzeni, J. Meyer - ter - Vehn: The physics of inertial fusion. In: International Series of Monographs on Physics, vol. 125 (Clarendon Press, Oxford, 2004).

[3] S. I. Braginskii: Transport processes in a plasma. In: Reviews of Plasma Physics, vol. 1 (Consultants Bureau: New York), p. 205.

[4] J. Castor: Radiation Hydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge, 2004)

[5] S. Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Dover, New York, 1961).

[6] R. C. Davidson, Chair, Committee on High Energy Density Plasma Physics, Plasma Science Committee, National Research Council: Frontiers in High - Energy - Density Physics: The X - Games of Contemporary Science (National Academies Press, Washington, DC, 2002).

[7] S. Eleizer, A. Ghatak, H. Hora: Fundamentals of Equations of State (World Scientific, River Edge, NJ, 2002).

[8] H. R. Griem: Principles of Plasma Spectroscopy (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[9] J. O. Hinze: Turbulence (McGraw - Hill, New York, 1959).

[10] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics (Wiley, New York, 1999).
中译本:J. D. 杰克逊著, 经典电动力学(上、下册),朱培豫 译,北京:人民教育出版社,1978.

[11] Krall, Trivelpiece: Principles of Plasma Physics (San Francisco Press, Inc., San Francisco, 1986).

[12] W. L. Kruer: The Physics of Laser - Plasma Interactions (Westview Press, Reprint Edition, Boulder, CO, 2001).

[13] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Statistical Physics, Course of Theoretical Physics, vol. 5 (Buterworth - Heineman, Oxford, 1997).
中译本:Л. Д. 朗道、E. M. 栗弗席兹著,统计物理学,杨训恺 等译,北京:人民教育出版社,1964.

[14] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, vol. 2 (Buterworth - Heineman, Oxford, 1997).
中译本:Л. Д. 朗道、E. M. 栗弗席兹著,场论,任朗、袁炳南译,北京:高等教育出版社,1959.

[15] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics, vol. 6 (Buterworth - Heineman, Oxford, 1997)
中译本:Л. Д. 朗道、E. M. 栗弗席兹著,连续介质力学(第一、二册),彭旭麟译,北京:人民教育出版社,1960.

[16] K. R. Lang: Astrophysical Formulae, vol. 1 (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999).

[17] M. A. Liberman, J. S. De Groot, A. Toor, R. B. Spielman: Physics of High - Density Z - Pinch Plasmas (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999).
中译本:M. A. Liberman, J. S. De Groot 等著, 高密度 Z 箍缩等离子体物理学,孙承纬译,北京:国防工业出版社,2003.

[18] J. D. Lindl: Inertial Confinement Fusion: The Quest for Ignition and Energy Gain Using Indirect Drive (AIP Press, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998).

[19] D. Mihalas, B. W. Mihalas: Foundations of Radiation Hydrodynamics (Dover, New York, 2000).

[20] L. I. Sedov: Mechanics of continuous media. In: Series in Theoretical and Applied Mechanics, vol. 4 (in two sub - volumes) (World Scientific, Singapore, 1997).

中译本:谢多夫(Л. И. Седов)著,李植译,连续介质力学(第一卷,第二卷),高等教育出版社,北京:2007,2009.

[21] J. Sheffield: Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation (Academic Press, New York, 1975).

[22] I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, M. P. Bachynski: The Particle Kinetics of the Plasmas (Addison – Wesley, Reading, MA, 1966).

[23] F. H. Shu: The Physics of Astrophysics, vol. 1 (University Science Books, Mill Valley, CA, 1991).

[24] L. Spitzer: The Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Publishers, New York, 1962).
中译本:斯必泽(Spitzer,L)著,完全电离气体的物理学,耀左译,北京:科学出版社,1959。

[25] Tennekes, Lumley: A First Course in Turbulence (MIT Press, Cambridge, MA, 1972).

[26] M. Turner, Chair, Committee on the Physics of the Universe, National Research Council: Connecting Quarks with the Cosmos: Eleven Science Questions for the New Century (National Academies Press, Washington, DC, 2002).

[27] Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Razier: Physics of Shock Waves and High – Temperature Hydrodynamic Phenomena (Dover, New York, 2002).
中译本:Я. Б. 泽尔道维奇、Ю. П. 莱依捷尔著,激波和高温流体动力学现象物理学(上、下),张树材译,北京:科学出版社,1980。

译者补充原书中提及但未给出文献条目的参考书:

[28] D. Salzman: Atomic Physics in Hot Plasmas (Oxford Univ. Press, N. Y., 1998).

[29] G. B. Whitham: Linear and Nonlinear Waves (John Wiley $ Sons, N. Y., 1974).

中译本:惠瑟姆(Whitham,G. B.)著,线性与非线性波,庄峰青、岳增元译,北京:科学出版社,1986。

各章引用文献

第2章

[1] J. H. Jeans: The radiation from a pulsating star and from a star in process of fission, Monthly Notices Royal Astrophys. Soc. 86, 86 - 93 (1926).

[2] L. H. Thomas: The radiation field of a fiuid in motion, Quart. J. Math. 1, 239 - 251 (1930).

第3章.

[1] E. Avrorin, B. K. Vodolaga, N. P. Voloshin, G. V. Kovalenko, V. F. Kuropantenko, V. A. Simonenko, and B. T. Chernovolyuk (1987), Experimental study of the influence of electron shell structure on shock adiabats of condensed materials, Sov. Physics JETP, 66, 347 - 354.

[2] A. Benuzzi, T. Lower, M. Koenig, B. Faral, D. Batani, D. Beretta, C. Danson, and D. Pepler (1996), Indirect and direct laser driven shock waves and applications to copper equation of state measurements in the 10 – 40 MBar pressure range, Phys. Rev. E, 54, 2162 - 2165.

[3] M. D. Knudson, D. L. Hanson, J. E. Bailey, C. A. Hall, J. R. Asay, and W. W. Anderson (2001), Equation of state measurements in liquid deuterium to 70 GPa, Phys. Rev. Lett., 87, 2255011 - 2225014.

[4] R. M. More, et al.: A new quotidian equation of state (QEOS) for hot dense matter, Phys. Fluids 31, 3059 - 3078 (1988).

[5] M. D. Rosen, et al.: Analysis of laser - plasma coupling and hydrodynamic phenomena in long – pulse, long – scale – length plasmas, Phys. Rev. A 36, 247 - 260 (1987).

[6] D. Saumon, G. Chabrier, and H. M. Van Horn (1995), An equation of state for low – mass stars and giant planets, Astrophys. J. Suppl., 99, 713 - 741.

第4章

[1] D. N. Burrows, and Z. Guo (1994), ROSAT observations of VRO 42.05.01, Astrophys. J., 421, L19 - L22.

[2] R. A. Chevalier: Self - similar solutions for the interaction of stellar ejecta with an external medium, Astrophys. J. 258, 790 - 797(1982).

[3] R. P. Drake, J. J. Carroll III, T. B. Smith, P. Keiter, S. G. Glendinning, O. Hurricane, K. Estabrook, D. D. Ryutov, B. A. Remington, R. J. W. (LLNL), E. Michael, and R. McCray (2000), Laboratory Experiments to Simulate Supernova Remnants, Phys. Plasmas, 7, 2142.

[4] K. Kifonidis, T. Plewa, H. - T. Janka, and E. Muller (2003), Non - spherical core collapse supernovae. I. Neutrino - driven convection, Rayleigh - Taylor instabilities, and the formation and propagation of metal clumps, A&A, 408, 621 - 649.

第5章

[1] G. Dimonte: Spanwise homogeneous buoyancy - drag model for Rayleigh - Taylor mixing and experimental evaluation, Phys. Plasmas 7, 2255 - 2269 (2000).

[2] P. E. Dimotakis, (2005), Turbulent Mixing, Annu. Rev. Fluid Mech., 37, 329 - 356.

[3] R. E. Duff, et al.: Effects of diffusion on interface instability between gases, Phys. Fluids 5, 417 - 425 (1962).

[4] R. Ishizaki, K. Nishihara; Propagation of a rippled shock wave driven by nonuniform laser ablation, Phys. Rev. Lett. 78, 1920 - 1923 (1997).

[5] R. Ishizaki, et al.: Instability of a contact surface driven by a nonuniform shock wave, Phys. Rev. E 53, R5592 - R5595 (1996).

[6] D. Oron, et al.: Dimensionality dependence of the Rayleigh - Taylor and Richtmyer - Meshkov instability late - time scaling laws, Phys. Plasmas 8, 2883 - 2890 (2001).

[7] R. D. Richtmyer: Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids, Commun. Pure Appl. Math. 13, 297 (1960).

[8] D. J. Tritton: Physical Fluid Dynamics (Clarendon Press, Oxford, 1988).

[9] A. Velikovich, L. Phillips: Instability of a plane centered rarefaction wave, Phys. Fluids 8, 1107 - 1118 (1996).

[10] A. L. Velikovich: Analytic theory of Richtmyer - Meshkov instability for the case of reflected rarefaction wave, Phys. Fluids 8, 1666 - 1679 (1996).

[11] J. G. Wouchuk, K. Nishihara: Linear perturbation growth at a shocked interface, Phys. Plasmas 3, 3761 - 3776 (1996).

第6章

[1] G. Hazak, et al.: Study of radiative plasma structures in laser driven ablating plasmas, Phys. Plasmas 6, 4015 - 4021 (1999).

[2] P. T. Springer, D. J. Fields, B. G. Wilson, J. K. Nash, W. H. Goldstein, C. A. Iglesias, F. J. Rogers, J. K. Swenson, M. H. Chen, A. Bar - Shalom, and R. E. Stewart (1992), Spectroscopic absorption measurements of an iron plasma, Phys. Rev. Lett., 69, 3735 - 3738.

[3] R. S. Sutherland, M. A. Dopita: Cooling functions for low - density astrophysical plasmas, Astrophys. J. Suppl. Ser. 88, 253 - 327 (1993).

第7章

[1] L. B. Da Silva, L. B., M. J. MacGowan, D. R. Kania, B. A. Hammel, C. A. Back, E. Hsieh, R. Doyas, C. A. Iglesias, F. J. Rogers, and R. W. Lee (1992), Absorption Measurements demonstrating the importance of Delta n = 0 transitions in the opacity of iron, Phys. Rev. Lett., 69, 493 - 496.

第8章

[1] S. P. Hatchett: Ablation Gas Dynamics of Low - Z Materials Illuminated by Soft X - rays (Lawrence Livermore National La-

boratory, 1991).

[2] O. Hurricane, et al.: Late – time Hohlraum pressure dynamics in supernova remnant experiments, Phys. Plasmas 8, 2609 - 2612 (2001).

[3] J. M. Liu, et al.: Electron heat transport with non – Maxwellian distributions, Phys. Plasmas 1, 3570 - 3576 (1994).

[4] D. S. Montgomery et al., Laser and Particle Beams 17, 349 (1999).

[5] D. D. Ryutov, et al.: The physics of fast Z pinches, Rev. Mod. Phys. 72, 167 - 223 (2000).

第9章

[1] S. Atzeni: Inertial fusion fast ignitor: Igniting pulse parameter window vs the penetration depth of the heating particles and the density of the precompressed fuel, Phys. Plasmas 6, 3316 - 3326 (1999).

[2] M. Tabak, et al.: Ignition and high gain with ultrapowerful lasers, Phys. Plasmas 1, 1626 (1994).

第10章

[1] D. Arnett, et al.: Instabilities and nonradial motion in SN 1987A, Astrophys. J. Lett. 341, 63 - 66 (1989).

[2] R. T. Barton: The CALE computer code. In: Numerical Astrophysics, ed by J. M. Centrella, et al. (Jones and Bartlett, Boston, 1985), pp. 482 - 497.

[3] Benuzzi – Mounaix, et al.: Supernovae Rayleigh - Taylor instability experiments on the CEA – Phebus laser facility, Astrophys. Space Sci. 277, 143 - 146 (2001).

[4] H. A. Bethe: Supernova mechanisms, Rev. Mod. Phys. 62, 801 - 866 (1990).

[5] J. M. Blondin, et al.: The structure and evolution of radiatively cooling jets, Astrophys. J. 360, 370 - 386 (1990).

[6] J. E. Borkowski, et al.: Collimation of astrophysical jets: The proto – planetary nebula HE 3 – 1475, Astrophys. J. 482, L97 - L100 (1997).

[7] A. Burrows, et al.: On the nature of core – collapse supernova explosions, Astrophys. J. 450, 830 (1995).

[8] A. Calder, et al.: On validating an astrophysical simulation code, Astrophys. J. 143, 201 - 229 (2002).

[9] J. W. Connor, J. B. Taylor: Nucl. Fusion 17, 1067 (1977).

[10] J. M. Dawson On the production of plasma by giant lasers, Phys. Fluids 7 (1964).

[11] J. B. Dogget, and D. Branch (1985), A comparative study of supernova light curves, Astron. J., 90, 2303 - 2311.

[12] R. P. Drake: Laboratory experiments to simulate the hydrodynamics of supernova remnants and supernovae, J. Geophys. Res. 104, 14,505 - 514,515 (1999).

[13] R. P. Drake: The design of laboratory experiments to produce collisionless shocks of cosmic relevance, Phys. Plasmas 7, 4690 - 4698 (2000).

[14] R. P. Drake, et al.: Nonlinear mixing behavior of the three – dimensional Rayleigh - Taylor instability at a decelerating interface, Phys. Plasmas 11, 2829 - 2837 (2004).

[15] D. T. Farley, et al.: Radiative jet experiments of astrophysical interest using intense lasers, Phys. Rev. Lett. 83, 1982 - 1985 (1999).

[16] B. Fryxell, et al.: Instabilities and clumping in SN 1987A. I. early evolution in two dimensions, Astrophys. J. 367, 619 - 634 (1991).

[17] J. Glimm, et al.: A critical analysis of Rayleigh - Taylor growth rates, J. Comput. Phys. 169, 652 - 677 (2001).

[18] J. Grun, et al.: Instability of Taylor - Sedov blast waves propagating through a uniform gas, Phys. Rev. Lett. 66, 2738 - 2741 (1991).

[19] P. Hartigan: The visibility of the Mach disk and the bow shock of a stellar jet, Astrophys. J. 339, 987 - 999 (1989).

[20] P. Hartigan, et al.: Shock structures and momentum transfer in Herbig - Haro jets. In: Protostars and Planets, vol. 4 (University of Arizona Press, Tucson, 2000), pp. 841 - 866.

[21] P. J. Hartigan, et al. : Observations of entrainment and time variability in the HH 47 jet, Astrophys. J. 414, L121 - L124 (1993).

[22] J. Kane, et al. : Scaling supernova hydrodynamics to the laboratory, Physics of Plasmas 6, 2065 - 2072 (1999).

[23] J. Kane, et al. : Two - dimensional versus three - dimensional supernova hydrodynamic instability growth, Astrophys. J. 528, 989 - 994 (2000).

[24] J. Kane, et al. : Supernova - relevant hydrodynamic instability experiments on the Nova laser, Astrophys. J. 478, L75 - L78 (1997).

[25] J. O. Kane, et al. : Interface imprinting by a rippled shock using an intense laser, Phys. Rev. E 63, 055401R (2001).

[26] K. Kifonidis, et al. : Nucleosynthesis and clump formation in a core - collapse supernova, Astrophys. J. Lett. 531, L123 - 126 (2000).

[27] R. I. Klein, et al. : Interaction of supernova remnants with interstellar clouds: From the Nova laser to the Galaxy, Astrophys. J. Suppl. Ser. 127, 379 - 383 (2000).

[28] C. C. Kuranz, et al. : Preheat issues in hydrodynamic HEDLA experiments, Astrophys. Space Sci. , submitted (2004a).

[29] C. C. Kuranz, et al. : Progress toward the study of laboratory scale, astrophysically relevant, turbulent plasmas, Astrophys. Space Sci. , submitted (2004b).

[30] S. V. Lebedev, et al. : Laboratory astrophysics and collimated stellar outflows: The production of radiatively cooled hypersonic plasma jets, Astrophys. J. 564, 113 - 119 (2002).

[31] C. E. Leith: Stochastic backscatter in a subgrid - scale model: Plane shear mixing layer, Phys. Fluids A 2, 297 - 299 (1990).

[32] A. Miles: The effect of initial conditions on the nonlinear evolution of perturbed interfaces driven by strong blast waves. Ph. D. thesis (University of Maryland, College Park, 2004a).

[33] A. R. Miles: Bubble merger model for the nonlinear Rayleigh - Taylor instability driven by a strong blast wave, Phys. Plasmas 11, 5140 - 5155 (2004b).

[34] A. R. Miles, et al. : Transition to turbulence and effect of initial conditions on three - dimensional compressible mixing in planar blast - wave - driven systems, Phys. Plasmas 12 (2005).

[35] A. R. Miles, et al. : Numerical simulation of supernova - relevant laser - driven hydro experiments on OMEGA, Phys. Plasmas 11, 3631 - 3645 (2004a).

[36] A. R. Miles, et al. : The effect of a short - wavelength mode on the evolution of a long - wavelength perturbation driven by a strong blast wave, Phys. Plasmas 11, 5507 - 5519 (2004b).

[37] A. R. Miles, et al. : Effect of initial conditions on two - dimensional Rayleigh - Taylor instability and transition to turbulence in planar blast - wave - driven systems, Phys. Plasmas 11, 5278 - 5296 (2004c).

[38] A. R. Miles, et al. : The effect of a short - wavelength mode on the nonlinear evolution of a long - wavelength perturbation driven by a strong blast wave, Fusion Sci. Technol. , in press (2004d).

[39] A. Mizuta, et al. : Numerical analysis of jets produced by intense laser, Astrophys. J. 567, 635 - 642 (2002).

[40] E. Muller, et al. : Instabilities and clumping in SN 1987A, A&A 251, 505 - 514 (1991).

[41] U. Piomelli, et al. : Subgrid - scale backscatter in turbulent and transitional flows, Phys. Fluids A 3, 1766 - 1771 (1991).

[42] B. Reipurth, J. Bally: Herbig - Haro Flows: Probes of early stellar evolution, Ann. Rev. Astron Astrophys. 39, 403 - 455 (2001).

[43] B. Reipurth, et al. : Hubble Space Telescope images of the HH 34 jet and bow shock: Structure and proper motions, Atron. J. 123, 362 - 381 (2002).

[44] B. A. Remington, et al. : Modeling astrophysical phenomena in the laboratory with intense lasers, Science 284, 1488 - 1493 (1999).

[45] B. A. Remington, et al. : A review of astrophysics experiments on intense lasers, Phys. Plasmas 7, 1641 (2000).

[46] B. A. Remington, et al. : Experimental astrophysics with high - power lasers and Z pinches, Rev. Mod. Phys. , in press (2006).

[47] B. A. Remington, et al. : Supernova hydrodynamics experiments on the Nova laser, Phys. Plasmas 4, 1994 - 2003 (1997).

[48] B. H. Ripin, et al. : Laboratory laser - produced astrophysical - like plasmas, Las. Part. Beams 8, 183 - 190 (1990).

[49] H. F. Robey et al. : Experimental investigation of the three - dimensional interaction of a strong shock with a spherical density inhomogeneity, Phys. Rev. Lett. 89, 085001 - 085004 (2002).

[50] H. F. Robey, et al. : An experimental testbed for the study of hydrodynamic issues in supernovae, Phys. Plasmas 8, 2446 - 2453 (2001).

[51] H. F. Robey, et al. : The onset of turbulence in high Reynolds number, accelerated flows. Part II. Experiment, Phys. Plasmas 10, 614 (2003).

[52] D. D. Ryutov, et al. : Similarity criteria for the laboratory simulation of supernova hydrodynamics, Astrophys. J. 518, 821 (1999).

[53] D. D. Ryutov, et al. : Criteria for scaled laboratory simulations of astrophysical MHD phenomena, Astrophys. J. Suppl. Ser. 127, 465 - 468 (2000).

[54] D. D. Ryutov, et al. : Magnetohydrodynamic scaling: From astrophysics to the laboratory, Phys. Plasmas 8, 1804 - 1816 (2001).

[55] K. Shigemori, et al. : Experiments on radiative collapse in laser - produced plasmas relevant to astrophysical jets, Phys. Rev. E 62, 8838 - 8841 (2000).

[56] J. Stone, et al. : Testing astrophysical radiation hydrodynamics codes with hypervelocity jet experiments on the nova laser, Astrophys. J. Suppl. Ser. 127, 497 - 502 (2000).

[57] J. M. Stone, M. L. Norman: Numerical simulations of protostellar jets with non - equilibrium cooling. 3: Three - dimensional results, Astrophys. J. 420, 237 - 246 (1994).

[58] P. G. Sutherland: Gamma - rays and X - rays from supernovae. In: Supernovae, ed by A. G. Petschek (Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990), p. 111.

[59] R. S. Sutherland, M. A. Dopita: Cooling functions for low - density astrophysical plasmas, Astrophys. J. Suppl. Ser. 88, 253 - 327 (1993).

[60] H. Takabe: ICF and supernova explosions, Jpn. Plasma Fusion Res. 69, 1285 - 1300 (1993).

[61] H. Takabe: Astrophysics with intense and ultraintense lasers "laser astrophysics", Prog. Theor. Phys. Suppl. 143, 202 - 265 (2001).

[62] R. Tipton: About CALE, by its author. Phys. Plasmas 2(6), 2465 - 72, June 1995 edited (1996).

[63] S. E. Widnall, J. P. Sullivan: On the stability of vortex rings, Proc. R. Soc. London, A 332, 335 - 353 (1973a).

[64] S. E. Widnall, J. P. Sullivan: Stability of vortex rings, Proc. R. Soc. London Ser. A—Math. Phys. Eng. Sci. 332, 335 (1973b).

[65] S. Woosley: Type I supernovae: Carbon deflagration and detonation. In: Supernovae, ed by A. G. Petschek (Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990).

[66] S. E. Woosley, R. G. Eastmant: Types 1B and 1C supernovae: Models and spectra. In: Thermonuclear Supernovae, ed by B. Ruiz - Lapuente, et al. (Kluwer, Dordrecht, 1997).

第11章

[1] D. R. Bach, et al. : Intensity - dependent absorption in 10. 6 - μm laser - illuminated spheres, Phys. Rev. Lett. 50, 2082 - 2085 (1983).

[2] B. Bezzerides, et al. : Plasma mechanism for ultraviolet harmonic radiation due to intense CO2 light, Phys. Rev. Lett. 49, 202 - 205 (1982).

[3] G. Bonnaud, et al. : Laser interaction with a sharp - edged overdense plasma, Las. Part. Beams, 9, 339 - 354 (1991).

[4] F. Brunel: Not - so - resonant, resonant absorption, Phys. Rev. Lett. 59, 52 - 55 (1987).

[5] F. Brunel: Anomalous absorption of high intensity subpicosecond laser pulses, Phys. Fluids 31, 2714 - 2719 (1988).

[6] S. V. Bulanov, et al. : Interaction of an ultrashort, relativistically strong laser pulse with an overdense plasma, Phys. Plasmas 1, 745 - 757 (1994).

[7] N. H. Burnett, et al. : Harmonic generation in CO2 laser target interaction, Appl. Phys. Lett. 31, 172 - 174 (1977).

[8] V. Y. Bychenkov, B. T. Tikhonchuk: Magnetic field generation by short ultraintense laser pulse in underdense plasmas, Las. Part. Beams 14, 55 - 62 (1996).

[9] R. L. Carman, et al. : Visible harmonic emission as a way of measuring profile steepening, Phys. Rev. Lett. 46, 29 - 32 (1981).

[10] M. Chaker, et al. : Interaction of a 1 psec laser pulse with solid matter, Phys. Fluids B 3, 167 - 175 (1991).

[11] D. M. Chambers, et al. : Feasibility study of high harmonic generation from short wavelength lasers interacting with solid targets, Opt. Commun. 148, 289 - 294 (1998).

[12] P. Chen: Laboratory investigations of the extreme universe, Assoc. Asia Pacific Phys. Soc. Bull. 13 (2003).

[13] P. Combis, et al. : Low - fluence laser target coupling, Laser and Particle Beams 9, 403 - 420 (1991).

[14] T. E. Cowan, et al. : Photonuclear flssion from high energy electrons from ultraintense laser - solid interactions, Phys. Rev. Lett. 84, 903 - 906 (2000).

[15] C. N. Danson, et al. : Focused intensities of 10/sup 20/W cm/sup - 2/ with the upgraded Vulcan CPA interaction facility, Int. Soc. Opt. Eng. 3492, 82 - 93 (1999).

[16] T. Esirkepov, et al. : Highly efficient relativistic - ion generation in the laser - piston regime, Phys. Rev. Lett. 92, 175003, 175001 - 175004 (2004).

[17] R. Fedosejevs, et al. : Absorption of subpicosecond ultraviolet laser pulses in high - density plasma, Appl. Phys. B 50, 79 - 99(1990).

[18] D. W. Forslund, C. R. Shonk: Formation and structuer of electrostatic collisionless shocks, Phys. Rev. Lett. 25, 1699 - 1702 (1970a).

[19] D. W. Forslund, C. R. Shonk: Numerical simulation of electrostatic counterstreaming instabilities in ion beams, Phys. Rev. Lett. 25, 281 - 284 (1970b).

[20] P. Gibbon: Efficient production of fast electrons from femtosecond laser interaction with solid targets, Phys. Rev. Lett. 73, 664 - 667 (1994).

[21] P. Gibbon: High - order harmonic generation in plasmas, IEEE J. Quant. Electron. 33, 1915 - 1924 (1997).

[22] P. Gibbon, A. R. Bell: Collisionless absorption in sharp - edged plasmas, Phys. Rev. Lett. 68, 1535 - 1538 (1992).

[23] P. Gibbon, E. Forster: Short pulse laser - plasma interactions, Plasma Phys. Control. Fusion 38, 769 - 793 (1996).

[24] C. Grebogi, et al. : Harmonic generation of radiation in a steep density profile, Phys. Fluids 26, 1904 - 1908 (1983).

[25] Z. Jiang, et al. : X - ray spectroscopy of hot solid density plasmas produced by subpicosecond high contrast laser pulses at 10^{18} - 10^{19} W/cm^2, Phys. Plasmas 2, 1702 - 1711 (1995).

[26] C. Joshi, et al. : High energy density plasma science with an ultrarelativistic electron beam, Phys. Plasma 9, 1845 - 1855 (2002).

[27] A. E. Kaplan, et al. : Shock shells in Coulomb explosions of nanoclusters, Phys. Rev. Lett. 91, 143401 - 143404 (2003).

[28] S. Kato, et al. : Wave breaking and absorption efficiency for short pulse p - polarized laser light in a very steep density gradient, Phys. Fluids B 5, 564 - 570 (1993).

[29] J. D. Kmetec, et al. : MeV X - ray generation with a femtosecond laser, Phys. Rev. Lett. 68, 1527 - 1530 (1992).

[30] E. P. Liang, et al. : Pair production by ultraintense lasers, Phys. Rev. Lett. 81, 4887 - 4890 (1998).

[31] R. Lichters, et al. : Short - pulse laser harmonics from oscillating plasma surfaces driven at relativistic intensity, Phys. Plasmas 3, 3425 - 3437 (1996).

[32] R. A. Lindley, et al. : Resonant holographic interferometry of laser - ablation plumes, Appl. Phys. Lett. 63, 888 - 890 (1993).

[33] X. Liu, D. Umstadter: Competition between ponderomotive and thermal pressures in short - scale - length laser - plasmas, Phys. Rev. Lett. 69, 1935 - 1938 (1992).

[34] D. D. Meyerhofer, et al. : Resonance abosrption in high - intensity contrast, picosecond laser - plasma interactions, Phys. Fluids B 5, 2584 - 2588 (1993).

[35] P. Mora: Plasma expansion into a vacuum, Phys. Rev. Lett. 90, 185 - 189 (2003).

[36] G. Mourou, D. Umstadter: Development and applications of compact high - intensity lasers, Phys. Fluids B 4, 2315 - 2325 (1992).

[37] M. Nantel, et al. : Temporal contrast in Ti:Sapphire lasers: Characterization and control, IEEE J. Select. Top. Quant. Elect. 4, 449 - 458 (1998).

[38] P. A. Norreys, et al. : Efficient extreme UV harmonics generated from picosecond laser pulse interactions with solid targets, Phys. Rev. Lett. 76, 1832 - 1835 (1996).

[39] A. Pukhov, J. Meyer - ter - Vehn: Relativistic magnetic self - channelings of light in near - critical plasma: Three - dimensional particle - in - cell simulation, Phys. Rev. Lett. 76, 3975 - 3878 (1996).

[40] A. Rousse, et al. : Efficient Kalpha x - ray souce from femtosecond laser - produced plasmas, Phys. Rev. E 50, 2200 - 2207 (1994).

[41] W. Rozmus, et al. : A model of ultrashort laser pulse absorption in solid targets, Phys. Plasmas 3, 360 - 367 (1996).

[42] H. Ruhl, P. Mulser: Relativistic Vlasov simulation of intense fs laser pulse - matter interaction, Phys. Lett. A 205, 388 - 392(1995).

[43] R. Sauerbrey, et al. : Reflectivity of laser - produced plasmas generated by a high intensity ultrashort pulse, Phys. Plasmas 1, 1635 - 1642 (1994).

[44] L. O. Silva, et al. : Proton shock acceleration in laser - plasma interactions, Phys. Rev. Lett. 92, 015002, 015001 - 015004 (2004).

[45] R. N. Sudan: Machanism for the generation of 109 G magnetic fields in the interaction of ultraintense short laser pulse with an overdense plasma target, Phys. Rev. Lett. 70, 3075 - 3078 (1993).

[46] T. Tajima, J. M. Dawson: Laser electron accelerator, Phys. Rev. Lett. 43, 267 - 270 (1979).

[47] S. C. Wilks, et al. : Odd harmonic generation of ultra - intense laser pulses reflected from an overdense plasma, IEEE Trans. Plasma Sci. 21, 120 - 124 (1993).

[48] S. C. Wilks, et al. : Absorption of ultra - intense laser pulses, Phys. Rev. Lett. 69, 1383 - 1386 (1992).

[49] L. Zhao: Experimental studies of harmonic generation from solid - density plasmas produced by picosecond ultra - intense laser pulses. Ph. D. thesis (University of Toronto, Toronto, 1998).

[50] J. Zweiback, et al. : Detailed study of nuclear fusion from femtosecond laser - driven explosions of deuterium clusters, Phys. Plasma 9, 3108 (2002) .

内 容 简 介

本书是论述高能量密度物理新学科领域的基础(冲击波动力学和辐射流体力学)及其主要应用(惯性约束聚变、实验室天体物理和激光强场物理)的专著,基于作者的研究生教材进一步充实提高而写成。主要内容为冲击波和高温流体动力学基础、高温稠密等离子体性质、流体动力学界面不稳定性及湍流混合问题、辐射输运和辐射流体力学、高能量密度状态(或极端加载条件)的构建、惯性约束聚变、实验室天体物理、激光强场物理等。适合于从事爆炸力学、武器物理、热核聚变、天体物理、激光—等离子体相互作用等方面研究人员、教师和研究生阅读参考。